4

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 68 - 73

В.Е.Захаров, С.В.Манаков

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ КДВ И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Новосибирск

1973

В.Е.Захаров, С.В.Манаков

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ КДВ И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

АННОТАЦИЯ

Показано, что уравнение Кортевега-де-Вриза и нелинейное уравнение Шредингера, рассматриваемые как гамильтоновские системы, полностью интегрируемы. Переход к переменным действие-угол осуществляется с помощью матриц рассеяния одномерных операторов Шредингера и Дирака соответственно.

В.Е.Захаров, С.В.Манаков

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ КДВ И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Введение

В последние годы был достигнут существенный прогресс в исследовании некоторых классов одномерных нелинейных волновых полей. Этот прогресс связан с применением "квантовомеханических" методов для изучения нелинейных систем. Суть нового подхода, получившего названия "метод обратной задачи рассеяния" состоит в следующем. С рассматриваемым нелинейным уравнением, описывающим данное волновое поле, ассоциируется некоторый дифференциальный оператор с коэффициентами из этого поля, спектральные характеристики которого (матрица рассеяния, спектр) известным образом меняются во времени. Задачи Коши для нелинейных уравнений поля сводятся, таким образом, к изучению прямой и обратной спектральных задач для линейного оператора (прямая и обратная задачи рассеяния).

Впервые метод обратной задачи рассеяния был применен М.Крускалом и др./1/ к уравнению Кортевега-де-Вриза (КДВ), описывающему волны в нелинейной среде со слабой дисперсией. С этим уравнением ассоциируется одномерный оператор Шредингера. Впоследствии этот подход был использован Захаровым и Шабатом /2,3/ к нелинейному уравнению Шредингера (НШ), которое возникает в целом ряде задач физики нелинейных волн. Нелинейное уравнение Шредингера исследуется с помощью одномерного оператора Дирака.

Общая картина поведения решений уравнений КДВ и НШ исследована довольно подробно. В частности, удалось описать асимптотическое поведение решений этих уравнений при $t \to \infty$ (см.цитированные выше работы, а также /4,5/). При этом была выяснена фундаментальная роль частных решений рассматриваемых уравнений-солитонов - связанных с дискретным спектром ассоциированных операторов. Именно, было показано, что решение задачи Коши (с достаточно быстро убывающими по x начальными условиями) асимптотически состоит из конечного набора солитонов, параметры которых могут быть найдены путем решения задачи на собственные значения для соответствующих дифференциальных операторов.

Системы, описываемые уравнениями КДВ и НШ являются гамильтоновскими. При этом они обладают исключительным свойством - они полностью интегрируемы, т.е. существуют канонические переменные, являющиеся однозначными "функциями" полевых переменных (переменные действия - угол), в которых рассматриваемые уравнения имеют вид

$$\dot{P}_k = 0, \quad \dot{Q}_k = \frac{\delta H}{\delta P_k}, \quad H = H\{P_k\} \qquad (*)$$

Для уравнения КДВ этот факт был установлен Захаровым и Фаддеевым /6/. Переменные и просто связаны с матрицей рассеяния ассоциированного оператора. Доказательство полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера составляет основное содержание настоящей работы. Кроме того, мы приводим новое доказательство полной интегрируемости уравнения КДВ, которое, по нашему мнению, с физической точки зрения является более прозрачным.

Факт полной интегрируемости уравнений КДВ и НШ представляет значительный интерес с точки зрения проблемы статистического описания волновых полей. Действительно, полная интегрируемость рассматриваемых систем означает отсутствие стохастизации в них; нелинейное взаимодействие не приводит к перераспределению энергии между разными степенями свободы. Время "фазового размешивания" некоторой системы определяется, таким образом, не уровнем нелинейности (как часто считается), а "отклонением" системы от ближайшей полностью интегрируемой.

С этой точки зрения значительный интерес представляет вопрос об определении всего класса волновых полей, для изучения которых может быть применен метод обратной задачи рассеяния. Для уравнений, интегрируемых с помощью оператора Шредингера, эта задача была решена в /6/, где было показано, что полностью интегрируемыми являются все системы, гамильтонианы которых представляют собой следы полиномов от ассоциированного оператора с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от времени. Ниже мы приводим новое доказательство этого факта; аналогичный результат получен для оператора Дирака.

Переменные действие - угол для уравнений КДВ и НШ совершенно необходимы также и при изучении систем, близких к КДВ или НШ. Введение этих переменных позволяет построить весьма удобную теорию возмущений для уравнений, близких к "эталонным". При этом в качестве нулевого приближения в такой теории возмущений выступают точные решения уравнений КДВ или НШ. Построение такой теории возмущений позволит рассмотреть большое число физически важных вопросов.

§ 1. Полная интегрируемость уравнения КДВ

Дифференциальное уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

известное в теории нелинейных волн как уравнение Кортевега-де-Вриза (КДВ) /7/, обладает рядом замечательных свойств. Уравнение КДВ имеет бесконечный набор интегралов движения (см./8/)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int u\,dx \\ I_1 &= \int u^2 dx \\ I_2 &= \int (u_x^2 - 2u^3)\,dx\,, \\ &\dots\dots \end{aligned} \tag{1.2}$$

а решение задачи Коши для уравнения КДВ сводится к решению прямой и обратной задач рассеяния для одномерного оператора Шредингера /1/:

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + u(x) \tag{1.3}$$

В этом параграфе мы показываем, что эти свойства уравнения КДВ могут быть объяснены тем обстоятельством, что уравнение КДВ представляет собой полностью интегрируемую в смысле классической динамики систему, переменными действи-угол для которой являются некоторые характеристики задачи рассеяния для оператора (1.3). Вместе с уравнением КДВ полностью интегрируемым оказывается любое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u} \tag{1.4}$$

где $H = \sum \alpha_\ell(t) I_\ell$ с произвольно зависящими от времени коэффициентами α_ℓ. Для Кортевега-де-Вриза $H = I_2/2$.

Уравнение вида (1.4), в котором – произвольный функционал от u, может быть приведено к гамильтоновской форме. Для этого от переменной $u(x)$ нужно перейти к каноническим переменным. Ниже будут рассматриваться такие наборы канонических переменных P_k, Q_k, зависящие от параметра k; для которых этот параметр заполняет действительную ось $-\infty < k < \infty$. Сверх этого будем допускать существование конечного тела дискретных переменных P_n, Q_n.

Вычисляя производную по времени от канонической переменной P_k, получим:

$$\frac{dP_k}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_k}{\delta u(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_k}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)} dx =$$

$$= \int dx \frac{\delta P_k}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int dk' \left(\frac{\delta H}{\delta P_{k'}} \frac{\delta P_{k'}}{\delta u(x)} + \frac{\delta H}{\delta Q_{k'}} \frac{\delta Q_{k'}}{\delta u(x)} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum \frac{\partial H}{\partial P_n} \frac{\delta P_n}{\delta u(x)} + \frac{\partial H}{\partial Q_n} \frac{\delta Q_n}{\delta u(x)} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \left\{ [P_k, P_{k'}] \frac{\delta H}{\delta P_{k'}} + [P_k, Q_{k'}] \frac{\delta H}{\delta Q_{k'}} \right\}.$$

(Интегрирование здесь понимается в обобщенном смысле, т.е. включает в себя суммирование по дискретному набору k).

