

9

**И Н С Т И Т У Т**  
**ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 73

В.А.Таюрский, Б.В.Чириков

**НЕАДИАБАТИЧНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ**  
**ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ**

Новосибирск

1973

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

ПРЕПРИНТ

В.А.Таюрский, Б.В.Чириков

НЕАДИАБАТИЧНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ  
ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

Новосибирск  
1973

### Nonadiabaticity of Charged Particle Motion in Dipole Magnetic Field.

The role of the Arnold diffusion for cut of the proton spectra from the side of high energies in the proton radiation belt of the Earth is investigated. Numerical calculations of the movement of the charged particle in the field of magnetic dipole with the goal to check up the theory/5/ are performed. The results of the calculations show that the last is quite accurate.

Как известно, поле магнитного диполя, в частности, поле Земли образует адиабатическую ловушку заряженных частиц (см., например, /1/). Известно также, что такая ловушка имеет утечки, связанные с медленными изменениями магнитного момента частицы, который является не "настоящим" инвариантом, а всего лишь адиабатическим /1/. В аксиально-симметричном магнитном поле возможно, тем не менее, абсолютное удержание частиц /2/, тогда как при наличии азимутальной неоднородности имеет место "универсальная" неустойчивость движения, называемая диффузией Арнольда /3,4/. Теория этой неустойчивости /4/ предсказывает резкое увеличение диффузии при

$$\varepsilon \approx 1/6 \approx 0.17 \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$  - параметр адиабатичности, который согласно /5/ можно записать в виде:

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{v \cdot \cos \theta}{\omega_H} \sqrt{B''/2B} \quad (1.2)$$

Здесь  $v$  - скорость частицы;  $\theta$  - её угол с силовой линией магнитного поля;  $\omega_H = eB/mc$  - ларморовская частота;  $B$  - магнитное поле, а штрих обозначает дифференцирование вдоль силовой линии. Выражение вычисляется в экваториальной плоскости диполя.

Анализ, проведенный в работе /9/, показывает, что выражение (1.2) справедливо только при малых углах наклона скорости частицы к силовой линии магнитного поля:

$$M = 1/\sin^2 \theta \gg 1 \quad (1.3)$$

В противном случае в (1.2) необходимо ввести поправочный множитель  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/K$ , где

$$K = \frac{3}{4} \sqrt{M-1} \left[ (M+1) \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{M-1}} - \sqrt{M} \right] \quad (1.4)$$

Зависимость  $K(\theta)$  приведена на рис.1.

Обработка результатов численных экспериментов /10/ с помощью параметра (1.2) с поправкой Крушкаль (1.4) приводит к критическому значению параметра неадиабатичности:

$$\left(\frac{\epsilon}{K}\right)_{\text{крит}} \approx 0.15 \quad (1.5)$$

в хорошем согласии с аналитической оценкой (1.1). Последняя заслуживает, таким образом, определенного доверия.

В работе /6/ была предпринята попытка использовать диффузию Арнольда для объяснения обрезания спектра протонов в радиационных поясах Земли со стороны больших энергий. Экспериментальные данные казалось бы согласовались с условием (1.1). К сожалению, при вычислении  $\epsilon$  в /6/ была допущена досадная арифметическая ошибка. Исправленные значения параметра адиабатичности на границе обрезания представлены на рис.2 как функция энергии протонов. Ясно, что нет никаких оснований говорить о неадиабатичности движения протонов вплоть до самых высоких энергий, по крайней мере, поскольку речь идет об основном геофизическом поле Земли, т.е. о поле магнитного диполя, слегка искаженного солнечным ветром /7/. Возможно, конечно, что неадиабатичность развивается на короткопериодических вариациях геомагнитного поля как это было предположено в работе /8/. Ниже мы исследуем другую возможность - насколько аккуратным является выражение для  $\epsilon$  (1.2).

Уже в работе /5/ были отмечены некоторые расхождения между теоретической формулой (1.2) и результатами численных экспериментов. Поэтому мы провели аналогичные эксперименты для поля магнитного диполя при самых различных значениях параметров задачи. Результаты наших экспериментов показывают, что теория /5/ оказывается справедливой даже с большей точностью, чем этого можно было бы ожидать.

Таким образом, роль диффузии Арнольда в основном геофизическом поле Земли оказывается несущественной.

## § 2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Перейдем теперь к описанию численных экспериментов по движению заряженных частиц в поле магнитного диполя. Уравнение движения имеет вид:

$$m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \cdot \vec{B}] \quad (2.1)$$

где

$$\vec{B} = \left( \frac{3mxz}{r^5}, \frac{3myz}{r^5}, \frac{3mz^2 - m^2 r^2}{r^5} \right)$$

$m$  - величина магнитного диполя;  $x, y, z, r$  - декартовы координаты частицы и её радиус-вектор. Во всех расчетах начальные условия задавались в медианной плоскости. Считалось, что ларморовской фазе  $\psi_0 = 0$  соответствует точка  $\vec{r} = (a, 0, 0)$ . Для получения начальных условий с другими ларморовскими фазами, частица прокручивалась в медианной плоскости на угол, равный нужной фазе. Начальная скорость всегда бралась в виде  $\vec{v}_0 = (v_0 \sin \theta, 0, v_0 \cos \theta)$ . Во время движения в аксиальном магнитном поле сохраняются энергия и обобщенный момент частицы. Точность счета контролировалась по их сохранению и была не хуже  $10^{-4}\%$ . При расчете какого-либо варианта в качестве исходных данных задавались:

$$\lambda - \text{параметр}, \quad \lambda = \frac{m_p v_0 c}{e B_0 a}, \quad \text{где } B_0 = -m/a^3$$

$$- \text{поле в точке } \vec{r} = (a, 0, 0). \quad \text{Также } \lambda = (a/s)^2,$$

где  $S$  - 1 штермер /11/ (радиус круговой периодической орбиты в поле диполя).

