

7

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 72 - 73**

**Г.И.Берман**

**О НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ В НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА "ЗМЕЙКА" ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА**

**Новосибирск**

**1973**

Г.П.Берман

О НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССАХ В НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ТИПА "ЗМЕЙКА" ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуется влияние нелинейности поляризацонной силы на неустойчивость поперечных колебаний электронно-ионного кольца (неустойчивость типа "змейка"). Задача рассматривается на модели жестких пучков электронов и ионов, в которых плотность частиц в поперечном сечении распределена по гауссовскому закону. Найдено явное выражение для поляризацонной силы. Показано, что вблизи нижнего края области неустойчивости нелинейная стабилизация на малых амплитудах невозможна. Приведены оценки максимальных амплитуд, соответствующих различным областям полосы неустойчивости. Исследуется устойчивость колебаний конечной амплитуды. Вдали от области линейных резонансов получено уравнение для медленно-меняющихся амплитуд колебаний и найдены условия возбуждения неустойчивости типа "отрицательного давления". Вблизи нижней границы области неустойчивости получены условия, при которых линейно-устойчивые колебания переходят в неустойчивый режим за счет нелинейности.

## В в е д е н и е

Известно, что в электронно-ионном кольце возможна неустойчивость по отношению к поперечным смещениям центров тяжести электронов относительно ионов без изменения формы поперечного сечения пучков (неустойчивость типа "змейки") /1,2/ .

В линейном приближении эта задача подробно рассмотрена в работе /2/. В частности, показано, что в случае непрерывного спектра волновых чисел всегда существует область неустойчивости. В случае же дискретного спектра неустойчивость возможна лишь при токах пучка, превышающих некоторую критическую величину. Однако экспоненциальный рост амплитуды  $\alpha(t)$ , предсказываемый линейной теорией справедлив только на начальной стадии развития неустойчивости, пока амплитуды колебаний малы; поэтому для оценки максимальных амплитуд необходимо нелинейное рассмотрение.

В приближении малой нелинейности поляризационных сил поперечная неустойчивость рассматривалась в работе /3/. Получено решение в виде нелинейной стационарной волны при отсутствии внешней фокусировки. При наличии внешнего фокусирующего поля найдена амплитуда насыщения колебаний, величина которой оказывается малой по сравнению с характерными размерами пучков.

Однако приближение малой нелинейности справедливо только вблизи границы полосы неустойчивости, где максимальные амплитуды колебаний, пропорциональные  $\gamma$  (инкременту) оказываются малыми. Более того, как будет показано ниже, существуют условия, при которых, несмотря на малость  $\gamma$ , нелинейная стабилизация невозможна. Такое положение имеет место для волновых чисел, близких к

нижнему краю полосы неустойчивости (меньшие  $k$ ), где слабо-нелинейная поляризационная сила приводит к увеличению скорости роста амплитуды относительного смещения электронов и ионов.

Этот результат является следствием приближенного характера рассмотрения задачи: физически ясно, что с ростом величины  $y-x$  ( $x, y$  - смещения электронов и ионов, соответственно) взаимодействие пучков ослабляется, вследствие чего неустойчивость должна стабилизироваться, хотя, возможно, и не при малых амплитудах смещений электронов и ионов. Поэтому, для дальнейшего исследования неустойчивости необходимо во-первых, знание явного вида силы взаимодействия, возникающей при поперечных смещениях пучков. Кроме того, необходимо исследование вопроса об устойчивости без предположения о малой нелинейности. Знание явного вида силы взаимодействия необходимо для оценки максимальной амплитуды колебаний, также и вблизи границ полосы неустойчивости.

В настоящей работе задача о поперечной неустойчивости электронно-ионного кольца рассмотрена на модели жестких пучков, в которых плотность частиц в поперечном сечении распределена по гауссовскому закону. Найдено явное выражение для силы взаимодействия между пучками:  $F(y-x)$ . Исследовано влияние нелинейности на стабилизацию неустойчивостей, соответствующих различным областям полосы неустойчивости. Рассмотрена устойчивость колебаний конечной амплитуды.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим два пучка: электронный и ионный; плотность частиц в поперечном сечении будем считать распределенной по гауссовскому закону:

$$n_{e,i}(\underline{r}_\perp) = n_{e,i}^{(0)} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{\alpha^2}\right); \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  - постоянная, характеризующая радиус пучков. В стационарном состоянии центры тяжести электронного и ионного пучков совмещены  $\Delta_{1,2} = 0$  ( $\Delta_{1,2}$  - смещения электронов и ионов вдоль оси  $Z$ ). Если относительное смещение центров тяжести пучков

$\Delta \equiv \Delta_2 - \Delta_1$  - не равно нулю, то между пучками возникает

ла кулоновского притяжения. В расчете на одну частицу сила этого притяжения равна:

$$F_{1,2}(\Delta_1, \Delta_2) = - \frac{\partial U(\Delta_1, \Delta_2)}{\partial \Delta_{1,2}} / N_{1,2}; \quad (1.2)$$

где  $U(\Delta_1, \Delta_2)$  — энергия взаимодействия пучков:

$$U(\Delta_1, \Delta_2) = \int \frac{dv_1 dv_2 n_1(x_1, y_1, z_1 - \Delta_1) \cdot n_2(x_2, y_2, z_2 - \Delta_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}; \quad (1.3)$$

$$N_{1,2} = \int n_{1,2} \cdot dv_{1,2};$$

Вычисление  $F_{1,2}$  дано в Приложении 1. Мы приведем здесь окончательный результат:

$$F_{1,2}(\Delta_1, \Delta_2) = F(\Delta) = \pm \frac{2\pi e^2 n_{2,1}^{(0)} a^2}{\Delta} \left(1 - e^{-\frac{\Delta^2}{2a^2}}\right); \quad (1.4)$$

$$\Delta \equiv \Delta_2 - \Delta_1;$$

График, характеризующий зависимость силы (1.4) от смещения  $\Delta$  приведен на рис.1.

Запишем теперь систему уравнений для поперечных смещений электронного и ионного пучков с учетом силы  $F_{1,2}$ . Смещения электронов и ионов будем обозначать  $x_{e,i}$ , соответственно. Ограничимся пока случаем слабой нелинейности  $\Delta/a \ll 1$ . Тогда система уравнений для  $x_{e,i}$  принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 x_e + \lambda^2 x_e = \Omega^2 (x_i - x_e) \left[1 - \frac{1}{4a^2} (x_i - x_e)^2\right];$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = -\omega_0^2 (x_i - x_e) \left[1 - \frac{1}{4a^2} (x_i - x_e)^2\right]; \quad (1.5)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{\pi e^2 n_i^{(0)}}{m_e \gamma}, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi e^2 n_e^{(0)}}{M_i}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2};$$

$\lambda$  - частота колебаний электронов во внешнем фокусирующем поле;  $v$  - скорость электронного пучка.

В дальнейшем будем измерять все времена в единицах  $\omega_0$  ( $\omega_0 = 1$ ) и произведем в (1.5) замену:

$$\frac{x_e}{a} = x; \quad \frac{x_i}{a} = y; \quad \delta = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}; \quad (1.6)$$

При малой нелинейности ( $x, y \ll 1$ ) можно считать амплитуды колебаний медленно меняющимися в пространстве и во времени и отделить быстрое движение, связанное с распространением колебаний от медленного движения, связанного с изменением амплитуд этих колебаний. Приближение малой нелинейности справедливо вблизи края полосы неустойчивости, где максимальные амплитуды пропорциональны инкременту. В этом случае для отыскания решения системы (1.5) воспользуемся методом "растяжения", развитым в работах /4-8/.