Скобочный символ $[S,T]$ (скобки Пуассона) для любых двух функционалов S, T означает

$$[S,T] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\delta S}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta T}{\delta u(x)} - \frac{\delta T}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta S}{\delta u(x)} \right\} \quad (1.5)$$

Аналогично имеем:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \left\{ [Q_k P_{k'}] \frac{\delta H}{\delta P_{k'}} + [Q_k Q_{k'}] \frac{\delta H}{\delta Q_{k'}} \right\}$$

Скобочные символы являются обобщенными функциями своих непрерывных индексов k' и возникают только в виде интегралов с некоторыми функциями от k'.

При выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&[P_k, P_{k'}] = [Q_k, Q_{k'}] = 0, \\
&[P_k, P_n] = [P_k, Q_n] = [Q_k, P_n] = [Q_k, Q_n] = 0, \qquad (1.6)\\
&[Q_m, Q_n] = [P_m, P_n] = 0, \\
&[P_k, Q_{k'}] = \delta(k-k'), \quad [P_n, Q_m] = \delta_{nm},
\end{aligned}
$$

из уравнений (1.4) следует система уравнений Гамильтониана

$$
\frac{dP_k}{dt} = \frac{\delta H}{\delta Q_k}, \qquad \frac{dQ_k}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta P_k},
$$

т.е. условия (1.6) достаточны для каноничности переменных P_k, P_n, Q_k, Q_n.

В качестве примера канонических переменных приведем величины

$$
\begin{aligned}
P_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cos kx \, dx \\
Q_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \sin kx \, dx,
\end{aligned}
\qquad (1.7)
$$

скобочные соотношения между которыми проверяются непосредственно, а также связанные с ними величины N_k, Φ_k, определенные по правилу

$$
P_k = \sqrt{2N_k} \cos \Phi_k, \quad Q_k = \sqrt{2N_k} \sin \Phi_k .
$$

Переменные N_k, Φ_k есть переменные действие-угол для системы типа (1.4), где H – квадратичный функционал

$$
H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\sum_{\ell} a_\ell \left(u_x^{(\ell)}\right)^2 \right].
$$

Приведем теперь некоторые факты относительно оператора $\hat{L}$.

Рассмотрим функции $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$, (функции Йоста), определенные как решения уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + u(x)\varphi + k^2\varphi = 0 \qquad (1.8)$$

с асимптотиками на бесконечности

$$\psi(x,k) \to e^{ikx} \qquad \text{при} \quad x \to +\infty$$
$$\varphi(x,k) \to e^{-ikx} \qquad \text{при} \quad x \to -\infty \qquad (1.9)$$

Функции $\varphi(x,k)$, $\varphi^*(x,k)$ представляют собой полный набор решений уравнения (1.8), поэтому

$$\psi(x,k) = a(k)\varphi^*(x,k) + b(k)\varphi(x,k) \qquad (1.10)$$

При этом

$$a(k) = \frac{\varphi\psi_x - \varphi_x\psi}{2ik}, \quad b_k = \frac{\varphi^*\psi_x - \psi\varphi^*_x}{2ik}, \qquad (1.10)$$

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1.$$

Величины $a(k)$, $b(k)$ будем называть матрицей рассеяния. Функции Йоста $\varphi(x,k)$, $\psi(x,k)$ аналитичны в верхней полуплоскости комплексной переменной k. Вместе с ними, как следует из (1.11) там аналитична $a(k)$. При этом, очевидно, $a(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$. Величина $b(k)$ аналитическими свойствами, вообще говоря, не обладает.

Для финитного потенциала $u(x)$ все определенные функции, а также матрица рассеяния аналитичны во всей плоскости k.

В точках мнимой оси $k = i\varkappa_n$, соответствующих дискретному спектру, $a(k) = 0$. В этих точках функции φ и ψ линейно зависимы и выражаются через нормированную функцию дискретного спектра

$$\psi(x, i\varkappa_n) = ia'_k c_n g_n(x) = b_n \varphi(x, i\varkappa_n) \qquad (1.12)$$

$$(b_n = ia'_k c_n^2)$$

При $x \to -\infty$ $\psi(x, i\varkappa_n) \to i a'_k c_n^2 e^{\varkappa_n x}$. Для финитного потенциала величины $b_n = b(i\varkappa_n)$ определяются аналитическим продолжением с действительной оси. Произвольный достаточно быстро убывающий потенциал можно представить как предел последовательности финитных потенциалов. При таком предельном переходе b_n стремятся к конечным пределам; в этом смысле мы их и понимаем в дальнейшем.

Вычислим теперь вариационные производные от матрицы рассеяния по потенциалу $u(x)$: $\delta a_k / \delta u(x)$, $\delta b_k / \delta u(x)$. Воспользуемся для этого представлением (1.11):

$$\frac{\delta a_k}{\delta u(x)} = \frac{1}{2ik}\left[\frac{\delta\varphi(x',k)}{\delta u(x)}\psi_{x'}(x',k) + \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\delta\psi(x',k)}{\delta u(x)}\varphi(x',k) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta\psi(x',k)}{\delta u(x)}\varphi_{x'}(x',k) - \psi(x',k)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\delta\varphi(x',k)}{\delta u(x)}\right],$$

$$\frac{\delta b_k}{\delta u(x)} = \frac{1}{2ik}\left[\frac{\delta\varphi^*(x',k)}{\delta u(x)}\psi'_{x'}(x',k) + \varphi^*(x',k)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\delta\psi(x',k)}{\delta u(x)} - \right. \tag{1.13}$$

$$\left. - \frac{\delta\psi(x',k)}{\delta u(x)}\varphi^*_{x'}(x',k) - \psi(x',k)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\delta\varphi^*(x',k)}{\delta u(x)}\right].$$

Заметим, что выражение для $\delta a_k/\delta u(x)$, $\delta b_k/\delta u(x)$ не зависит от x', фигурирующей в правых частях (1.13). Поэтому можно положить $x' = x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и затем устремить ε к нулю. Поскольку $\psi(x',k)$ определена асимптотикой при $x \to \infty$, то значения $\psi(x,k)$ не зависят от значений потенциала в точках, расположенных левее точки x. Поэтому $\delta\psi(x',k)/\delta u(x) = 0$ при $x' > x$. Взяв вариационную производную от уравнения (1.8) получим уравнение для $\dfrac{\delta\varphi(x,k)}{\delta u(z)}$:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\delta\varphi(x,k)}{\delta u(z)} + u(x)\frac{\delta\varphi(x,k)}{\delta u(z)} + k^2\frac{\delta\varphi(x,k)}{\delta u(z)} = -\delta(x-z)\varphi(x,k) \tag{1.14}$$