$\theta$  - угол наклона вектора скорости к силовой линии.

$\psi_0$  - ларморовская фаза в медианной плоскости.

$$\text{Параметр } \lambda \text{ связан с } \epsilon: \quad \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{g \cos \theta} \cdot \epsilon$$

Для этих данных просчитывались траектории "вперед": до отражения частицы от пробки и возвращения её в медианную плоскость и "назад": то же самое с обратным шагом по времени. Величина изменения магнитного момента частицы ( $\mu = v_{\perp}^2/2B$ ) сравнивалась с формулой /5/ с учетом поправки /8/:

$$\Delta \mu = A \cdot \cos \varphi_0 \cdot e^{-k/\varepsilon} \cdot e^{\beta \sin \varphi_0} \quad (2.2)$$

где

$$A = - \left( \frac{\pi e}{4} \right)^{1/2} \left[ \frac{v_{\perp}^2 \rho_1}{B_0} (v^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2) - \frac{v_{\perp} \rho_1''}{B_0''} (v^2 + v_{\perp}^2) \right] \left( \frac{2 B_0}{B_0''} \right)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{1}{3} \cdot \rho_1 \cdot v_{\perp}^2 \left( \frac{2 B_0}{B_0''} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\rho_1''}{\rho_1} \frac{B_0}{B_0''} \right)$$

а  $\varepsilon$  и  $k$  приведены в § 1. Здесь  $B_0$  - поле;  $\rho_1$  - кривизна силовой линии;  $\varphi_0$  - ларморовская фаза частицы;  $\omega_0$  - ларморовская частота вращения. Все величины берутся в медианной плоскости.

При больших наклонах вектора скорости к силовой линии ( $\theta \approx 1 + 1.5$ ), частица совершает колебания вблизи медианной плоскости. На рис.3 приведен график зависимости  $\mu(t)$  для  $\lambda = 1.07$ . Здесь и далее время измеряется в единицах  $\frac{m_p c}{e B_0}$ . Стрелками

указано прохождение частицей медианной плоскости. При больших  $\theta$  квазипериодичность движения становится еще более выраженной. Измерить изменение  $\mu$  между двумя отражениями практически невозможно (имеется ввиду разность между средними вблизи точек отражения значениями  $\mu$ ). Графики на рис.3 дают поведение  $\mu(t)$  для  $\lambda = 0.07$  и  $\lambda = 0.17$ . При этом ларморовские фазы  $\varphi_0$  выбраны такими, когда колебания  $\mu$  около точек отражения минимальны. Для ограниченного движения параметр  $\lambda \leq 1/11$ . Таким образом, рис.3 дает представление о поведении  $\mu(t)$  для  $\theta = 1.07$  в зависимости от  $\lambda$ .

При уменьшении  $\theta$  частица дальше заходит в область сильного поля. Изменения  $\mu$  между отражениями наблюдаются более отчетливо. На рис.4 приведены графики  $\mu(t)$  для  $\theta = 0.57$ ,  $\lambda = 0.13$  для различных ларморовских фаз  $\varphi_0$ . Как это видно из рисунка, для траекторий 2,3,4 колебания  $\mu$  около точек отражения минимальны. Область фаз, соответствующая этим траекториям, использовалась

для исследования зависимости  $\Delta \mu$  от параметра  $\lambda$ . Последняя приведена на рис.5 для  $\theta = 0.57, 0.07$ . Экспериментальные точки зависимости  $\lg \Delta \mu$  от  $1/\lambda$  ложатся на прямую в соответствии с (2.2). Там же проведены прямые, полученные по формулам (2.2). Для случая  $\theta = 0.57$  экспериментальная прямая совпадает с теоретической (2.2) в пределах нескольких процентов. Для  $\theta = 0.07$  согласие также довольно хорошее. В этом случае наклоны прямых отличаются на величину  $\sim 10\%$ . Была также исследована зависимость  $\Delta \mu$  от ларморовской фазы  $\varphi_0$ . Результаты численных экспериментов вместе с кривой (2.2) представлены на рис.6. Как видно из рисунка, формула (2.2) достаточно точно передает поведение  $\Delta \mu$  и  $\beta$  в зависимости от ларморовской фазы. Наблюдается также хорошее согласие в амплитудах кривых.