Введем переменные

$$\tau = \epsilon t; \quad \zeta = \epsilon^2 z; \quad \epsilon \ll 1; \quad (1.7)$$

и, пользуясь малостью  $x, y$  будем искать решение системы (1.5) в виде ряда по степеням параметра  $\epsilon$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \epsilon^{\alpha} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} x_e^{(\alpha)}(\zeta, \tau) \\ y_e^{(\alpha)}(\zeta, \tau) \end{pmatrix} e^{i\ell(kz - \omega_{\alpha}t)}; \quad (1.8)$$

Здесь  $k$  и  $\omega_k$  - волновой вектор и частота колебания. Используя (1.7), (1.8), запишем систему (1.5) в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \epsilon^{\alpha} \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2v \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \right) + v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \lambda^2 + \delta \right] X_e^{(\alpha)} - \\ & \left. - \delta y_e^{(\alpha)} \right\} e^{i\ell(kz - \omega_{\alpha}t)} = -\frac{\delta}{4} \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=1 \\ \ell_1, \ell_2, \ell_3=-\infty}}^{\infty, \infty} \epsilon^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} (y_{e_1}^{(\alpha_1)} - x_{e_1}^{(\alpha_1)}) (y_{e_2}^{(\alpha_2)} - x_{e_2}^{(\alpha_2)}) (y_{e_3}^{(\alpha_3)} - x_{e_3}^{(\alpha_3)}) \\ & \cdot e^{i(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(kz - \omega_{\alpha}t)}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{e=-\infty}^{\infty} \epsilon^{\alpha} \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1 \right] y_e^{(\alpha)} - \right. \\ \left. - x_e^{(\alpha)} \right\} e^{i\ell(kz - \omega_k t)} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{d_1, d_2, d_3=1 \\ e_1, e_2, e_3=-\infty}}^{\infty, \infty} (y_{e_1}^{(d_1)} - x_{e_1}^{(d_1)}) \epsilon^{d_1+d_2+d_3} \quad (1.10)$$

$$\cdot (y_{e_2}^{(d_2)} - x_{e_2}^{(d_2)}) (y_{e_3}^{(d_3)} - x_{e_3}^{(d_3)}) \cdot e^{i(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)(kz - \omega_k t)} ;$$

В первом порядке по  $\epsilon$  имеем из (1.9), (1.10):

$$\begin{pmatrix} \delta + \lambda^2 - \epsilon^2(\omega_k - k\nu)^2 & -\delta \\ -1 & (1 - \epsilon^2\omega_k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e^{(1)} \\ y_e^{(1)} \end{pmatrix} = 0; \quad (1.11)$$

Полагая в (1.11)  $\epsilon = \pm 1$  и требуя  $x_e^{(1)} \neq 0$ ;  $y_e^{(1)} \neq 0$ , получим дисперсионное уравнение линейной теории:  $\det \hat{W}^{(\pm 1)} = 0$ , где  $\hat{W}^{(\epsilon)}$  - матрица в выражении (1.11). Так как  $\det \hat{W}^{(\epsilon)} \neq 0$ , для  $\epsilon \neq \pm 1$ , то отсюда следует:  $x_e^{(1)} = y_e^{(1)} = 0$  для  $\epsilon \neq \pm 1$ . Запишем дисперсионное уравнение в явном виде:

$$[\delta + \lambda^2 - (\omega - k\nu)^2] = \delta/\alpha ;$$

или (см./2/)

(1.12)

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - k\nu)^2 - \lambda^2} = 1 ;$$

$$\alpha \equiv 1 - \omega^2 ; \quad \omega \equiv \omega_k ;$$

Сделаем несколько замечаний относительно свойств дисперсионного уравнения (1.12). На рис. 2 представлена зависимость  $k = k(\omega)$ . Точками А и В отмечены границы области неустойчивости  $(\partial F / \partial \omega) = 0$ : А - верхняя граница, В - нижняя. Величины, относящиеся к точкам А и В мы будем в дальнейшем обозначать знаками + и - внизу, соответственно. Рассмотрим область частот  $\omega > 0$ . Вертикаль  $\omega = 1$  соответствует ионной частоте колебаний. Асимптоты  $\omega_1 = k v \pm \sqrt{\delta + \lambda^2}$  и  $\omega_2 = k v \pm \lambda$  соответствуют колебаниям электронного пучка относительно ионного фона и колебаниям электронного пучка во внешнем фокусирующем поле. Из рис. 2 видно, что неустойчивые  $k$  лежат в области волновых чисел:  $k_- < k < k_+$ . Причем точка А ( $k_+$ ) соответствует резонансу электронно-ионных колебаний, а точка В ( $k_-$ ) - резонансу на частотах доплеровских колебаний электронов в магнитном поле. Появление этих новых частот связано с тем, что во внешнем фокусирующем поле электроны стали осцилляторами с частотой колебаний  $\lambda$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  область устойчивых  $k < k_-$  исчезает, точка  $\bar{\omega} \rightarrow 0$ .

Введем обозначение:  $y_i^{(1)} \equiv \phi(\zeta, \tau)$ . Тогда из (1.11) находим  $\chi_i = \alpha \psi(\zeta, \tau)$ . В дальнейшем мы получим уравнение для функции  $\phi(\zeta, \tau)$  вблизи границы области устойчивости (А, В), где:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0 ; \quad (1.13)$$

Будем характеризовать точки А и В на плоскости  $(k, \omega)$  некоторыми величинами  $k_{\pm}$ ,  $\omega_{\pm}$ , соответственно, которые определяют граничную скорость электронного пучка  $v_{0\pm}$ . Введем параметр  $\mu$ :

$$\mu = \frac{v_0 - v}{v_0} ; \quad |\mu| \ll 1 ; \quad (1.14)$$

где  $v_0$  - скорость электронного пучка на одной из границ области устойчивости. Меняя знак  $\mu$ , мы сдвигаемся с границы (А или В) либо в область линейной устойчивости, либо в область линейной неустойчивости. Вблизи границы области устойчивости можно считать  $|\mu| \sim \epsilon^2$ . Связь параметра  $\mu$  со сдвигом волнового числа  $\delta k = k - k_{\pm}$  будет видна из уравнения для  $\phi$ . Отметим, что из (1.12), (1.13) сле-



дует:

$$1 - \frac{(k v_0)_\pm}{\omega_\pm} = - \frac{\delta}{\alpha^2_\pm}; \quad (1.15)$$

Соотношение (1.15) справедливо только в точках А и В. В порядке  $\epsilon^2$  получаем из (1.9), (1.10):

$$\begin{aligned} X_1^{(2)} - \alpha y_1^{(2)} &= \frac{2i\alpha}{\delta} (\omega - k v_0) \frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial \tau}; \\ X_1^{(2)} - \alpha y_1^{(2)} &= -2i \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Учитывая выражение (1.15) и связь  $y_1^{(1)} = \alpha x_1^{(1)} = \phi$  получаем из (1.16):

$$X_1^{(2)} - \alpha y_1^{(2)} = -2i\omega \frac{\partial \phi}{\partial \tau}; \quad (1.16)$$

Считая  $\mu_3 \sim \epsilon^2$  и подставляя (1.14) в (1.9), (1.10), для величин порядка  $\epsilon^3$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\alpha} X_1^{(3)} + \frac{2i\omega}{\alpha^2} \frac{\partial X_1^{(2)}}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{\mu}{|\mu|} \frac{2\alpha v_0 \omega k \delta}{\alpha^2} \phi + \\ + \frac{2i v_0 \omega \delta}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \delta y_1^{(3)} = -\frac{3}{2} \delta (1-\alpha)^3 |\phi|^2 \phi; \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\delta y_1^{(3)} - i \frac{2\delta}{\alpha} \omega \frac{\partial y_1^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{\delta}{\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{\delta}{\alpha} X_1^{(3)} = \frac{3}{2} (1-\alpha)^3 |\phi|^2 \phi; \quad (1.18)$$

Складывая (1.17) и (1.18) и учитывая (1.16), получаем окончательное уравнение для функции  $\phi(z, \tau)$ :

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - (v|\phi|^2 + c) \phi; \quad (1.18)$$

где 
$$q = - \frac{\left( \frac{4\omega^2\delta}{\alpha} + \frac{\alpha^2 k v_0}{\omega} \right)}{2 v_0 \omega \delta}; \quad c = \frac{\mu}{|\mu|} k; \quad (1.19)$$

$$b = - \frac{3}{4 v_0 \omega} (1 - \alpha)^4;$$

При исследовании нелинейной стадии развития колебаний вблизи верхнего (нижнего) края полосы неустойчивости, коэффициенты  $q, b$  и  $c$  в (1.19) вычисляются в точке А(В). Величины  $q, b$  и  $c$  вычислены в Приложении 2.