При этом $\delta\varphi(x,k)/\delta u(z)=0$ при $x<z$. Как следует из (1.14)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta\varphi(x+\varepsilon,k)}{\delta u(x)}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\varphi(x,k)}{\delta u(z)}\to-\varphi(x,k).$$

Подставляя полученные значения вариационных производных в (1.13) найдем:

$$\frac{\delta a_k}{\delta u(x)}=\frac{\varphi(x,k)\psi(x,k)}{2ik}$$

$$\frac{\delta b_k}{\delta u(x)}=\frac{\varphi^*(x,k)\psi(x,k)}{2ik} \qquad (1.15)$$

Найдем теперь скобки Пуассона (1.5) между элементами матрицы рассеяния. Вычислим, например, $[a(k),b(k')]$.

$$[a(k),b(k')]=\frac{1}{2}\int\left[\frac{\delta a_k}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta b_{k'}}{\delta u(x)}-\frac{\delta b_{k'}}{\delta u(x)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta a_k}{\delta u(x)}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{8kk'}\int dx\left\{\varphi(x,k)\psi(x,k)\frac{\partial}{\partial x}\varphi^*(x,k')\psi(x,k')-\right.$$

$$\left.-\varphi^*(x,k')\psi(x,k')\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,k)\psi(x,k)\right\}.$$

Для вычисления последнего интеграла заметим, что, если u_1, v_1, u_2, v_2 – произвольные пары решений уравнения (1.8) с k^2 равным k_1^2, k_2^2 соответственно, то

$$u_1v_1\frac{\partial}{\partial x}u_2v_2-u_2v_2\frac{\partial}{\partial x}u_1v_1=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(u_1u_{2x}-u_2u_{1x})(v_1v_{2x}-v_2v_{1x})\right\} \qquad (1.16)$$

Соотношение (1.16) следует, как нетрудно убедиться, непосредственно из (1.8).

Воспользовавшись (1.16) и положив $u_1=\varphi(x,k),\ v_1=\psi(x,k)$, $u_2=\psi(x,k')$, $v_2=\varphi^*(x,k')$ найдем: $[a(k), b(k')]=$

$$= -\frac{1}{8kk'(k^2-k'^2)}\Big\{\big(\varphi(x,k)\psi_x(x,k')-\psi(x,k')\varphi_x(x,k)\big)\big(\psi(x,k)\varphi^*_x(x,k')-\varphi^*(x,k')\psi_x(x,k)\big)\Big\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Подставив сюда асимптотические значения φ, ψ на $+\infty$ и $-\infty$ по x получим:

$$[a(k), b(k')] = -\frac{1}{8kk'}\Big\{\lim_{x\to\infty}\Big(a_k a^*_{k'} e^{2ik'x} - \frac{k+k'}{k-k'} a_k b_{k'} + \frac{k-k'}{k+k'} a^*_{k'} b^*_k e^{2i(k+k')x} - b^*_k b_{k'} e^{2ik'x}\Big) - \lim_{x\to-\infty}\Big(a_k a_{k'} e^{2ik'x} - \frac{k+k'}{k-k'} a_{k'} b_k e^{2i(k-k')x} + \frac{k-k'}{k+k'} a_k b_{k'} - b_k b_{k'} e^{2ik'x}\Big)\Big\}.$$

Воспользовавшись теперь известным соотношением $\lim\limits_{x\to\infty} P\frac{e^{ikx}}{k} = \pi i\delta(k)$, где символ P означает главную часть, и полагая $k, k'>0$, получим окончательно:

$$[a_k, b_{k'}] = \frac{1}{2}\,\frac{a_k b_{k'}}{k^2-k'^2} + \frac{\pi}{4k} a_k b_k \delta(k-k').$$

Совершенно аналогично вычисляются скобки Пуассона между остальными парами элементов матрицы рассеяния, после чего нетрудно убедиться, что величины

$$P_k = \frac{2k}{\pi}\ln|a_k|^2,\quad Q_k = \arg b_k,\quad k>0 \qquad (1.17)$$

удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям (1.6).

В отсутствие дискретного спектра матрица рассеяния, а вместе с ней и потенциал $u(x)$, могут быть восстановлены по набору канонических переменных (1.17). Действительно, $b(k)$ находится тривиально: модуль b_k находится из условия $|b_k|^2=|a_k|^2-1$, а аргумент b_k есть просто Q_k, так что

$$b_k = \left(e^{\frac{\pi P_k}{2k}} - 1\right)^{1/2} e^{iQ_k}, \quad b_{-k} = b_k^* \qquad (1.18)$$

Так как отсутствие дискретного спектра означает отсутствие нулей у $a(k)$ в верхней полуплоскости k, то $\ln a(k)$ является аналитической функцией в этой полуплоскости и $\arg a(k)$ дается дисперсионным соотношением:

$$\arg a(k) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|a(k')|\,dk'}{k'-k} = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{k}{k'}\,\frac{P_{k'}}{k'^2-k^2}\,dk'. \qquad (1.19)$$

При получении последнего равенства мы воспользовались тем, что $a(-k) = a^*(k)$. При наличии дискретного спектра необходимо вводить дополнительные дискретные переменные

$$P_n = \varkappa_n^2, \quad Q_n = -\ln b_n^2 \qquad (1.20)$$

Вариационная производная $\delta P_n/\delta u(x)$ следует из известной формулы теории возмущений

$$\frac{\delta P_n}{\delta u(x)} = \frac{\delta \varkappa_n^2}{\delta u(x)} = -\, g_n^2(x)$$

где $g_n(x)$ – нормированная функция дискретного спектра. Для вычисления производной $\delta Q/\delta u$ воспользуемся формулой (1.15), рассматривая её первоначально для финитных потенциалов и продолжая в комплексную плоскость:

$$\frac{\delta Q_n}{\delta u(x)} = -\frac{2}{b_n}\,\frac{\delta b_n}{\delta u(x)} = \frac{\varphi^*(x,-i\varkappa_n)\,\varphi(x,i\varkappa_n)}{\varkappa_n}$$

С помощью этих выражений нетрудно убедиться, что для наборов переменных (1.17), (1.20) выполняются все скобочные соотношения (1.6), т.е. переменные P_k, Q_k, P_n, Q_n – канонические. Матрица рассеяния восстанавливается по этим переменным. Выражение (1.18) для b_k остается справедливым. Для того, чтобы восстановить аргумент a_k поступим следующим образом. Рассмотрим аналитическую в верхней полуплоскости функцию $a_1(k) = a(k) \prod \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n}$ которая, очевидно, не имеет нулей в верхней полуплоскости. На вещественной оси $|a_1(k)| = |a(k)|$ и $\arg a_1(k)$ дается выражением (1.19). Но

$$\arg a(k) = \arg a_1(k) + \sum \arg \frac{k-i\varkappa_n}{k+i\varkappa_n}$$

Таким образом

$$\arg a(k) = \operatorname{Im} \sum \ln \frac{k - i p_n^{1/2}}{k + i p_n^{1/2}} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{k}{k'} \frac{P_{k'}\, dk'}{k'^2 - k^2} \quad (1.21)$$