### § 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные расчеты неадиабатического движения частиц в поле магнитного диполя, проведенные в настоящей работе, показали, что теория /5/ с хорошей точностью дает величину изменения магнитного момента частицы при прохождении её между магнитными пробками. В хорошем согласии с расчетами находятся абсолютное значение  $\Delta \mu$ , поведение  $\Delta \mu$  в зависимости от ларморовской фазы  $\varphi_0$  и, наконец, но, пожалуй, это самое главное, зависимость  $\Delta \mu$  от параметра адиабатичности  $\varepsilon$ . Таким образом, формулу (1.2) для параметра адиабатичности можно считать достаточно аккуратной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М.С.Иоффе, Б.Б.Кадомцев, УФН, 100 (1970) 601.
2. В.И.Арнольд, УМН, 18, в. 6(114) (1963) 91.
3. В.И.Арнольд, ДАН 156, (1964) 9.
4. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности (ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969).
5. R. J. Hastie, G. D. Ho Bbs, J. V. Taylor. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Vol. 1, IAEA, Vienna, 1969, p. 386*
6. Б.В.Чириков, Некоторые оценки времени жизни отдельной частицы в геомагнитной ловушке вследствие слабой неадиабатичности, препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969).
7. Б.А.Тверской, Динамика радиационных поясов Земли, Наука, 1968.
8. В.Д.Плетнев, Изв. АН, геофизика, № 11 (1960) 1671.
9. Е.М.Крушкаль, ЖТФ, 42, № 11 (1972), 2288.
10. A. Garçon et. al. Proc. 2nd Intenl. Conf. Peaceful Uses At. Energy. 31 (1958) 65
11. В.С.Мурзин. Физика космических лучей. Издательство МГУ, 1970.

## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

- Рис.1. Поправочный множитель, Крушкаль /9/ к параметру неадиабатичности (1,2).
- Рис.2. Зависимость параметра неадиабатичности от энергии обрезания космических протонов в магнитном поле Земли.
- Рис.3. Поведение магнитного момента частицы со временем. На всех графиках приводится  $\mu/\mu_0$ , где  $\mu_0 = (v_i)_0/2v_0$ .
- а)  $\lambda = 0,07, \theta = 1,07, \psi_0 = 124^\circ$ ,  
 б)  $\lambda = 0,17, \theta = 1,07, \psi_0 = 114^\circ$ .
- Рис.4. Поведение магнитного момента частицы со временем при различных ларморовских фазах  $\psi_0$ .  $\lambda = 0,13, \theta = 0,57$ .
- а)  $\psi_0 = 263^\circ$ , б)  $\psi_0 = 202^\circ$ , в)  $\psi_0 = 126^\circ$ , г)  $\psi_0 = 70^\circ$ ,  
 д)  $\psi_0 = 0^\circ$
- Рис.5. Зависимость  $\Delta\mu$  от  $1/\lambda$  в полулогарифмическом масштабе.
- а)  $\theta = 0,57, \psi_0 = 180^\circ$ , б)  $\theta = 0,07, \psi_0 = 140^\circ$   
 — наш расчет, --- расчет согласно (2.2).
- Рис.6. Зависимость от ларморовской фазы  $\psi_0$ .  $\theta = 0,57, \lambda = 0,13$   
 — наш расчет, --- расчет согласно (2.2)