Заметим, что смещение с границ А или В можно осуществить не сдвигом скорости пучка от равновесного значения  $v_0$  на границе (см. (1.14)) (при этом  $k_{\pm}$  берутся на границе), а непосредственным сдвигом волнового числа  $k = k_{\pm} + \delta k$  (при этом скорость пучка полагаем равной  $v_0$  - на границе). Действительно, из уравнения (1.18) видно, что линейный член в скобках может быть получен без представления скорости электронов по формуле (1.14), а с помощью формальной замены:

$$\varphi = \bar{\varphi} e^{-i \frac{\mu}{|\mu|} k \zeta} = \bar{\varphi} e^{-i \frac{\mu}{|\mu|} \epsilon^2 k z}; \quad (1.20)$$

Таким образом смещение с границы области устойчивости по  $k$  дается величиной  $\delta k \sim \frac{\mu}{|\mu|} \epsilon^2 k_{\pm}$ .

В зависимости от выбора знака  $\mu$  мы имеем в линейном приближении:

$$\text{Sign } \mu = \begin{cases} +, & \text{неустойчивость вблизи точки А,} \\ & \text{устойчивость вблизи точки В.} \\ - , & \text{устойчивость вблизи точки А,} \\ & \text{неустойчивость вблизи точки В.} \end{cases}$$

## § 2. Развитие колебаний во времени

Рассмотрим влияние нелинейности на развитие колебаний во времени вблизи границ области устойчивости. Воспользуемся методом работы [5]. Решение уравнения (1.18) ищем в виде:

$$\varphi(\zeta, \tau) = A(\tau) \cdot \exp(-i \psi(\tau)); \quad (2.1)$$

После отделения вещественной и мнимой частей в (1.18) получаем систему уравнений для функций  $A$  и  $\psi$  :

$$\frac{d^2 A}{d\tau^2} - A \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = \frac{b}{2} A^3 + \frac{c}{2} A ; \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( A \frac{d\psi}{d\tau} \right) + \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \frac{dA}{d\tau} = 0 ;$$

Систему уравнений (2.2) можно записать в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \right) = \frac{\partial L}{\partial A} ; \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi} ; \quad (2.3)$$

где

$$L = \frac{1}{2} (\dot{A}^2 + A^2 \dot{\psi}^2) + \frac{b}{42} A^4 + \frac{c}{22} A^2 ; \quad (2.4)$$

Из второго уравнения в (2.2) получаем закон сохранения "момента":

$$A^2 \frac{d\psi}{d\tau} = M = const. ; \quad (2.5)$$

Таким образом, развитие колебаний во времени может быть интерпретировано как движение "частицы" единичной массы в аксиально-симметричном по фазе  $\psi$  потенциале:

$$V(A) = - \frac{M^2}{A^2} - \frac{b}{42} A^4 - \frac{c}{22} A^2 ; \quad (2.6)$$

Для колебаний с  $M \neq 0$  потенциал (2.6) дает глубокую "яму" в начале координат на плоскости  $(A, V(A))$ , поэтому такие колебания устойчивы. Необходимо рассмотреть колебания с  $M=0$ . Соответствующий класс начальных условий специально оговорен в дальнейшем.

Полная энергия "эквивалентной" частицы имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \dot{A}^2 - \frac{c}{22} A^2 - \frac{b}{42} A^4 ; \quad (2.7)$$

Рассмотрим два случая: "узкой" полосы неустойчивости  $\sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \ll 1$ ,  $\lambda \gg 1$ , ( $\lambda \sim 1$ ) - случай  $1_+$  и "широкой" полосы неустойчивости

( $\lambda^2 / \delta^2 / 3 \ll 1$ ) - случай  $\Pi_+$ .

Случай  $1_+$  и  $\Pi_+$  соответствуют развитию колебаний вблизи точки А, потенциал и фазовые кривые изображены на рис. 3а. Случай  $1_-$  и  $\Pi_-$  соответствуют развитию колебаний вблизи точки В (см. рис. 3б). Решение уравнения (2.7) для случаев  $1_+$  и  $\Pi_+$  имеет вид: для  $V_0 \leq H \leq 0$  (траектория 1 на рис. 3а).

$$A(\tau) = \sqrt{1 + \theta_1} A_0 \operatorname{dn} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{c}{q} \right| (1 + \theta_1)} \tau, \sqrt{\frac{2\theta_1}{1 + \theta_1}} \right];$$

$$\theta_1 = \sqrt{1 - \left| \frac{H}{V_0} \right|}; \quad V_0 = -\frac{c^2}{4|q|b|} \quad \text{— глубина потенциальной ямы}$$

$$A_0 = \sqrt{|c|/|b|}; \quad (2.7)$$

для  $H \geq 0$  (траектория 2 на рис. 3а)

$$A(\tau) = A_1 \operatorname{cn} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{b}{q} \right| (A_1^2 + A_2^2)} \tau, \theta_2 \right];$$

$$A_{1,2} = A_0 \sqrt{\left| 1 + \frac{H}{|V_0|} \right| \pm 1}; \quad \theta_2 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}};$$

Таким образом мы получаем стабилизацию линейно-неустойчивых колебаний вблизи верхнего края полосы неустойчивости за счет нелинейности поляризационной силы. При этом максимальное значение амплитуды оказывается равным:

$$A_{\max.} = \sqrt{2|c|/|b|}; \quad (2.8)$$

Учитывая, что инкремент линейной теории  $\gamma$  связан с параметром  $\epsilon$  соотношением (см. уравнение (1.18)):  $\gamma = \epsilon \sqrt{|c|/|q|}$ , получаем вы-

ражения для  $A_{max} \cdot A_{max} = \frac{\gamma}{\epsilon} \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Вычисления дают: для случая 1+ (узкая полоса неустойчивости):

$$A_{max} \approx 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma}{\epsilon \sqrt{\delta}} ; \quad \delta = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \ll 1 ; \quad (2.9)$$

для случая П+ (широкая полоса неустойчивости):

$$A_{max} \approx \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{1}{\delta^{2/3}} ; \quad \delta \gg 1 ; \quad (2.10)$$

Учитывая, что  $(y-x)_{max} \approx \epsilon (1-d) \phi + k.c. \approx 2 \epsilon (1-d) A_{max}$ , находим окончательно выражения для максимальных амплитуд:

$$1+ \quad (y-x)_{max} \approx 4 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma}{\sqrt{\delta}} ; \quad \delta \ll 1 ; \quad (2.9')$$

$$П+ \quad (y-x)_{max} \approx \frac{2\gamma}{\delta^{2/3}} ; \quad \delta \gg 1 ; \quad (2.10)$$

В случае 1+  $\gamma_{max} = \frac{1}{2} \epsilon$  (см. Приложение 2), поэтому вблизи точки А заведомо выполняется условие:  $(y-x)_{max} \ll 1$ . Таким образом вблизи верхнего края полосы неустойчивости нелинейность стабилизирует неустойчивость на малых амплитудах, пропорциональных величине инкремента  $\gamma$ . Заметим, что подстановка параметров для верхнего края полосы неустойчивости в случае 1+ дает для амплитуды насыщения, найденной другим методом в работе [3] выражение, совпадающее с (2.9') с точностью до численного множителя порядка единицы.

Рассмотрим теперь влияние нелинейности поляризационной силы на стабилизацию неустойчивости вблизи нижнего края полосы (точка В). В этой области волновых чисел нелинейность не только не стабилизирует неустойчивость, а наоборот, усиливает её. Действительно, при этих условиях для  $\mu < 0$  ( $k \geq k_-$ , вблизи точки В на рис. 2), величина  $\nu - \nu_- > 0$ , т.е. нелинейный член в потенциале (2.7) имеет отрицательный знак (см. рис. 3б, пунктирная линия).

Отсюда следует, что вблизи нижнего края полосы неустойчивости отсутствует стабилизация нелинейностью на малых ампли-

тудах и приближение малой нелинейности ( $x, y \ll 1$ ), которое использовалось нами, здесь не применимо.