Потенциал $u(x)$ можно найти решив следующее линейное уравнение на функцию $K(x,y)$ (уравнение Марченко /9/):

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} K(x,s) F(s+y)\, ds \qquad (1.22)$$

с ядром $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx} - \sum_n i \frac{b_n}{a'_n} e^{\varkappa_n x}. \qquad (1.23)$$

Функция Йоста $\varphi(x,k)$ выражается через $K(x,y)$:

$$\varphi(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} K(x,y) e^{-iky} dy \qquad (1.24)$$

Потенциал $u(x)$ также выражается через решение уравнения (1.22):

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x). \qquad (1.25)$$

(Все приведенные выше факты относительно прямой и обратной задач рассеяния для оператора (1.3) можно найти в /9/).

Нам остается найти выражение для гамильтониана уравнения Кортевега-де-Вриза через канонические переменные (1.17), (1.20). Для этого сравним асимптотические разложения $\ln a(k)$ по степеням $1/k$, найденные непосредственно из уравнения (1.8) с теми же величинами, полученными из выражения $\operatorname{Im} \ln a(k)$ через канонические переменные (1.19).

Представим функцию Йоста $\psi(x,k)$ в виде

$$\psi(x,k) = \exp\left(ikx - \int_x^{\infty} S(x,k)\,dx\right) \qquad (1.26)$$

Подставляя (1.26) в (1.8) получим уравнение для $S(x,k)$:

$$S'_x + S^2 + u(x) + 2ikS = 0$$

Откуда следует рекурентное соотношение для коэффициентов разложения $S(x,k)$ по степеням $1/2ik$: $S(x,k) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)/(2ik)^n$

$$S_{n+1} = -\frac{\partial S_n}{\partial x} - \sum_{n_1+n_2=n} S_{n_1} S_{n_2}, \quad S_1 = -u(x). \quad (1.27)$$

С другой стороны, величину $a(k)$ можно представить как

$$a_k = \lim_{x\to-\infty} e^{-ikx}\psi(x,k), \quad \operatorname{Im} k > 0$$

откуда

$$\ln a(k) = -\int_{-\infty}^{\infty} S(x,k)\,dx. \qquad (1.28)$$

Поскольку $|b_k|^2$ для гладких быстро убывающих потенциалов стремится к нулю при $k\to\infty$ экспоненциально, то $\ln|a_k|$ убывает быстрее любой степени . Поэтому разложение $\ln a_k$ по степеням $1/k$ целиком определяется асимптотическим разложением $\arg a_k$, которое легко находится из (1.21). $\arg a_k$ разлагается только по нечетным степеням $1/k$ ($\arg a_k = -\arg a(-k)$); отсюда сразу следует, ввиду (1.28), что $\int_{-\infty}^{\infty} S_{2n}(x)dx = 0$. Для нечетных же n имеем:

$$I_l = \int_{-\infty}^{\infty} S_{2l+1}dx = 2^{2l}(-1)^l \int_0^{\infty} k^{2l-1} P_k dk - \frac{2}{2l+1}\sum_m p_m^{\frac{2l+1}{2}} \quad (1.29)$$

S_ℓ легко находятся из рекурентной формулы (1.27). Непосредственным вычислением легко убедиться, что первые три I_ℓ совпадают, с точностью до знаков, с выражениями (1.2). Как уже отмечалось, гамильтониан уравнения КДВ есть $I_{2}/_2$. Приведем его выражение через канонические переменные:

$$H_{KDB} = 8\int_0^\infty k^3 P_k\, dk - \frac{32}{5}\sum_n P_n^{5/2} \tag{1.30}$$

Мы убедились, что в наших переменных H является функционалом только от P_k, P_n; переменные Q_k, Q_n являются циклическими. То же самое относится к любой системе вида (1.4), гамильтониан которой является произвольной линейной комбинацией I_ℓ (1.29).

§ 2. Переменные угол-действие для нелинейного уравнения Шредингера

Нелинейное параболическое уравнение

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \varkappa|\psi|^2\psi = 0, \tag{2.1}$$

которое мы будем называть, согласно установившейся терминологии, нелинейным уравнением Шредингера, также относится к числу полностью интегрируемых в смысле классической динамики. Как и уравнение КДВ оно может быть исследовано с помощью метода обратной задачи рассеяния /2,3/. С этим уравнением оказывается связанным одномерный оператор Дирака, который мы будем записывать в виде

$$\hat{L} = i\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \psi^* \\ \psi & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.2}$$

входящая в этот оператор постоянная p связана с "константой взаимодействия" $\varkappa$: $\varkappa = 2/1-p^2$ Строго говоря, для того чтобы установить эту связь, необходимо довести до конца процедуру, совершенно аналогичную изложенной в предыдущем параграфе, что и будет сделано ниже. Сейчас нам важно отметить, что знак $\varkappa$ определяется величиной p. Это важно, поскольку физические ситуации, описываемые уравнением (2.1) с $\varkappa>0$ или $\varkappa<0$

существенно отличаются. В частности, в зависимости от знака $\varkappa$, возникают разные требования к поведению ψ при $|x|\to\infty$, соответствующие физически интересным ситуациям. Это в свою очередь приводит к тому, что прямая и обратная задачи рассеяния для оператора (2.2) совершенно различны при $\varkappa$ разных знаков, что и вынуждает нас рассматривать эти случаи по отдельности.

Рассмотрим уравнение (2.1) на бесконечном интервале $-\infty<x<\infty$ при $\varkappa>0$. Физически разумная постановка задачи в этом случае требует обращения поля в нуль на бесконечности.