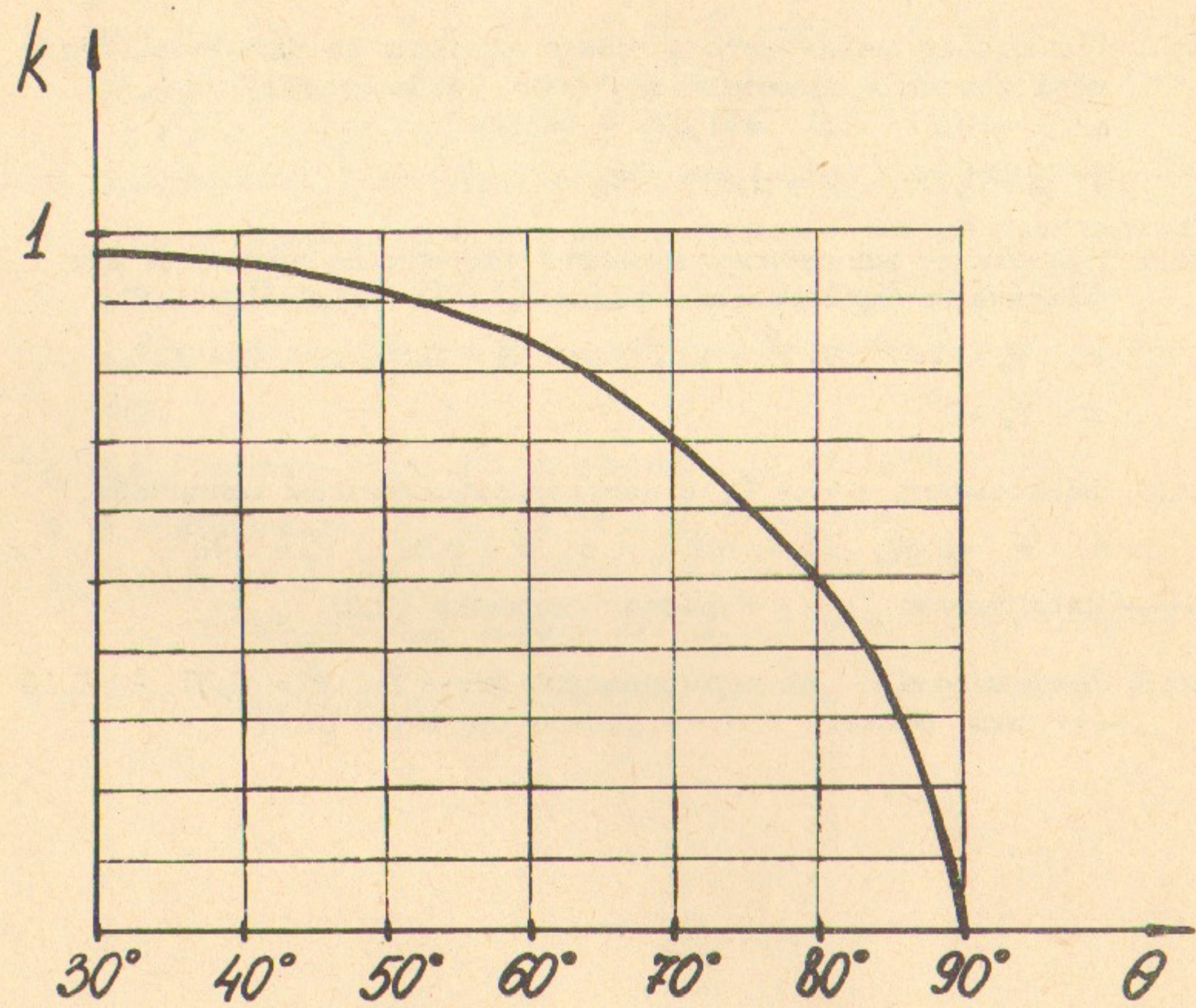


Рис.1.