Рассмотрим теперь поведение колебаний вдали от границы полосы неустойчивости для  $k: k_- < k < k_+$ . Представим  $\omega = \omega_0 + i\gamma$  и будем искать решение системы (1.5) в виде ряда:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \epsilon=1}}^{\infty, \infty} \epsilon^\alpha \begin{pmatrix} x_e^{(\alpha)} \\ y_e^{(\alpha)} \end{pmatrix} e^{i\ell(kz - \omega t)} + \text{K.C.} \quad (2.11)$$

Вдали от границы А существует область волновых чисел, для которых стабилизация наступает при  $A_{\text{max}} \sim \sqrt{\gamma}$ . С другой стороны вблизи границы  $A_{\text{max}} \sim \gamma$ . Мы учтем это, введя медленное время (по-прежнему считаем  $\gamma \ll 1$ ) по формуле:  $\tau = \epsilon^2 t$ . В порядке  $\epsilon^2$  мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -2i(\omega - kv) \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\delta}{\alpha} x_1^{(2)} - \delta y_1^{(2)} &= -\frac{3}{2} |y_1^{(1)}|^2 y_1^{(1)} e^{2\gamma \tau} / |1-\alpha|^2 (1-\alpha); \\ -2i\omega \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha y_1^{(2)} - x_1^{(2)} &= \frac{3}{2} |y_1^{(1)}|^2 y_1^{(1)} e^{2\gamma \tau} \cdot \\ &\cdot |1-\alpha|^2 (1-\alpha); \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\alpha \equiv 1 - \omega^2; \quad (\text{Im } \alpha \neq 0);$$

Умножим первое уравнение в (2.12) на величину  $\frac{\alpha}{\delta}$  и сложим со вторым. Учитывая, что из приближения  $\epsilon^1$  следует:  $\phi = y_1^{(1)} = \alpha x_1^{(1)}$ , получаем из (2.12):

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{3i\delta |1-\alpha|^2 (1-\alpha)^2 e^{\frac{2\gamma \tau}{\epsilon^2}} |\phi|^2 \phi}{4[\alpha^2(\omega - kv) + \delta\omega]}; \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) справедливо вплоть до границ полосы неустойчивости, где выражение, стоящее в квадратных скобках оказывается пропорциональным  $\gamma$  и обращается в нуль (см. формулу 2.15). Обозначим через  $\Lambda$  величину:

$$\Lambda = \frac{(1-\alpha)^2}{[\alpha^2(\omega - kv) + \delta\omega]}; \quad (2.14)$$

Будем искать решение (2.13) в виде:

$$\Phi(\tau) = A(\tau) \exp(-i\psi(\tau));$$

Отделяя вещественную часть в (2.13), получаем уравнение для  $A(\tau)$ :

$$\frac{dA}{d\tau} = - \frac{3\delta/|1-\alpha|^2 \Lambda_{im}}{4} e^{\frac{2\gamma\tau}{\epsilon^2}} A^3; \quad (2.15)$$

где  $\Lambda_{im} \equiv \text{Im } \Lambda$ ;

Интегрируя (2.15) с начальным условием  $A(0) = A_0$ , получаем:

$$A(\tau) = \frac{A_0}{\left[ 1 + \epsilon^2 \frac{3\delta/|1-\alpha|^2 \Lambda_{im} A_0^2}{2\gamma} \left( e^{\frac{2\gamma\tau}{\epsilon^2}} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (2.16)$$

Таким образом, амплитуда насыщения дается выражением:

$$A_{нас.} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{2\gamma}{3\delta/|1-\alpha|^2 \Lambda_{im}}} ; \quad (2.17)$$

Оценка  $\Lambda_{im}$  вблизи точки  $A$  для случаев  $I+$  и  $\bar{I}+$  дает:

$$\begin{aligned} \Lambda_{im.}(I+) &= \frac{\epsilon}{\gamma\delta} ; \\ \Lambda_{im.}(\bar{I}+) &\approx \frac{1}{\gamma\delta^{2/3}} ; \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для амплитуд насыщения получаем, соответственно:

$$A_{нас.}(I+) = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon}} ; \quad \epsilon = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \ll 1; \quad (2.19)$$

$$A_{нас.}(\bar{I}+) \approx \frac{1}{\epsilon} \frac{\gamma}{\delta^{2/3}} ; \quad \delta \gg 1; \quad (2.19')$$

Выражения (2.19), (2.19') совпадают по порядку величины с выражениями (2.9), (2.10), соответственно. В средней части полосы неустойчивости для случая  $1+$  (выбираем  $\gamma = \gamma_{max} = \frac{1}{2} \xi$ ) получаем:  $\Lambda_{im} \approx \gamma/\delta$ , так что для  $A_{нас}$  находим из (2.17):  $A_{нас} \approx 1/\epsilon$ . Для величины  $(y-x)_{нас}$  получаем величину порядка единицы. Это означает, что в средней части полосы неустойчивости ( $I_+$ ;  $\gamma = \gamma_{max}$ ), также неприменимо приближение малой нелинейности. Таким образом, всю область неустойчивости можно разбить на части (начиная от верхней границы):

$$\begin{aligned} 1) \quad & \gamma < \epsilon A < \sqrt{\gamma}; \\ 2) \quad & \sqrt{\gamma} < \epsilon A < 1; \\ 3) \quad & \epsilon A > 1; \end{aligned} \tag{2.20}$$

Волновой вектор, соответствующий  $\epsilon A = \sqrt{\gamma}$  находится из решения уравнения: (точка  $\rho = \rho_0$ , см. Приложение 2)

$$\Lambda_{im}(\rho_0) = \frac{2}{3\delta |1 - \alpha(\rho_0)|^2}; \tag{2.21}$$

Для волновых чисел, соответствующих значениям  $\rho$ :  $\rho_0 < \rho < 1$ , стабилизация нелинейностью происходит на малых амплитудах. Для  $\rho > \rho_0$  мы получаем амплитуды  $\epsilon A \approx 1$ . Вблизи нижнего края полосы неустойчивости отсутствует стабилизация нелинейностью на малых амплитудах. Формально это следует из того факта, что величина  $\Lambda_{im}$  в выражении (2.16) вблизи точки  $\rho_0$  оказывается отрицательной (например, в случае  $I_+$ :  $\Lambda_{im} = -\frac{\xi}{2\delta}$ ). Для исследования области  $\rho > \rho_0$  необходимо решать задачу с поляризационной силой (1.4) без предположения о малости нелинейности.

Мы рассмотрим случай, когда относительное смещение  $\Delta \gg Q$  — радиуса пучка (это имеет место только в ограниченном интервале времени). Тогда в выражении (1.4) экспонентой можно пренебречь и мы получаем  $F(\Delta) \sim 1/\Delta$ . Но тогда система уравнений для смещений дает устойчивое решение.



Действительно, имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 x + \lambda^2 x = \frac{2\delta}{y-x}; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{2}{y-x};$$

Приближенным решением системы (2.22) является:

$$x \sim \exp(kz - \omega_k t); \quad y \approx 0;$$

где  $\omega_k = kv \pm \lambda;$

Таким образом, существует область амплитуд порядка радиуса пучка, при которых развитие неустойчивости прекращается.

Отметим, что система (1.5) с поляризационной силой (1.4) имеет решение в случае отсутствия внешней фокусировки ( $\lambda = 0$ ) в виде нелинейной стационарной волны, где все величины являются функцией одной переменной  $\xi = kz - \omega t$ . Действительно в этом случае получаем для безразмерного смещения  $\Delta = (x_i - x_e)/a$  уравнение:

$$\frac{d^2 \Delta}{d\xi^2} = -\frac{P}{\Delta} (1 - e^{-\Delta^2}); \quad (2.23)$$

где

$$P = \frac{\Omega^2}{(\omega - kv)^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} > 0;$$

Проинтегрируем уравнение (2.23)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta}{d\xi}\right)^2 = H - U(\Delta); \quad (2.24)$$

где

$$U(\Delta) = P \int_0^{\Delta} \frac{(1 - e^{-\Delta'^2})}{\Delta'} d\Delta'; \quad (2.25)$$

потенциал эквивалентной частицы.

Можно показать, что в потенциале (2.25)  $\Delta_{\max}$  конечно для любых конечных значений полной энергии  $H_B$  (2.24).

