3

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 67 - 73

С.В.Манаков

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА

Новосибирск

1973

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА

С.В.Манаков

АННОТАЦИЯ

В рамках нелинейного параболического уравнения точно решена задача о дифракции электромагнитной волны на плоском экране с параллельными щелями, за которым находится нелинейная среда; найдены пороги образования волноводных каналов.

Аналогичным методом исследуется задача об асимптотике несолитонной части уравнения Кортевега-де-Вриза.

О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФРАКЦИИ ФРАУНГОФЕРА

С.В. Манаков

Нелинейная зависимость показателя преломления среды от поля распространяющейся в ней волны приводит, как известно, к ряду замечательных эффектов. Таким из них, как самофокусировка, входящего в среду излучения и волноводное распространение интенсивных световых пучков посвящено значительное число как экспериментальных, так и теоретических исследований. Эти эффекты специфичны для нелинейных сред. Представляет, однако, интерес и вопрос о влиянии нелинейности среды на такие классические линейные эффекты как, например, дифракция Фраунгофера. До недавнего времени полное теоретическое исследование этих вопросов было невозможно из-за отсутствия соответствующей аналитической техники. Положение изменила работа Захарова и Шабата /1/, в которой был предложен метод обратной задачи рассеяния для нелинейного параболического уравнения, в рамках которого могут быть рассмотрены все перечисленные явления.

В настоящей работе метод, развитый в /1/, применяется к задаче о дифракции волны на экране со щелями, за которым находится нелинейная среда. Получены точные выражения для распределения дифрагированного излучения по направлениям, совпадающие, в пределе малой интенсивности падающей волны, с хорошо известными формулами /2/. Из этих выражений легко находятся положения дифракционных минимумов и максимумов, которые простым образом зависят от нелинейных характеристик среды и интенсивности падающей волны, что позволяет, в принципе, надежно измерять параметры, характеризующие нелинейность среды.

Полученные выражения справедливы вплоть до интенсивностей волны, приводящих к образованию волноводного канала. При этом оказывается, что интенсивность излучения, дифрагированного на нулевой угол ведет себя как $\ln I_{кр}/I_{кр}-I$ при $I \to I_{кр}$ где I - интенсивность падающей волны, а $I_{кр}$ - представляет собой порог рождения волноводного канала.

С математической точки зрения рассматриваемая задача сводится к исследованию асимптотического поведения решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера. Ранее полученные в этом направлении результаты сводились к утверждению, что решение асимптотически стремится к нулю почти всюду. В настоящей работе установлены некоторые интегральные соотношения, не дающие собственно асимптотики решения, но вполне достаточные для рассмотрения задачи о дифракции. Аналогичные соотношения получены и для известного уравнения Кортевега-де-Вриза (КДВ), к которому также применим метод обратной задачи рассеяния /3/.

§ 1. Асимптотические состояния

Двумерная стационарная самофокусировка электромагнитной волны описывается уравнением /4,5/:

$$2ik\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2\frac{\delta n_{нл}}{n_0}|E|^2E \qquad (1)$$

для комплексной огибающей E. Предполагается, что показатель преломления ведет себя как $n = n_0 + \delta n_{нл}|E|^2$ (кубическая нелинейность).

Введем новую переменную $t = z/2k$ и обозначим $\frac{k^2\delta n_{нл}}{n_0}$ через $\varkappa$. В дальнейшем мы ограничимся случаем фокусирующих сред, т.е. будем считать, что $\varkappa > 0$. Уравнение (1) запишется в стандартном виде:

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \varkappa|E|^2E = 0 \qquad (2)$$

Переменную t будем называть "временем", (что весьма удобно, т.к. уравнение (2) описывает и продольную автомодуляцию квазимонохроматической волны /6,7/, где t и есть время).