Запишем уравнение (2.1) в гамильтоновском виде

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad i\psi_t^* = -\frac{\delta H}{\delta \psi}, \tag{2.3}$$

где гамильтониан H есть

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\psi_x|^2 - \frac{\varkappa}{2}|\psi|^4 \right) dx. \tag{2.4}$$

Естественным образом определенные скобки Пуассона двух функционалов α, β будем обозначать через $\{\alpha, \beta\}$:

$$\{\alpha, \beta\} = i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\psi}\frac{\delta\beta}{\delta\psi^*} - \frac{\delta\alpha}{\delta\psi^*}\frac{\delta\beta}{\delta\psi} \right). \tag{2.5}$$

Рассмотрим далее задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}$ (2.2)

$$\hat{L}\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

и совершим замену

$$\varphi_1 = \sqrt{1-p}\, \exp\left(-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right) u_2$$

$$\varphi_2 = \sqrt{1+p}\, \exp\left(-i\frac{\lambda}{1-p^2}x\right) u_1$$

Уравнение (2.6) примет вид:

$$\frac{du_1}{dx} + i\xi u_1 = q(x) u_2 \tag{2.7}$$

$$\frac{du_2}{dx} - i\xi u_2 = -q^*(x) u_1$$

где

$$\xi = \frac{\lambda p}{1-p^2}, \quad q = i(1-p^2)^{-1/2}\psi.$$

Если $q(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то каждое решение системы (2.7) при вещественных ξ однозначно определяется одной из своих асимптотик при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Задача рассеяния для оператора $\hat{L}$ заключается в определении одной из этих асимптотик по заданной другой. Под обратной задачей рассеяния мы будем понимать задачу о восстановлении $q(x)$ по данным задачи рассеяния (т.е. по матрице рассеяния). Прямая и обратная задачи были подробно рассмотрены в /2/, поэтому мы не будем останавливаться на обосновании следующих ниже утверждений.

Функции Йоста $\varphi(x,\xi)$, $\psi(x,\xi)$ определенные как решения (2.7) с асимптотиками

$$\varphi(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

$$\psi(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость ξ при каждом x.

Если $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ - решение (2.7) при вещественном ξ, то $\tilde{u} \overset{\text{onp}}{=} \begin{pmatrix} u_2^* \\ -u_1^* \end{pmatrix}$ - также решение системы (2.7).

Функции $\psi(x,\xi)$, $\tilde{\psi}(x,\xi)$ образуют полный набор для системы (9), поэтому

$$\varphi(x,\xi) = a(\xi)\tilde{\psi}(x,\xi) + b(\xi)\psi(x,\xi). \tag{2.8}$$

Элементы матрицы рассеяния $a(\xi)$, $b(\xi)$ следующим образом выражаются через функции Йоста:

$$a(\xi) = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(x,\xi)$$
$$b(\xi) = (\tilde{\psi}_1\varphi_2 - \tilde{\psi}_2\varphi_1)(x,\xi). \tag{2.9}$$

$a(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости ξ; $a(\xi) \to 1$ при $\xi \to \infty$, $\operatorname{Im}\xi > 0$. Соотношение унитарности для матрицы рассеяния в рассматриваемом случае имеет вид:

$$|a(\xi)|^2+|b(\xi)|^2=1 \qquad (2.10)$$

Нули $a(\xi)$ в верхней полуплоскости соответствуют собственным значениям задачи (2.7); при этом

$$\varphi(x,\xi)=C_\xi\psi(x,\xi) \quad (a(\xi)=0). \qquad (2.11)$$

"Потенциал" $q(x)$ восстанавливается по матрице рассеяния $a(\xi)$ $b(\xi)$ и набору величин C_ξ в каждом нуле $a(\xi)$, $\operatorname{Im}\xi>0$. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи-соотношение (2.10) и аналитичность $a(\xi)$ при $\operatorname{Im}\xi>0$.

Для определения $q(x)$ необходимо решить следующую систему линейных интегральных уравнений на функции $K_1(x,y)$ $K_2(x,y)$:

$$K_1(x,y)=F^*(x+y)+\int_x^\infty K_2^*(x,s)F^*(s+y)\,ds$$

$$K_2^*(x,y)=-\int_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)\,ds \qquad (2.12)$$

где

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{b(\xi)}{a(\xi)}e^{i\xi x}d\xi+\sum\frac{C_k}{a'(\xi_k)}e^{i\xi_k x} \qquad (2.13)$$

Функции K_1, K_2 следующим образом связаны с $\psi(x,\xi)$:

$$\psi_1(x,\xi)=\int_x^\infty K_1(x,y)e^{i\xi y}dy$$

$$\psi_2(x,\xi)=e^{i\xi x}+\int_x^\infty K_2(x,y)e^{i\xi y}dy. \qquad (2.14)$$

Уравнения обратной задачи рассеяния в форме (2.12) являются аналогами уравнения Марченко.

Вычислим скобки Пуассона между элементами матрицы рассеяния. Для определения вариационных производных $\delta a(\xi)/\delta q(x)$,

$\delta a(\xi)/\delta q^*(x)$, $\delta b(\xi)/\delta q(x)$, $\delta b(\xi)/\delta q^*(x)$ воспользуемся представлением (2.9):

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)} = \frac{\delta}{\delta q(x)}\left[\varphi_1(y,\xi)\psi_2(y,\xi) - \varphi_2(y,\xi)\psi_1(y,\xi)\right].$$

Выражение в скобках не зависит от y. Можно, поэтому, положить $y = x+0$. Так как $\psi(x,\xi)$ определяется асимптотикой при $x \to +\infty$, то $\frac{\delta\psi(y,\xi)}{\delta q(x)} = 0$, если $y > x$. Выражение для $\lim\limits_{y\to x+0}\frac{\delta\varphi_{1,2}}{\delta q(x)}$ легко находятся из (2.7):

$$\lim_{y\to x+0}\frac{\delta\varphi_1(y,\xi)}{\delta q(x)} = \varphi_2(x,\xi),\quad \lim_{y\to x+0}\frac{\delta\varphi_2(y,\xi)}{\delta q(x)} = 0 \tag{2.15а}$$

Таким образом $\frac{\delta a(\xi)}{\delta q(x)} = \varphi_2(x,\xi)\psi_2(x,\xi).$

Совершенно аналогично вычисляются все остальные вариационные производные:

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta q^*(x)} = \psi_1(x,\xi)\varphi_1(x,\xi)$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta q(x)} = -\tilde{\psi}_2(x,\xi)\varphi_2(x,\xi) \tag{2.15б}$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta q^*(x)} = -\tilde{\psi}_1(x,\xi)\varphi_1(x,\xi)$$

Для вычисления интегралов, определяющих скобки Пуассона, заметим, что если $u^{(1)}, u^{(2)}$ - два произвольных решения системы (2.7) при $\xi = \xi_1$, а $v^{(1)}, v^{(2)}$ - решения при $\xi = \xi_2$, то

$$\left\{u_1^{(1)}u_1^{(2)}v_2^{(1)}v_2^{(2)} - v_1^{(1)}v_1^{(2)}u_2^{(1)}u_2^{(2)}\right\} = \frac{i}{2(\xi_1-\xi_2)}\times$$
$$\times\frac{d}{dx}\left[\left(u_1^{(1)}v_2^{(1)} - u_2^{(1)}v_1^{(1)}\right)\left(u_1^{(2)}v_2^{(2)} - v_1^{(2)}u_2^{(2)}\right)\right]. \tag{2.16}$$

Соотношение (2.16) непосредственно следует из (2.7). Используя (2.16), нетрудно убедиться, что все возникающие подинтегральные выражения представляют собой полные производные. Вычисляя, например, $\{a(\xi), b(\xi')\}$ мы находим, что