Сделаем несколько замечаний относительно начальных условий, для которых  $M$  (момент эквивалентной частицы) равен нулю. Начальная задача для уравнения типа (1.18) исследовалась в работе /6/. Оказывается, что вклад в поведение колебания на нелинейной стадии развития вносят как растущее, так и затухающее решения. Можно показать, что необходимым и достаточным условием  $M = 0$  является:  $\int_{\tau} (\varphi_+(0) - \varphi_-(0)) = 0$ ; где  $\varphi_{\pm}(0)$  соответственно растущее и затухающее решения уравнения (1.18) при  $\tau = 0$ . Например, при одинаковых начальных амплитудах последнее условие дает для начальных фаз:  $\psi_+ = \psi_- + 2\pi n$  ( $n$  — целое) и на начальной стадии амплитуда колебания будет нарастать.

### § 3. Устойчивость колебаний конечной амплитуды

Мы рассмотрим здесь устойчивость колебаний конечной амплитуды вблизи нижней границы полосы неустойчивости ( $k_-$ ), в случае, когда в линейном приближении имеет место устойчивость. Будут получены условия, при которых линейно устойчивые колебания переходят в неустойчивый режим за счет нелинейности. Кроме того, вдали от линейных резонансов будет получено уравнение для медленно-меняющихся амплитуд и найдены условия возбуждения неустойчивости типа "отрицательного давления".

На рис. 4 приведен вид потенциальной кривой (2.6) для случая, когда колебания линейно устойчивы, но нелинейность срывает устойчивость при конечных амплитудах ( $\mu > 0$  вблизи точки В). Решение уравнения (2.7) имеет в этом случае вид:

$$A(\tau) = A_0 \sqrt{1 - \theta^2} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{c}{q} \right| (1 + \theta_1)} \tau, \sqrt{\frac{1 - \theta_1}{1 + \theta_1}} \right] \quad (3.1)$$

Оценки величины максимальной амплитуды  $(y - x)_{\max}$ , соответствующей величине  $A_0$  в случае  $1_+$  дает:

$$(y - x)_{\max} \approx \mu \sqrt{\frac{1 + \lambda}{3}}; \quad (3.2)$$

Величина  $\epsilon$  соответствует здесь смещению по  $k$  с нижней границы области неустойчивости в сторону малых  $k$ , в область линейной устойчивости ( $|m| \sim \epsilon^2$ ):  $\delta k = k_- - k = \epsilon^2 k_-$ . Поэтому, задавая малые значения величины  $\epsilon$  в (3.2), мы получаем малые критические амплитуды, при которых происходит срыв устойчивости колебаний конечной амплитуды вблизи нижней границы области неустойчивости.

Приведем здесь частное решение уравнения (1.18) солитонного типа:

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{\sqrt{-2\eta_1}}{b} e^{i(4\eta_1^2 - \eta_1 + c)\xi + \frac{2i\eta_2 \tau}{\sqrt{q}} + i\varphi} \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\eta_1}{q}} (\tau - \tilde{\tau}_0) + \gamma \eta_2 \sqrt{\eta_1} \xi \right], \quad (3.3)$$

где  $\eta_1, \eta_2, \varphi, \tilde{\tau}_0$  — произвольные постоянные  $q, b > 0$ . Рассмотрим теперь область волновых чисел вдали от линейных резонансов:  $k > k_+$ . Введем медленные переменные:

$$\begin{aligned} \xi &= \epsilon(z - ct); & c &= \partial\omega / \partial k; \\ \tau &= \epsilon^2 t; & \epsilon &<< 1; \end{aligned} \quad (3.4)$$

и будем искать решение уравнения (1.18) в виде (1.8). В первом порядке по  $\epsilon$  получаем выражение (1.11). Учитывая, что

$$c = \frac{v}{1 + \frac{\delta\omega}{\alpha^2(\omega - kv)}}; \quad (3.5)$$

получаем в порядке  $\epsilon^2$ :

$$X^{(2)} - \alpha Y^{(2)} = 2i c \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \quad (3.6)$$

С учетом (3.5), (3.6) получаем в порядке  $\epsilon^3$  уравнение для  $\Phi(\xi, \tau)$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + i \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = i \beta |\varphi|^2 \varphi; \quad (3.7)$$

где

$$\gamma = \frac{\left[ 4 \frac{c^2 \omega^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2 (c - v)^2}{\delta} + c^2 \right]}{2 \left[ \frac{\alpha^2 (\omega - kv)}{\delta} + \omega \right]}; \quad (3.8)$$

$$\beta = \frac{3(1-\alpha)^4}{4 \left[ \frac{\alpha^2 (\omega - kv)}{\delta} + \omega \right]};$$

Покажем при каких условиях возможна неустойчивость типа "отрицательного давления". Следуя [7-9], ищем решение (3.7) в виде:

$$\varphi = \sqrt{\rho} \exp \left\{ - \frac{i}{2\gamma} \int \sigma d\xi \right\} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.7) и отделяя вещественную и мнимые части, получим систему уравнений для определения величин  $\rho$  и  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\sigma \rho) &= 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} &= -2\gamma \rho \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sqrt{\rho} \right); \end{aligned} \quad (3.10)$$

Последний член во втором уравнении в (3.10) мал при условии:

$$\frac{4\pi^2 \beta}{\gamma k^2} \gg 1; \quad (3.11)$$

Величина  $\beta \nu \rho^2$  в (3.10) играет роль давления, если  $\rho$  и  $\nu$  считать гидродинамической плотностью и скоростью, соответственно.

При условии  $\beta \nu < 0$  "давление" становится отрицательным и начальные возмущения экспоненциально нарастают. Условие  $\beta \nu < 0$  дает:

$$\frac{4c^2 \omega^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2 (c - \nu)^2}{\delta} + c^2 < 0; \quad (3.12)$$

Рассмотрим ионную ветвь колебаний:

$$\omega_k \approx 1 + \frac{\delta}{2k^2 \nu^2}; \quad \alpha \approx -\frac{\delta}{k^2 \nu^2}; \quad c \approx -\frac{\delta}{k^3 \nu^2}; \quad (3.13)$$

С учетом (3.13) получаем из (3.11), (3.12) условие возникновения неустойчивости типа "отрицательного давления".

$$\frac{2\pi^2 \rho_0 k^2 \nu^2}{\delta} \gg 1; \quad \frac{\delta}{k^3 \nu^3} \ll 1; \quad (3.14)$$

Видно, что при малых  $\delta$  (случай малой компенсации) условие (3.14) хорошо удовлетворяется даже для относительно малых величин  $\rho_0$ .

Выражаю глубокую благодарность В.И.Курилко и Б.В.Чиркову за интерес к работе и ценные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Вычисление поляризационной силы $F(\Delta_1, \Delta_2)$

Допустим, электронный пучок сместился в поперечном направлении (ось  $z$ ) на величину  $\Delta_1$ ; ионный на величину  $\Delta_2$ . Тогда энергия взаимодействия между пучками имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V(\Delta_1, \Delta_2) = e^2 n_i^{(0)} n_e^{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz_1 dz_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \times \\
 \times \exp \left\{ - \frac{x_1^2 + (z_1 - \Delta_1)^2}{a^2} - \frac{x_2^2 + (z_2 - \Delta_2)^2}{a^2} \right\}; \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь  $(x_1, y_1, z_1)$ ;  $(x_2, y_2, z_2)$  — координаты электронов и ионов соответственно.