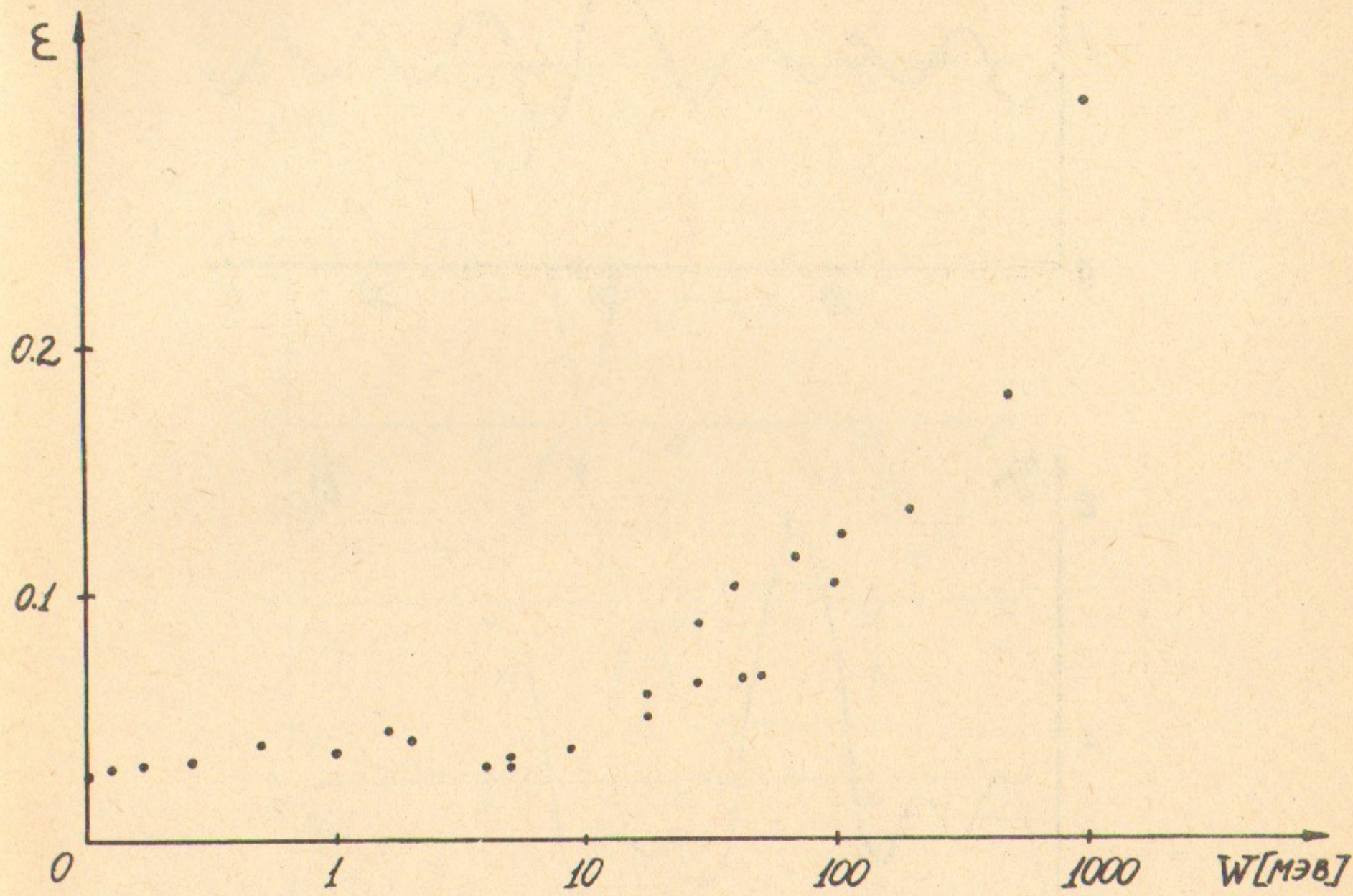


Рис.2

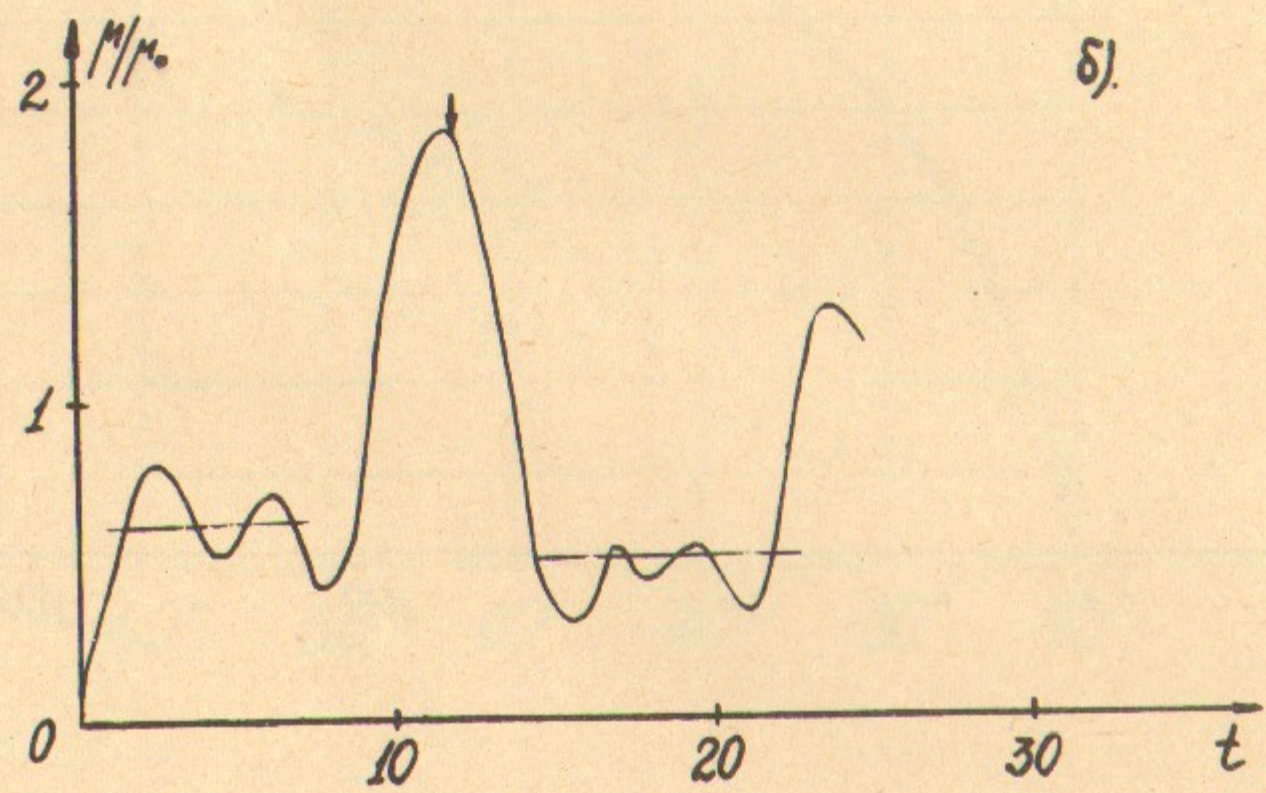
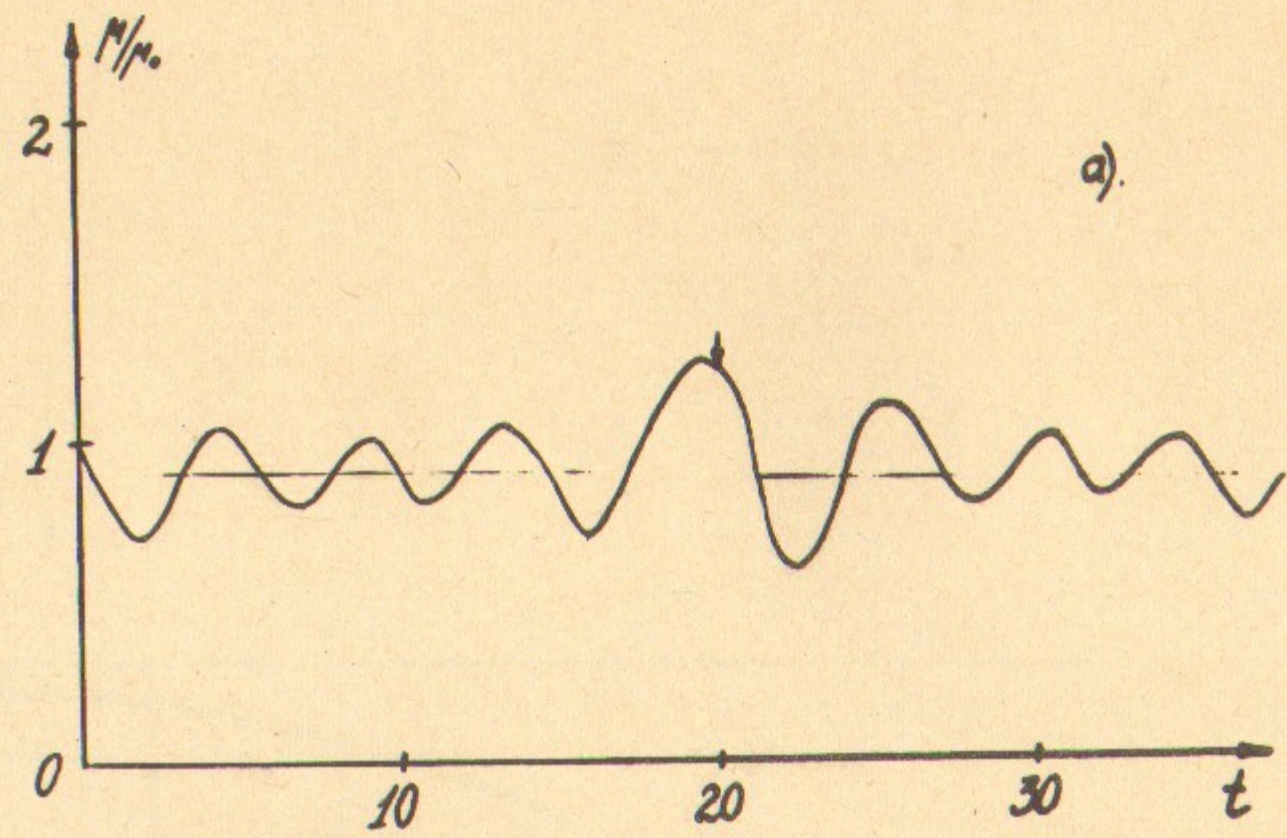