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\frac{\varkappa}{4(\xi-\xi')} a(\xi) b(\xi') + \frac{\varkappa}{4} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2i(\xi-\xi')x}}{\xi'-\xi} a(\xi') b(\xi)$$

Воспользовавшись известным соотношением

$$P\left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{i\xi x}}{\xi}\right) = \pi i \delta(\xi)$$

, получаем

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -\frac{\varkappa}{4(\xi-\xi')} a(\xi) b(\xi') - \frac{\varkappa}{4} \pi i \delta(\xi-\xi') a(\xi) b(\xi).$$

Поступая аналогичным образом, можно найти скобки Пуассона между всевозможными парами элементов матрицы рассеяния, после чего нетрудно убедиться, что величины

$$P_\xi = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \ln \frac{1}{|a(\xi)|^2}, \quad Q_\xi = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \arg b_\xi \qquad (2.17)$$

обладают каноническими "коммутационными соотношениями":

$$\{P_\xi P_{\xi'}\} = \{Q_\xi Q_{\xi'}\} = 0,$$

$$\{P_\xi Q_{\xi'}\} = +\delta(\xi-\xi')$$

Если $a(\xi)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости ξ, то набор P_ξ, Q_ξ $(-\infty<\xi<\infty)$ полный, т.е. $q(x)$ однозначно восстанавливается по данному набору P_ξ, Q_ξ, поскольку он полностью определяет матрицу рассеяния.

В случае, когда $a(\xi)$ имеет N нулей в верхней полуплоскости, которые мы будем считать простыми, переменные P_ξ, Q_ξ должны быть дополнены дискретным набором канонических переменных, связанных с нулями $a(\xi)$.

Пусть $a(\zeta_n)=0$, $\operatorname{Im}\zeta_n>0$ $n = 1,2,\ldots, N$.
В точке $\xi=\zeta_n$ $\varphi(x,\zeta_n) = c_n \psi(x,\zeta_n)$. Для финитного потенциала $q(x)$ $a(\xi)$, $b(\xi)$ аналитичны во всей комплексной плоскости и вариационные производные $\delta c_n/\delta q$, $\delta c_n/\delta q^*$ можно получить аналитическим продолжением $\frac{\delta b(\xi)}{\delta q(x)}$, $\frac{\delta b(\xi)}{\delta q^*(x)}$, что дает

$$\frac{\delta c_n}{\delta q(x)} = -\tilde{\psi}_2(x,\zeta_n)\varphi_2(x,\zeta_n), \quad \frac{\delta c_n}{\delta q^*(x)} = -\tilde{\psi}_1(x,\zeta_n)\varphi_1(x,\zeta_n).$$

Найдем также $\delta\zeta_n/\delta q(x)$, воспользовавшись стандратной теорией возмущений для системы (9)

$$\frac{d\psi_1'}{dx} + i(\zeta+\delta\zeta)\psi_1' = q(x)\psi_2' + \delta q\,\delta(x-z)\psi_2'$$

$$\frac{d\psi_2'}{dx} = i(\zeta+\delta\zeta)\psi_2' - q^*(x)\psi_1'$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$\psi' = \begin{cases} c_1\,\psi(x,\zeta+\delta\zeta), & x > z \\ c_2\,\varphi(x,\zeta+\delta\zeta), & x < z \end{cases}$$

Сшивка решений в точке $x = z$ дает:

$$c_1\psi_1 + c_2\varphi_1 = \delta q\, c_1\psi_2$$

$$c_1\psi_2 - c_2\varphi_1 = 0$$

Нетривиальное решение этой системы существует, если

$$\det\begin{vmatrix} \psi_1 - \delta q\,\psi_2, & -\varphi_1 \\ \psi_2, & -\varphi_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Но} \quad \det\begin{vmatrix} \psi_1 & -\varphi_1 \\ \psi_2 & -\varphi_2 \end{vmatrix} =$$

$= -a(\zeta+\delta\zeta) = -a'(\zeta)\delta\zeta$, откуда находим:

$$\frac{\delta\zeta_n}{\delta q(x)} = -\left(a'(\zeta_n)\right)^{-1}\psi_1(x,\zeta_n)\varphi_1(x,\zeta_n)$$

. Точно также найдем: $$\frac{\delta\zeta_n}{\delta q^*} = -\left(a'(\zeta_n)\right)^{-1}\psi_2(x,\zeta_n)\varphi_2(x,\zeta_n).$$

Теперь нетрудно убедиться, что

$$\{\zeta_n, P_\xi\} = \{\zeta_n\, Q_\xi\} = \{c_n P_\xi\} = \{c_n\, Q_\xi\} = 0$$

$$\{\zeta_n \zeta_{n'}\} = \{c_n c_{n'}\} = 0$$

Кроме того, $\{\zeta_n, c_{n'}\} = 0$ при $n \neq n'$.

Вычислим $\{\zeta_n, c_n\}$.

$$\{\zeta_n, \ln c_n\} = \varkappa \frac{i}{a_n' c_n} \int dx\, \varphi_1(x,\zeta_n)\varphi_2(x,\zeta_n) \qquad (2.18)$$

Вообще

$$\varphi_1(x,\zeta_1)\varphi_2(x,\zeta_2) + \varphi_2(x,\zeta_1)\varphi_1(x,\zeta_2) = i(\zeta_1-\zeta_2)^{-1} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\left(\varphi_1(\zeta_1)\varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)\varphi_1(\zeta_2)\right); \quad \text{при } \zeta \to \zeta'$$

$$2\varphi_1(x,\zeta)\varphi_2(x,\zeta) = i\frac{\partial}{\partial(\zeta-\zeta')}\left[\frac{d}{dx}\left(\varphi_1(\zeta)\varphi_2(\zeta') - \varphi_1(\zeta')\varphi_2(\zeta)\right)\right]_{\zeta=\zeta'}$$

Теперь интегрируем (2.18) в конечных пределах, дифференцируем по $\zeta-\zeta'$; совершаем предельный переход $\zeta \to \zeta'$, после чего устремляем пределы интегрирования к бесконечности, учитывая, что $a(\zeta) = 0$. В результате получим: $\{\zeta_n, \ln c_n\} = -\varkappa/4$

Таким образом, дискретный набор канонических переменных имеет вид:

$$P_n = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\,\zeta_n, \quad Q_n = \sqrt{\frac{2}{\varkappa}} \ln\frac{1}{c_n^2}. \qquad (2.19)$$

Отметим, что переменные (2.19) комплексны.