Произведем в (1) замену:

$$\begin{aligned}
 z_1 - z_2 = \zeta a; & \quad y_1 - y_2 = \eta a; \\
 z_2 - \Delta_2 = z'_2 a; & \quad y_2 = y'_2 a; \\
 x_1 - x_2 = \chi a; & \quad \Delta = (\Delta_2 - \Delta_1) / a; \\
 x_2 = x'_2 a; &
 \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и опуская штрихи, получаем:

$$\begin{aligned}
 V(\Delta_1, \Delta_2) = V(\Delta) = e^2 n_e^{(0)} n_i^{(0)} a^5 \cdot \\
 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi dx_2 dy_2 d\eta dz_2 d\zeta}{\sqrt{\chi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\exp \left\{ - (\gamma + x_2)^2 - (\beta + \Delta + z_2)^2 - (x_2^2 + z_2^2) \right\};$$

Продифференцируем (3) по  $\Delta$  и вычисляем последовательно интегралы по  $y_2$  (от  $-L$  до  $L$ );  $x_2, \eta, z_2, \gamma, \beta$  в пределах  $(-\infty, \infty)$ . Вычисления числа частиц на длинах  $2L$  дает:

$$N_{e,i} = 2L\pi a^2 n_{e,i}^{(0)};$$

Окончательно получаем для величины  $F_{e,i}$ :

$$F_{e,i} = \mp \frac{\partial U}{\partial \Delta_{1,2}} / N_{e,i} = \pm \frac{2\pi e^2 n_{i,e}^{(0)} a^2}{\Delta} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta^2}{2a^2}} \right);$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Вычисление параметров в точках А и В

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2} + \frac{\delta}{(\omega - kv)^2 - \lambda^2} = 1; \quad \delta = \frac{\mathcal{Q}^2}{\omega_0^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0; \quad \omega_0^2 = 1; \quad (2)$$

Обозначим  $1 + \eta = \omega^2$ ;

Из (1) и (2) получаем уравнение для  $\eta$ :

$$\left( 1 + \frac{\lambda^2}{\delta} \right) \eta^2 + \eta^3 - \delta \eta - \delta = 0; \quad (3)$$

Причем:

$$\omega = \sqrt{1+\eta}; \quad \omega - k\upsilon = -\frac{\delta \sqrt{1+\eta}}{\eta^2}; \quad (4)$$

1. "Узкая щель" ( $\lambda \gg 1$ ; ( $\lambda \sim 1$ );  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}} \ll 1$ )

$$\eta = \rho \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon^2;$$

$$q_{\pm} = \pm \frac{2k}{(1+\lambda)\varepsilon};$$

$$\omega^2 = 1 + \rho \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon^2;$$

$$b_{\pm} = -\frac{3k}{2(1+\lambda)};$$

$$\alpha = -\rho \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2;$$

$$\omega - k\upsilon = -\lambda \left(1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2\right);$$

$$k\upsilon = 1 + \lambda + \frac{\rho}{2} \varepsilon - \frac{\lambda}{16} \varepsilon^2;$$

$$\delta = \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{1-\rho^2};$$

$$\omega = 1 + \frac{\rho}{2} \varepsilon;$$

$\rho = \pm 1$  ( $+1 \rightarrow$  точка А;  $-1 \rightarrow$  точка В);

II. "Широкая щель"  $\lambda^2 / \delta^{2/3} \ll 1$ ;

$$\eta_+ = \delta^{1/3};$$

$$\eta_- = -\left(1 + \frac{\lambda^2}{\delta}\right)^{-1};$$

$$\omega_+ = \sqrt{1 + \delta^{1/3}};$$

$$(k\upsilon)_+ = (1 + \delta^{1/3})^{3/2};$$

$$\omega_- = \left(1 + \frac{\delta}{\lambda^2}\right)^{-1/2};$$

$$\alpha_+ = -\delta^{1/3};$$

$$(k\upsilon)_- = \frac{[1 + \delta(1 + \frac{\lambda^2}{\delta})^2]}{\sqrt{1 + \frac{\delta}{\lambda^2}}};$$

$$q_+ = \frac{3k}{2\delta^{1/3}(1 + \delta^{1/3})};$$

$$q_- = -\frac{k(1 + \frac{\delta}{\lambda^2}) [1 + 4\frac{\lambda^2}{\delta} + \frac{1}{\delta(1 + \frac{\lambda^2}{\delta})^2}]}{[1 + \delta(1 + \frac{\lambda^2}{\delta})^2]};$$

$$b_+ = -\frac{3k(1 + \delta^{1/3})}{4};$$

$$b_- = \frac{3k}{4(1 + \frac{\delta}{\lambda^2})^3 [1 + \delta(1 + \frac{\lambda^2}{\delta})^2]};$$



## ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.Будкер, "Атомная энергия", 5, 9(1956).
2. Б.В.Чириков "Атомная энергия", 19, 239 (1965).
3. Н.Ю.Казаринов и др. "Нелинейные явления в неустойчивости типа "змейка" электронно-ионного кольца," Препринт Р 9-6284, Дубна (1972).
4. H. Washimi, T. Taniuti, *Phys. Rev. Letters*, 17, 19, 996, (1966).
5. T. Watanabe, *J. Phys. Soc. Japan*, 27, 5, 1341, (1968).
6. Y. Midzuno, T. Watanabe, *J. Phys. Soc. Japan*, 28, 3, 738, (1970).
7. T. Taniuti, N. Yajima, *J. Math. Phys.*, 10, 8, 1369, (1968).
8. N. Asano, T. Taniuti, *J. Math. Phys.*, 10, 11, 2020, (1969).
9. В.Е.Захаров, ПМТФ, 2,(1968).

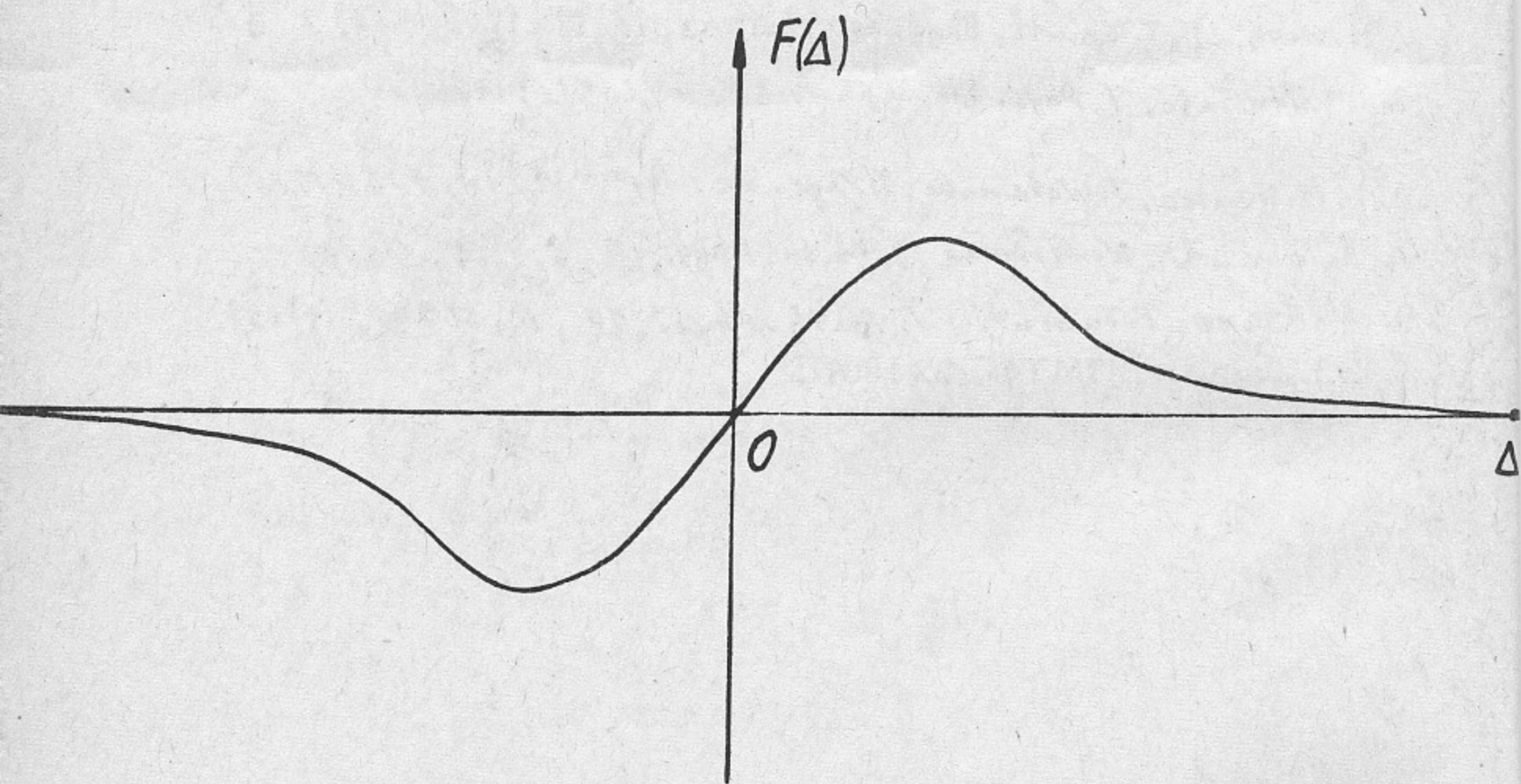


Рис.1

График зависимости поляризационной силы  $F(\Delta)$  от относительного смещения центров тяжести пучков