Метод решения задачи Коши для уравнения (2), предложенный в /1/, заключается в следующем.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\xi u_1 = q(x) u_2$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} - i\xi u_2 = -q^*(x) u_1 \qquad (3)$$

где $q(x) = i(\varkappa/2)^{1/2} E(x,t)$, а ξ – произвольный вещественный параметр. Если начальное условие для уравнения (2) $E(x,0)$ достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$, то каждое решение (3) с асимптотикой $u \to \binom{1}{0} e^{-i\xi x}$ при $x \to -\infty$ имеет определенную асимптотику при $x \to +\infty$, которую мы будем записывать в виде $\begin{pmatrix} a(\xi)\exp(-i\xi x) \\ b(\xi)\exp(i\xi x)\end{pmatrix}$. При этом оказывается (см./1/), что $a(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ξ и $|a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1$ для вещественных ξ.

Первый этап решения задачи Коши состоит в определении $a(\xi)$, $b(\xi)$ (матрицы рассеяния). Знание матрицы рассеяния для системы (3) имеет фундаментальное значение, поскольку оказывается, во-первых, что, если $E(x,t)$ меняется во времени согласно уравнению (2), то $a(\xi)$ от времени не зависит, а $b(\xi,t) = b(\xi,0)\exp(4i\xi^2 t)$; во-вторых, "потенциал" $q(x)$ однозначно восстанавливается по матрице рассеяния, для чего достаточно решить следующую систему линейных интегральных уравнений для функций $K_{1,2}(x,y)$:

$$K_1(x,y) = F^*(x+y) + \int_x^\infty K_2^*(x,s) F^*(y+s)\,ds \qquad (4)$$
$$K_2(x,y) = -\int_x^\infty K_1(x,s) F(s+y)\,ds$$

где x)

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i\xi x}\,d\xi \qquad (5)$$

---

x) Приведенное выражение для F справедливо лишь в отсутствие нулей $a(\xi)$ в верхней полуплоскости ξ. Поскольку появление таких нулей приводит к возникновению волноводного канала, то представление (5), а вместе с ним и все последующие формулы, справедливы при интенсивности падающей волны, недостаточной для рождения волноводного канала.

$q(x)$ выражается через решения системы (4):

$$q(x) = -2K_1(x,x)$$

$$\int_x^\infty |q(s)|^2 ds = -2K_2(x,x) \,. \qquad (6)$$

Получить решение системы (4) в общем случае, очевидно, невозможно. Однако, оказывается возможным эффективное изучение асимптотического поведения решений (4) при $t \to \infty$.

Умножим первое из уравнений (4) на $e^{i\xi y}$, второе на $e^{-i\xi y}$ и проинтегрируем их по y от x до ∞. $\int K_{1,2} e^{i\xi y} dy$ обозначим через $K_{1,2}(x,\xi)$. Для этих величин получим уравнения:

$$K_1(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int d\xi' \frac{b^*(\xi')}{a^*(\xi')} \frac{e^{i(\xi-2\xi')x}}{\xi'-\xi+i0} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int d\xi' K_2^*(x,\xi') \frac{b^*(\xi')}{a^*(\xi')} \frac{e^{i(\xi-\xi')x}}{\xi'-\xi+i0}$$

$$K_2^*(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int d\xi' K_1(x,\xi') \frac{b(\xi')}{a(\xi')} \frac{e^{-i(\xi-\xi')x}}{\xi-\xi'-i0} \qquad (7)$$

При этом мы воспользовались тем, что

$$\int_x^\infty F(s+y)\, e^{-i\xi y} dy = -\frac{1}{2\pi i}\int d\xi' \frac{b(\xi')}{a(\xi')} e^{i\xi' s} \frac{e^{i(\xi'-\xi)x}}{\xi'-\xi+i0}$$

(Выражения типа $\frac{1}{\xi+i0}$ понимаются здесь в смысле $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{\xi+ix}$).