Рис.3

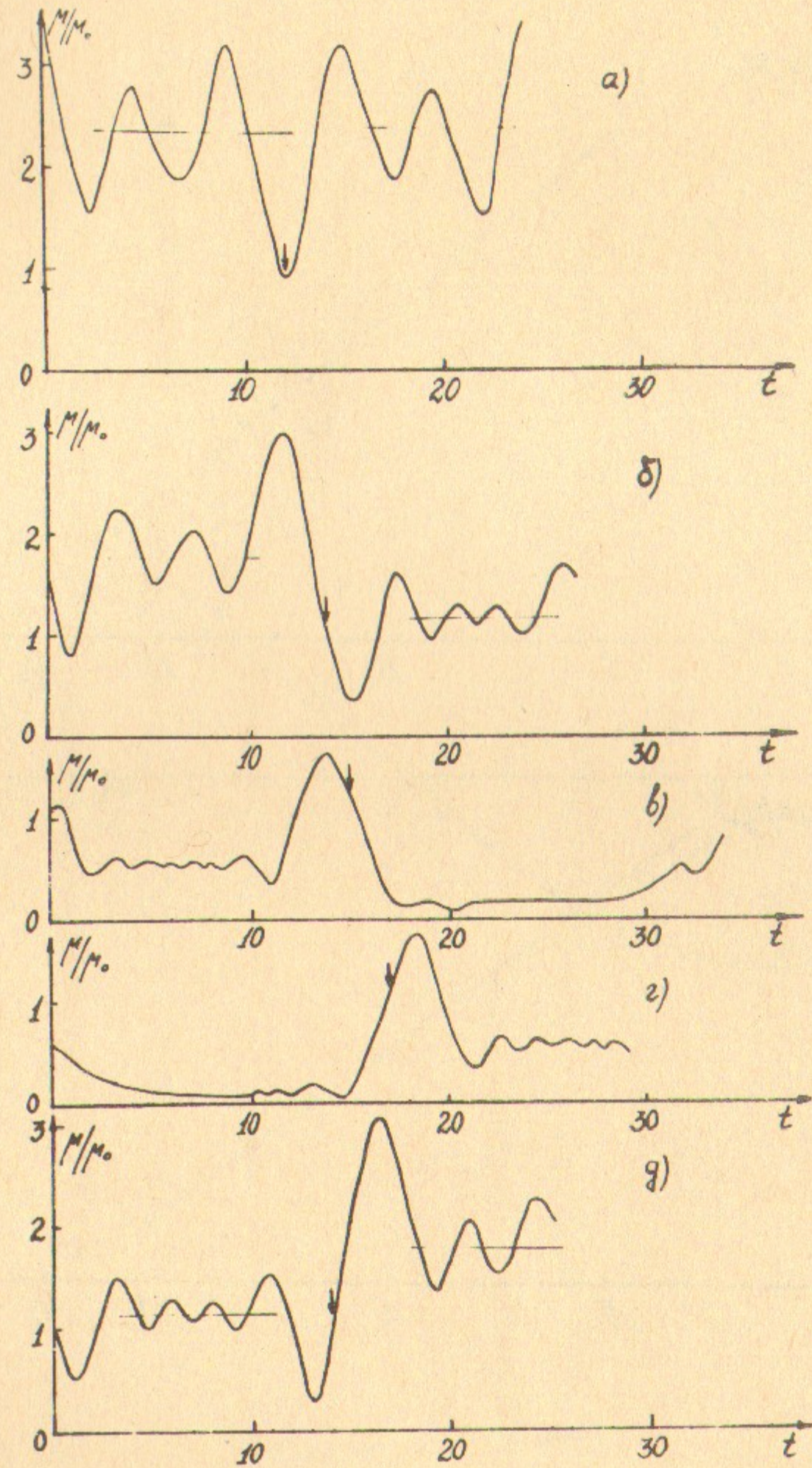


Рис.4