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 \quad ;$$

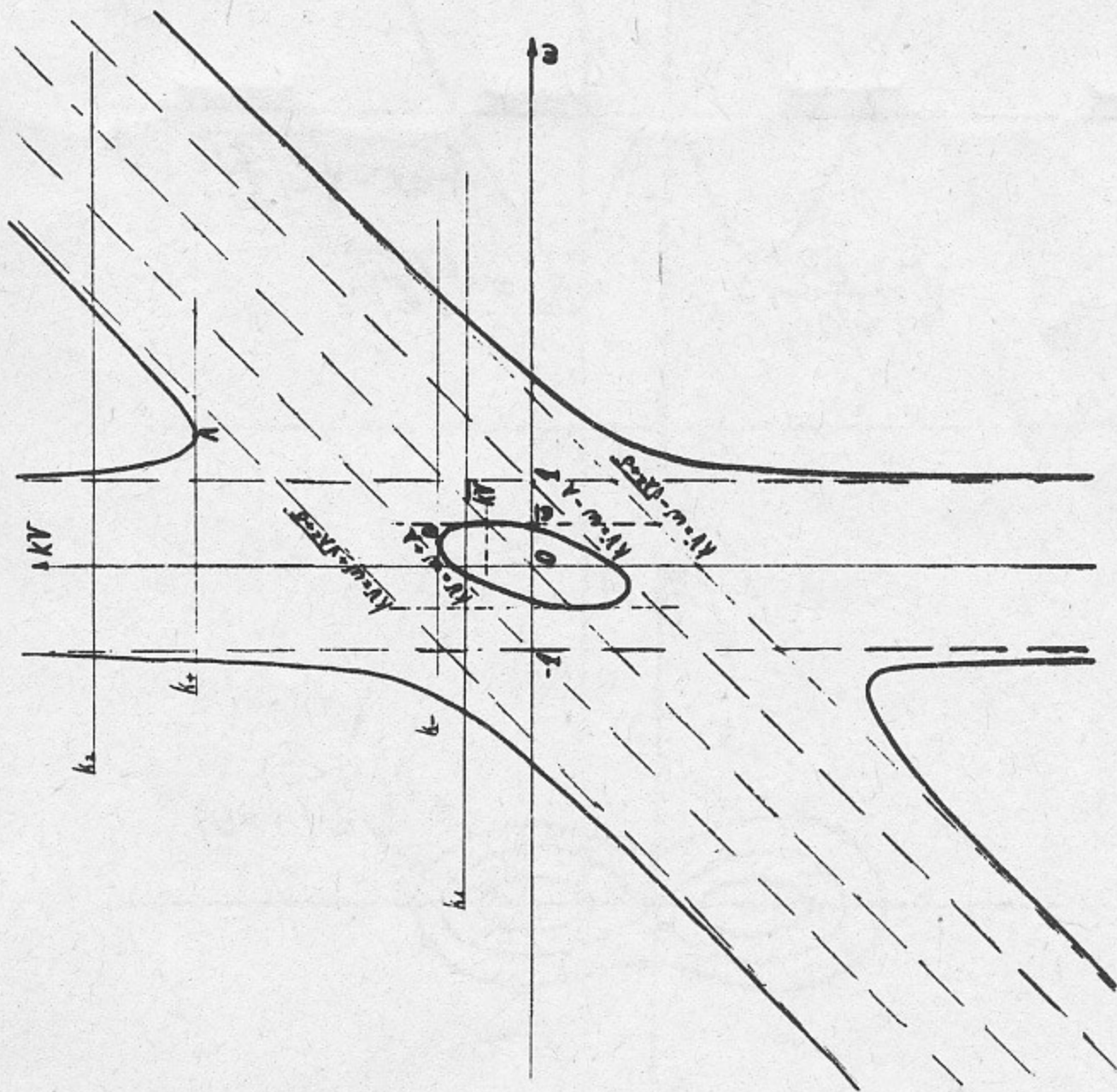


Рис.2.1. График зависимости  $k = k(\omega)$ , задаваемой дисперсионным уравнением (1.12):  $(\lambda = 1, \delta = 3)$ .  
 $\bar{\omega} = k\bar{v} = (1 + \delta/\lambda^2)^{-1/2}$ ;

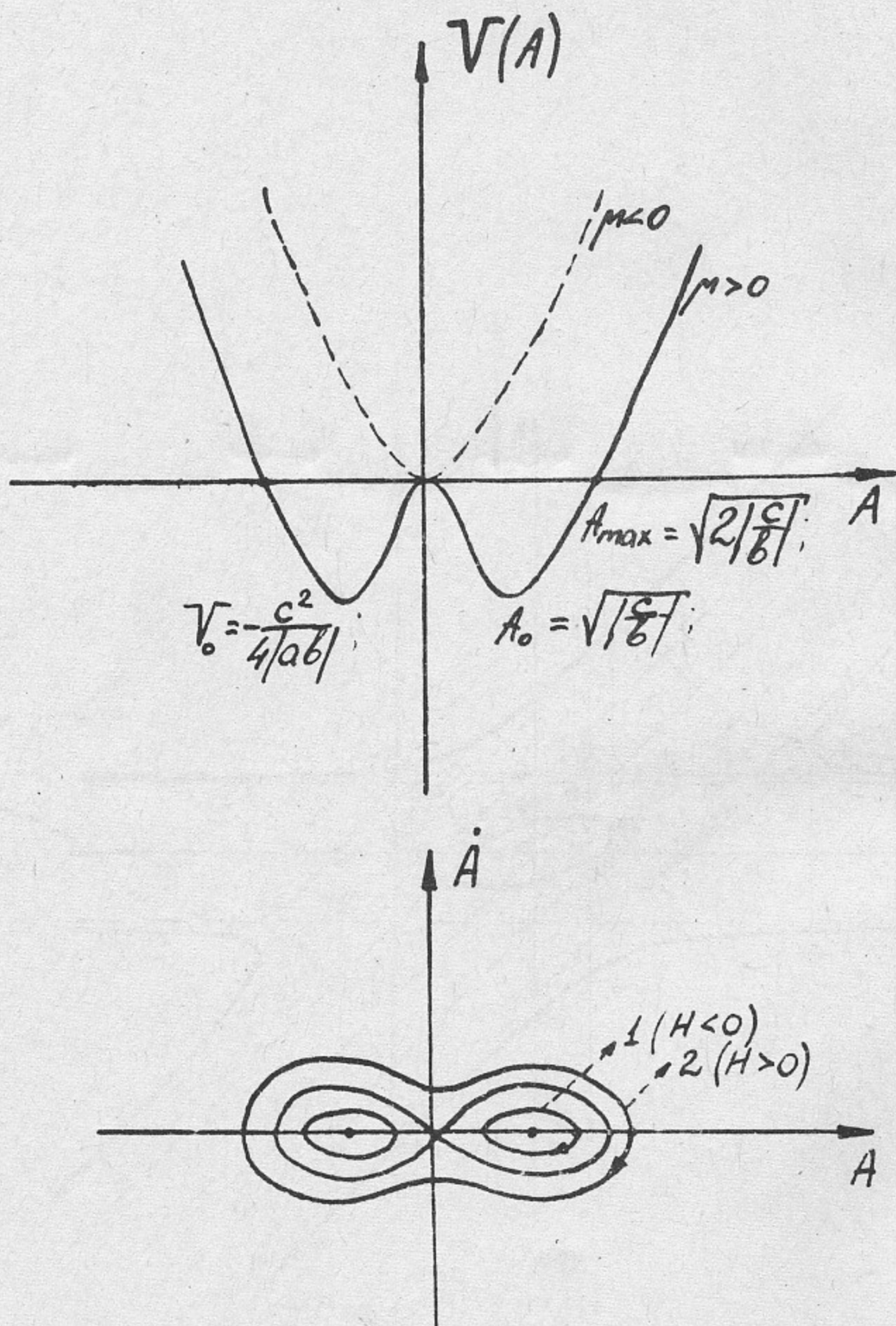


Рис.3а. Вид потенциала и фазовые траектории для случаев 1+, П+ (Нелинейная стабилизация вблизи точки А)