Рассмотрим асимптотику решений системы (7) на прямых $x-vt=\mathrm{const}$, $t\to\infty$. Заметим, предварительно, что нулевой порядок асимптотического разложения интеграла

$$I = \int f(\xi') \frac{e^{i\Phi(\xi')t}}{\xi'-\xi-i0} d\xi'$$

по степеням $1/t$ имеет вид:

$$I = \begin{cases} 2\pi i\, f(\xi) e^{i\varphi(\xi)t} & (\varphi'(\xi) > 0) \\ 0 & (\varphi'(\xi) < 0) \end{cases} \tag{8}$$

Поэтому, при $t \to \infty$ (7) можно записать так:

$$K_1(x,\xi) = c_1^*(\xi) e^{-4i\xi^2 t - i\xi x} + \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' K_2^*(x,\xi') c^*(\xi') \frac{e^{-4i\xi'^2 t + i(\xi-\xi')x}}{\xi' - \xi - i0}$$

$$K_2^*(x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' K_1(x,\xi') c(\xi') \frac{e^{4i\xi'^2 t - i(\xi-\xi')x}}{\xi' - \xi + i0}$$

Здесь $c(\xi) = \dfrac{b(\xi)}{a(\xi)}$, а $c_1(\xi)$, ввиду (8), есть:

$$c_1(\xi) = \begin{cases} c(\xi) & \xi < -V/4 \\ 0 & \xi > -V/4. \end{cases} \tag{9}$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$K_1(x,\xi) = A(\xi) e^{-4i\xi^2 t - i\xi x}, \quad K_2^*(x,\xi) = B(\xi) e^{-i\xi x}$$

Используя (8) получим для A и B:

$$\begin{aligned} A(\xi) &= c_1^*(\xi)\left(1 + B(\xi)\right) \\ B(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' \frac{A(\xi') c(\xi')}{\xi' - \xi + i0} \end{aligned} \tag{10}$$

Решение системы (10) уже может быть найдено в общем виде. Именно, рассмотрим аналитическую в верхней полуплоскости функцию $a_1(\xi)$, не имеющую там нулей, такую, что $|a_1|$ равен $|a|$, если $\xi < -v/4$ и $|a_1(\xi)| = 1$ при $\xi > -v/4$. Пусть, далее, $b_1 = c_1 a_1$. Тогда как нетрудно убедиться, $B(\xi) = a_1^*(\xi) - 1$, $A(\xi) = b_1^*(\xi)$.

Очевидно, что это решение удовлетворяет первому из уравнений (10). Проверим выполнение последнего. Его правая часть есть

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{b_1^*(\xi')c(\xi')}{\xi'-\xi+i0}d\xi' = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{|b_1|^2}{a_1}\frac{d\xi'}{\xi'-\xi+i0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1-|a_1|^2}{a_1}\frac{d\xi'}{\xi'-\xi+i0} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(1/a_1-1)-(a_1^*(\xi')-1)}{\xi'-\xi+i0}d\xi'$$

Так как $a_1(\xi)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости и $a_1 \to 1$ при $\xi \to \infty$, то $\int (1/a_1 - 1)\, d\xi' / \xi'-\xi+i0 = 0$. Для оставшегося интеграла контур интегрирования может быть замкнут в нижней полуплоскости, т.к. $a_1^*(\xi^*)$ является там аналитической функцией ξ. При этом $-\frac{1}{2\pi i}\int \frac{a_1^*(\xi')-1}{\xi'-\xi+i0}d\xi' = a_1^*(\xi)-1$, т.е. второе из уравнений (10) также выполняется.

Остается найти $a_1(\xi)$, зная модуль этой функции на вещественной оси:

$$|a_1(\xi)| = \begin{cases} |a(\xi)| & \xi < -v/4 \\ 1 & \xi > -v/4 \end{cases} \qquad (12)$$

Так как $a_1(\xi)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, то $\ln a_1$ аналитичен при $\mathrm{Im}\,\xi > 0$. На вещественной оси $\ln a_1(\xi) = \ln a_1 + i\arg a_1$ и $\arg a_1(\xi)$ легко находится:

$$\arg a_1(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-v/4}\frac{\ln|a_1(\xi')|}{\xi'-\xi}d\xi' \qquad (13)$$

Итак, мы нашли $K_{1,2}(x,\xi)$. $K_2(x,\xi) = (a_1(\xi)-1)e^{i\xi x}$.