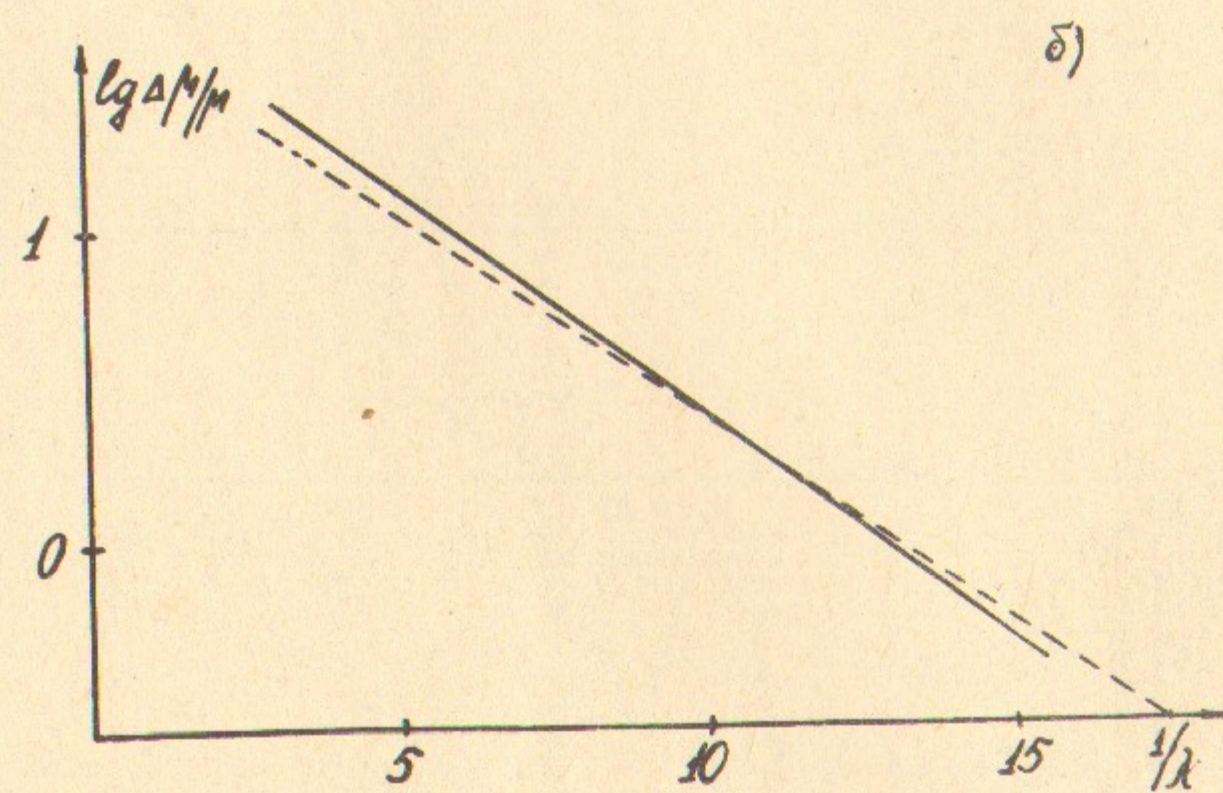
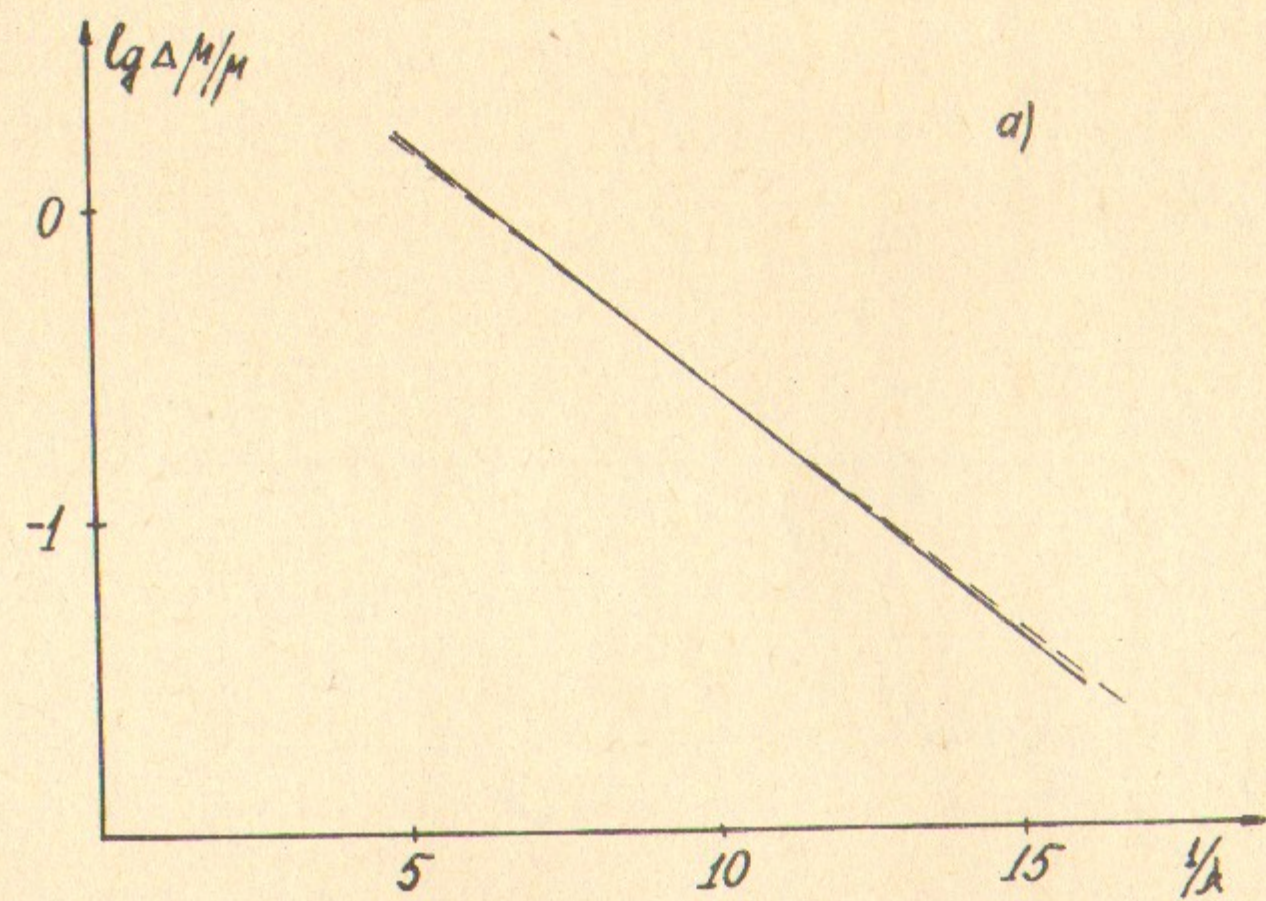