Совокупность переменных (2.19), (2.17) является полной. Действительно, пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$, $\operatorname{Im}\zeta_n > 0$ – нули $a(\xi)$. Тогда аналитическая в верхней полуплоскости функция $a_1(\xi) = a(\xi)\prod \frac{\xi-\zeta_n^*}{\xi-\zeta_n}$ не обращается в нуль в области $\operatorname{Im}\xi > 0$, следовательно $\ln a_1(\xi)$ аналитичен в этой области. На вещественной оси $\ln a_1(\xi) = \ln|a(\xi)| + i\arg a_1(\xi)$ и аналитичность $\ln a_1(\xi)$ дает:

$$\arg a_1(\xi) = -\frac{1}{\pi} \fint \frac{\ln|a(\xi')|}{\xi'-\xi}\, d\xi'$$

Таким образом, $a(\xi)$ полностью восстанавливается по набору P_ξ $(-\infty < \xi < \infty)$ и P_n, $n = 1, 2, \ldots N$. Величина $b(\xi)$ тривиально определяется из соотношения унитарности и Q_ξ: $b(\xi) = (1 - |a(\xi)|^2)^{1/2} \exp\left(i\pi\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{1/2} Q_\xi\right)$.

Остается найти выражение для гамильтониана H через новые канонические переменные. Для этого представим u_1 из (2.7) в виде $u_1 = \exp(-i\xi x + \Phi(x))$ и, исключая u_2 (полагая при этом, $u_2(-\infty) = 0$), получим уравнение для $\Phi(x)$:

$$2i\xi\Phi'(x) = |q|^2 + \Phi'^2 + q\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}\Phi'\right) \quad (2.20)$$

которое позволяет регулярным образом вычислять коэффициенты асимптотического разложения $\Phi(x,\xi)$ по степеням $1/\xi$: $\Phi'(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/(2i\xi)^n$. Для определения $f_n(x)$ мы имеем следующие из (2.20) рекурентные соотношения:

$$f_{n+1} = q\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{q}f_n\right) + \sum_{j+k=n} f_j f_k, \quad f_1 = |q|^2. \quad (2.21)$$

Функция $\ln a(\xi)$ также допускает асимптотическое разложение по степеням $1/\xi$ при $\xi \to \infty$, $\operatorname{Im}\xi \geq 0$:

$$\ln a(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k/\xi^k$$

Очевидно, что $c_k = (2i)^{-k}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\,dx$. С другой стороны, величины c_k нетрудно выразить через P_ξ (2.17) и P_n (2.19):

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi \xi^{k-1}\,d\xi - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{k/2}\frac{P_n^k - P_n^{*k}}{k} \quad (2.22)$$

В силу рекурентной формулы (2.21) c_k представляют собой полиномы по ψ, ψ^* и их производным по x. Приведем первые четыре c_k:

$$C_1 = \frac{1}{2i}\frac{\varkappa}{2}\int |\psi|^2 dx$$

$$C_2 = -\frac{1}{2i}\frac{\varkappa}{2}\int (\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*) dx$$

$$C_3 = -\frac{1}{(2i)^3}\frac{\varkappa}{2}\int \left(|\psi_x|^2 - \frac{\varkappa}{2}|\psi|^4\right) dx$$

$$C_4 = \frac{1}{(2i)^4}\frac{\varkappa}{2}\int \left(\psi\psi^*_{xxx} + \frac{3}{2}\varkappa\psi\psi^*_x|\psi|^2\right) dx$$

Заметим, что C_3 представляет собой, с точностью до множителя, гамильтониан (2.4) для уравнения (2.1)

Так как все C_k (в их числе и C_3) выражаются только через P_ξ, P_η, а преобразование от ψ, ψ^* к переменным P, Q (2.19), (2.17) очевидно, каноническое, то нелинейное уравнение (2.1) записывается в переменных P, Q в виде (*), т.е. эти переменные есть переменные действие-угол для рассматриваемой системы.

Вместе с уравнением (2.1) полностью интегрируемыми оказываются все нелинейные поля, гамильтонианы которых можно представить в виде линейных комбинаций C_k с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от времени. Например, уравнение, порождаемое гамильтонианом C_4, представляет собой уравнение Кортевега-де-Вриза с кубической нелинейностью.

В заключение настоящего параграфа отметим, что полагая нули $a(\xi)$ простыми, мы нимало не ограничили общности рассмотрения: как нетрудно убедиться, потенциалы $q(x)$, приводящие к кратным нулям $a(k)$, могут быть сколь угодно точно аппроксимированы потенциалами с близкими, но простыми нулями $a(k)$.

§ 3. Переменные угол-действие для нелинейного уравнения Шредингера ($\varkappa < 0$)

Случай $\varkappa < 0$ требует особого рассмотрения, поскольку физически интересные решения уравнения (2.1) с $\varkappa < 0$ принадлежат к классу $|\psi| \to const$ при $|x| \to \infty$. Формализм прямой и обратной задач рассеяния для таких потенциалов, развитый в /3/, существенно отличается от описанного в предыдущем параграфе.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}$ (2.2) $\hat{L}\varphi = E\varphi$ и совершим замену $v_1 = (p-1)^{-1/2} \times \exp(-i\frac{E}{p^2-1}x)\varphi_1$, $v_2 = (p+1)^{-1/2}\exp(-i\frac{E}{p^2-1}x)\varphi_2$. Система $\hat{L}\varphi = E\varphi$ приводится ею к виду:

$$
\begin{aligned}
i\frac{dv_1}{dx} + q^* v_2 &= \lambda v_1 \qquad \lambda = \frac{pE}{p^2-1} \\
-i\frac{dv_2}{dx} + q v_1 &= \lambda v_2 \qquad q = \psi/\sqrt{p^2-1}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Будем предполагать, что $|q| \to 1$ при $|x| \to \infty$. Без ограничения общности можно, также считать, что $q \to 1$ при $x \to +\infty$: при этом, вообще говоря, $q(-\infty) = e^{i\alpha}$.

Роль функций Йоста для системы (3.1) играют решения (3.1) с асимптотиками

$$
\begin{aligned}
\varphi &\to e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\alpha}(\zeta-\lambda) \end{pmatrix}, \quad x \to -\infty \\
\psi &\to e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta-\lambda \end{pmatrix}, \quad x \to +\infty
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $\zeta(\lambda) = \sqrt{\lambda^2-1}$ – двузначная функция λ. Отметим, что если $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ –решение (3.1), то $\tilde{v} \overset{\text{onp}}{=} \begin{pmatrix} v_2^* \\ v_1^* \end{pmatrix}$ – также решение этой системы. Функции ψ, $\tilde{\psi}$ представляют собой полный набор решений (3.1), поэтому $\varphi(x,\lambda,\zeta) = a(\lambda,\zeta)\psi(x,\lambda,\zeta) + b(\lambda,\zeta)\tilde{\psi}(x,\lambda,\zeta)$. При этом, как непосредственно следует из системы (3.1)

$$
a = \frac{W\{\varphi,\tilde{\psi}\}}{2\zeta(\lambda-\zeta)}, \quad b = \frac{W\{\varphi,\psi\}}{2\zeta(\zeta-\lambda)}, \tag{3.3}
$$

где через $W\{u,v\}$ обозначен вронскиан двух решений (3.1): $W\{u,v\} = u_1v_2 - u_2v_1$, который, очевидно, не зависит от x .