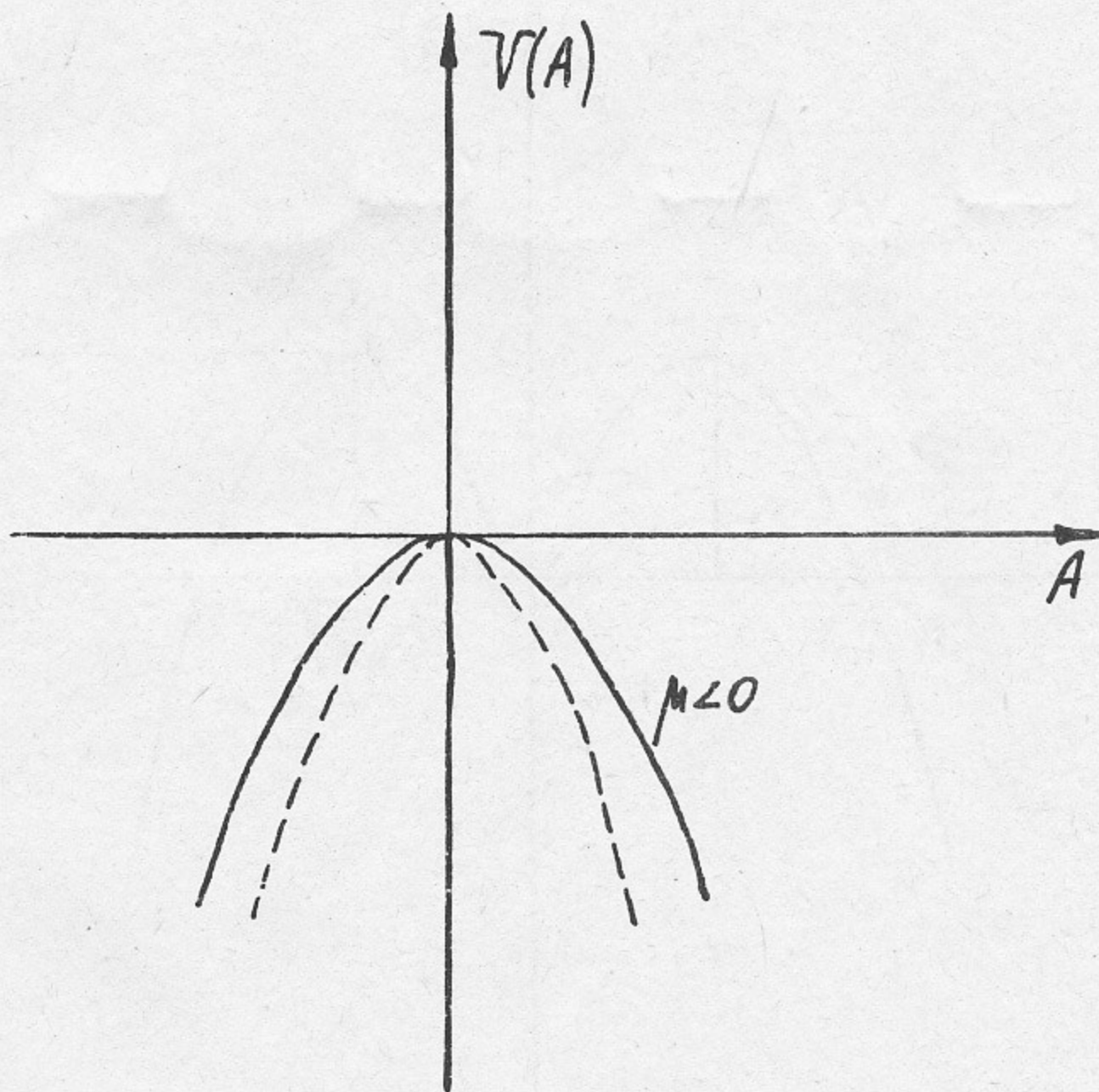


Рис.36. Вид потенциала для случаев 1-, П-(Нелинейное усиление вблизи точки В: пунктирная кривая)

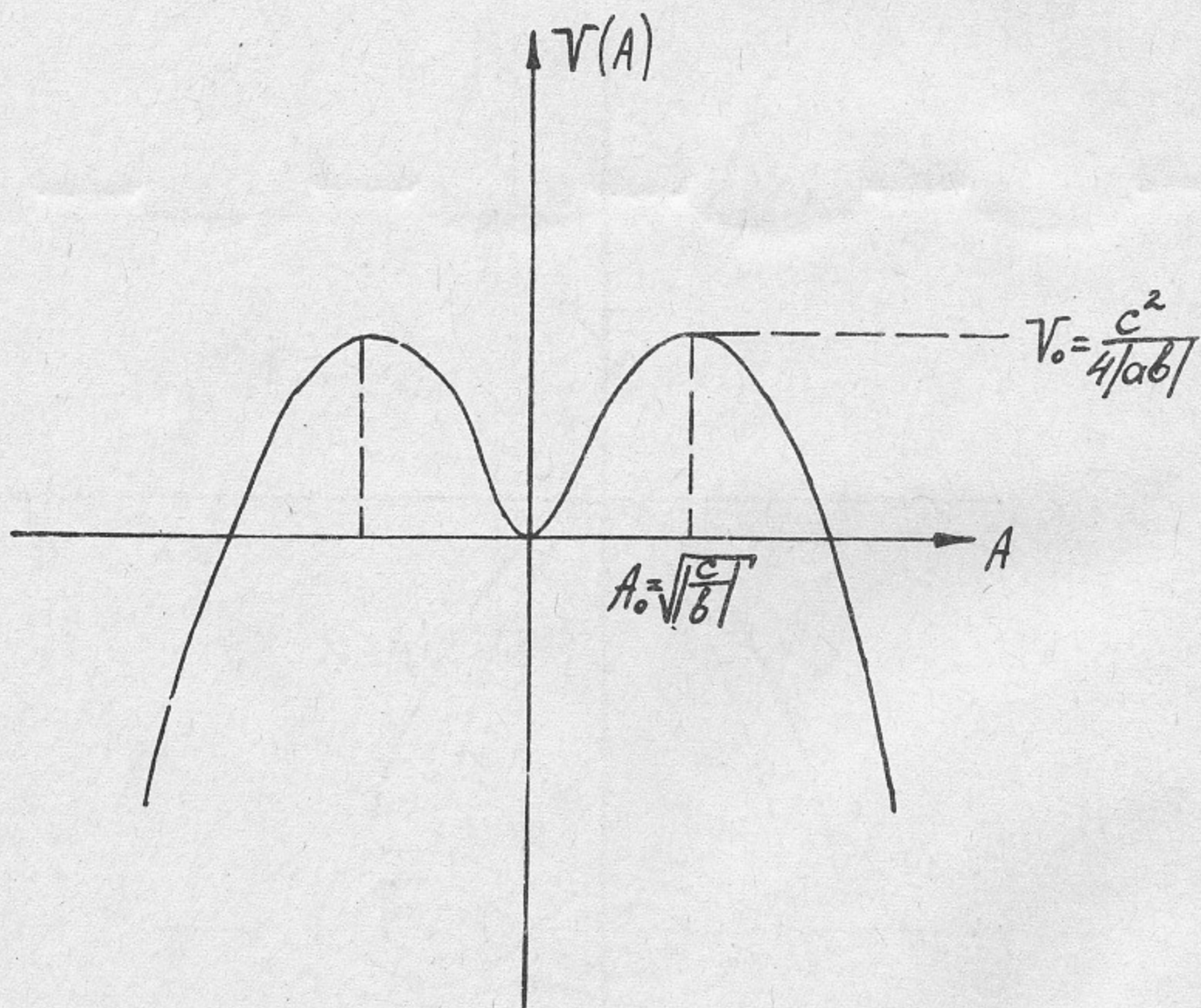


Рис.4. Вид потенциальной кривой для случая, когда колебаний линейно устойчиво, но нелинейность срывает устойчивость при конечных амплитудах

---

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов  
Подписано к печати 16.8.73г, № МН 08828  
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 72

---

Отпечатано на ротационной машине в ИЯФ СО АН СССР