Рис.5

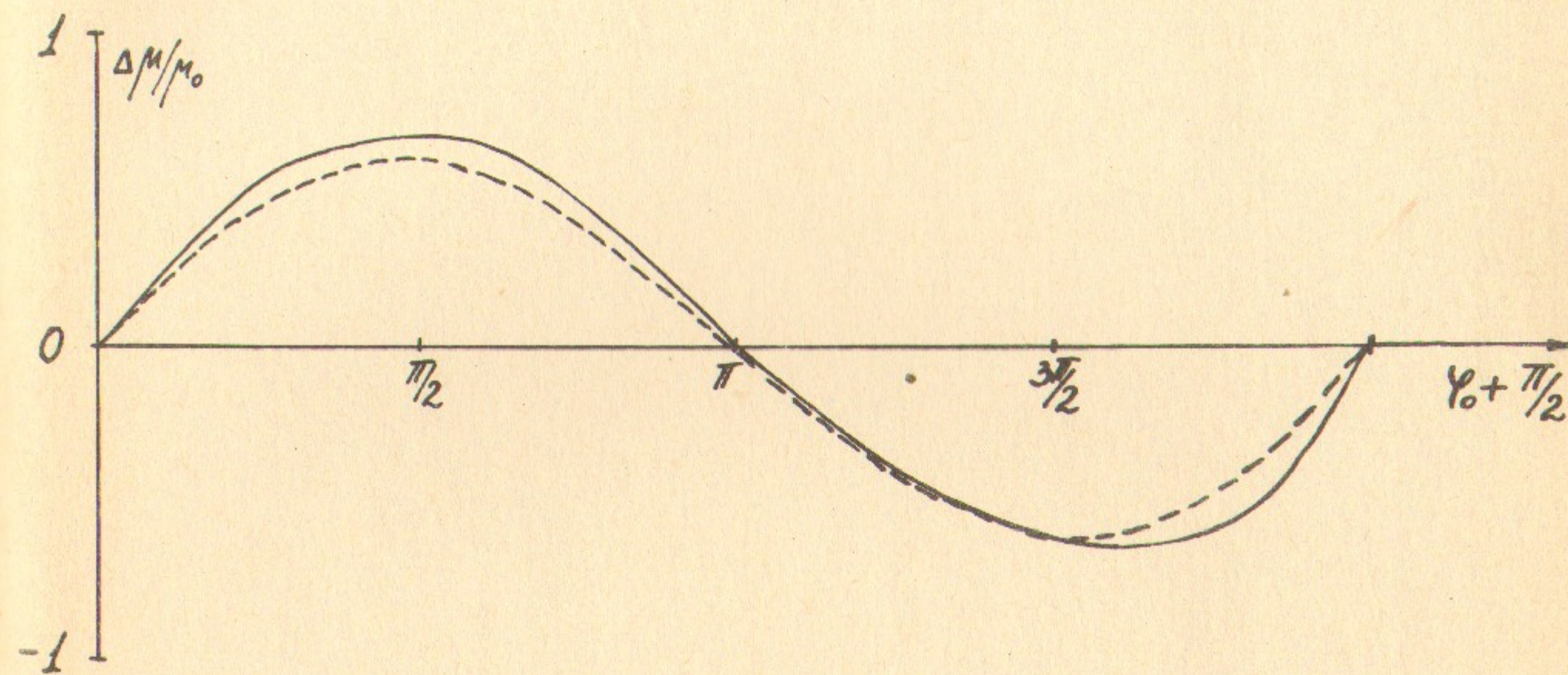


Рис.6

---

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов  
Подписано к печати 16.8.73 г. МН 08830  
Усл. 0,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 74. ПРЕПРИНТ

---

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР.вг