Функция $\zeta(\lambda)$ определена на двулистной римановой поверхности с разрезами $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$; на верхнем листе $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. Как показано в /3/, Функции Йоста φ, $\tilde{\varphi}$ аналитичны на верхнем листе римановой поверхности; (3.3) гарантирует, при этом аналитичность $a(\lambda)$ на этом листе. Нули $a(\lambda)$ соответствуют собственным значениям системы (3.1). Из самосопряженности её следует, что они расположены на вещественной оси $-1<\lambda<1$ и являются простыми. Если $a(\lambda_n)=0$, то

$$\varphi(x,\lambda_n)=b_n\tilde{\varphi}(x,\lambda_n) \qquad (3.4)$$

Заметим еще, что $a(\lambda,-\zeta)=a^*(\lambda,\zeta)e^{i\alpha}$, $b(\lambda,-\zeta)=b^*(\lambda,\zeta)e^{i\alpha}$ для вещественных λ. Здесь α есть фаза $q(x)$ при $x\to-\infty$, которая, как оказывается (см./3/), полностью определяется нулями $a(\lambda)$:

$$e^{i\alpha}=\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j+i\sqrt{1-\lambda_j^2}}{\lambda_j-i\sqrt{1-\lambda_j^2}}, \quad a(\lambda_j)=0$$

Рассмотрение обратной задачи рассеяния для системы (3.1) показывает, что $q(x)$ однозначновосстанавливается по наборам $a(\lambda,\zeta)$, $b(\lambda,\zeta)$, собственным значениям λ_n; системы (3.1) и соответствующим величинам b_n (см.(3.4)).

Введение канонических переменных, связанных с матрицей рассеяния системы (3.1), осуществляется совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе. Вычисление вариационных производных от элементов матрицы рассеяния производится на основе представления (3.3). Детали вычислений практически не отличаются от приведенных выше; поэтому мы их опускаем.

Оказывается, что скобки Пуассона (2.5) величин

$$P_\lambda=\frac{1}{\varkappa}\ln|a(\lambda,\zeta)|^2,\quad Q_\lambda=-\frac{2}{\varkappa}\arg b(\lambda,\zeta)$$
$$P_n=\lambda_n,\quad Q_n=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1}{b_n} \qquad (3.5)$$

есть

$$\{P_\lambda,P_{\lambda'}\}=0,\quad \{Q_\lambda,Q_{\lambda'}\}=0,\quad \{P_\lambda,Q_{\lambda'}\}=\delta_{\lambda-\lambda'}.$$

Здесь $\delta_{\lambda-\lambda'}$ есть $\delta(\lambda-\lambda')$ для непрерывного спектра и символ Кронеккера для дискретного.

Значения $a(\lambda,\zeta)$ и $b(\lambda,\zeta)$ в (3.5) берутся на тех границах разреза в λ-плоскости, на которых знак $\zeta(\lambda)$ совпадает со знаком λ. Вся матрица рассеяния очевидным образом восстанавливается по набору P , Q .

Интегралы движения системы (2.1) получаются, как и в случае $\psi \to 0$ при $|x| \to 0$, разложением $\ln a(\lambda)$ по степеням $1/\lambda$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Они имеют вид $\int [f_n(x) - f_n(\infty)] dx$ где f_n определяются из рекуррентных соотношений (2.21).

x x

x

Изложенные выше результаты дают решение проблемы интегрируемости уравнений КДВ, НШ, рассматриваемых на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$, однако, они не применимы на конечных интервалах с какими-либо граничными условиями. В этом случае вопрос об интегрируемости этих систем остается открытым. Можно, тем не менее, привести некоторые соображения в пользу интегрируемости рассматриваемых полей и на конечных интервалах.

Рассмотрим, например, нелинейное уравнение Шредингера на интервале $(0, \ell)$ с периодическими граничными условиями. Нетрудно убедиться (см. /2/), что это уравнение тождественно следующему операторному соотношению

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} = i [\hat{L}, \hat{A}] \qquad \text{(A)}$$

где $\hat{L}$ - одномерный оператор Дирака (2.2) а оператор $\hat{A}$ имеет вид:

$$\hat{A} = -p \frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} |\psi|^2/1+p & i\psi_x^* \\ -i\psi_x & -|\psi|^2/1-p \end{pmatrix}$$

Соотношение (А) и эрмитовость оператора (2.2) гарантирует, при этом, сохранение во времени собственных чисел задачи на собственные значения для оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L} \varphi_n = \lambda_n \varphi_n , \qquad \varphi_n(0) = \varphi_n(\ell) \qquad \text{(B)}$$

Таким образом, мы имеем счетный набор интегралов движения системы (2.1). Покажем, что все λ_n "коммутируют" между собой. Выражение для $\delta\lambda/\delta\psi$, $\delta\lambda/\delta\psi^*$ найдем непосредственно из (В):

$$\delta\lambda_n = \int_0^l \left(\varphi_{n_1}^* \delta\psi^* \varphi_{n_2} + \varphi_{n_2}^* \delta\psi \varphi_{n_1}\right) dx$$

(предполагается, что $\|\psi\| = \left(\int \psi^+ \psi \, dx\right)^{1/2} = 1$; сохранения во времени такой нормировки легко добиться). Таким образом $\delta\lambda_n / \delta\psi = \varphi_{n_2}^* \varphi_{n_1}$, $\delta\lambda_n / \delta\psi^* = \varphi_{n_1}^* \varphi_{n_2}$

Вычисляя теперь скобки Пуассона (2.5) величин λ_n, λ_m и, используя аналог соотношения (2.16), убеждаемся, что для периодической задачи (В) $\{\lambda_n, \lambda_m\} = 0$.

Для динамической системы конечным числом степеней свободы существование коммутирующих между собой интегралов движения в количестве, равном числу степеней свободы, равносильно полной интегрируемости этой системы (теорема Лиувилля). В рассматриваемом случае число степеней свободы счетно; существование счетного набора законов сохранения является, по крайней мере, необходимым условием интегрируемости.

Совершенно аналогичные утверждения можно обосновать и для уравнения КДВ (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Gardner, G. Green, M. Kruskal, R. Miura Phys. Rev. Lett. 19 1005 (1967)
2. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 118 (1971).
3. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Препринт ИЯФ 30-73 (1973).
4. В.И.Карпман
5. С.В.Манаков. ЖЭТФ (в печати).
6. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Функциональный анализ, 5, вып.4, стр.18 (1971).
7. Б.Б.Кадомцев, В.И.Карпман, УФН т.103, вып.2 (1971).
8. R. Miura, C. Gardner, M. Kruskal J. of Math. Phys. v 9 N 8 p 1204 (1968)
9. В.А.Марченко "Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля" "Наукова думка", Киев, 1972.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати I5.8.73г. МН 08436
Усл. 1,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 68 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР.вг