Совершая Фурье-преобразование по ξ найдем $K_2(x,x)$:

$$K_2(x,x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{y\to x+0}\int K_2(x,\xi)e^{-i\xi y}d\xi$$

Последний интеграл определяется вычетом функции $a_1(\xi)$ на бесконечности, который легко находится из (13). В результате имеем:

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ x-vt=\mathrm{const}}} K_2(x,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-v/4} \ln\frac{1}{|a(\xi)|}\,d\xi$$

Используя (6) находим, что

$$\lim_{t\to\infty}\int_{x_0+vt}^{\infty} |q(s,t)|\,ds = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-v/4} \ln\frac{1}{|a(\xi)|}\,d\xi \qquad (14)$$

Правая часть (14) представляет собой "часть волнового пакета", движущуюся со скоростью большей, чем v. Подинтегральное выражение в левой части, с точностью до множителя, совпадает с каноническими действиями для гамильтоновской системы (2) (см./7/). Соотношение (14) показывает, что эти канонические действия просто связаны с асимптотическим состоянием системы.

Выражения (12), (13) для $a_1(\xi)$ и $b_1(\xi)$, равное $c_1(\xi)a_1(\xi)$ дают нам, по сути дела, матрицу рассеяния на части потенциала, движущейся со скоростью больше v, что позволяет установить множество соотношений типа (14) для интегралов от некоторых полиномов по $q(x)$ и её производным. Однако это уже выходит за рамки настоящей работы.

Соотношения (14) достаточно для решения задачи о дифракции нелинейной волны на экране со щелью (или любой системы щелей). Так как $t = z/2k$, то (14) дает нам, по сути дела, интегральную интенсивность дифрагированного излучения на углы, большие, чем $\operatorname{arctg}\frac{v}{2k}$. Поскольку уравнение (1) применимо только для рассмотрения дифракции на малые углы, что полагая угол $\theta \ll 1$, получаем простое выражение для интенсивности излучения, дифрагированного в интервал углов от θ до $\theta+d\theta$

$$dI(\theta) = \frac{k}{\pi\varkappa}\ln\frac{1}{|a(-\frac{k\theta}{2})|^2}\,d\theta \qquad (15)$$

§ Дифракция на щели

Применим полученные выше общие соотношения к задаче о дифракции на щели. Пусть экран расположен в плоскости $z=0$; а щель представляет собой полосу $0<x<l$. Поле в плоскости экрана будем считать заданным:

$$E(x)=\begin{cases} 0 & x<0,\ x>l \\ E_0 & 0<x<l. \end{cases} \tag{16}$$

Матрица рассеяния для системы (3) с потенциалом $q(x)$ вида (16) легко находится. Простые вычисления дают:

$$a(\xi)=\frac{1}{2\chi(\xi)}\left[(\chi+\xi)e^{-i\chi l}+(\chi-\xi)e^{i\chi l}\right]e^{i\xi l} \tag{17}$$

где $\chi(\xi)=\operatorname{sgn}\xi\,(\xi^2+|q_0|^2)^{1/2}$

Таким образом

$$\frac{1}{|a(\xi)|^2}=\frac{\xi^2+|q_0|^2}{\xi^2+|q_0|^2\cos^2\chi l}$$

Подставляя полученное выражение в (15) получим распределение интенсивности дифрагированного излучения по направлениям

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta}=\frac{k}{\pi æ}\ln\left\{\frac{\frac{k^2\theta^2}{4}+|q_0|^2}{\frac{k^2\theta^2}{4}+|q_0|^2\cos^2\left[l\left(\frac{k^2\theta^2}{4}+|q_0|^2\right)^{1/2}\right]}\right\} \tag{18}$$

где $|q_0|^2=æ/2\cdot I/l$, а I - интегральная интенсивность волны, падающей на щель: $I=\int|E_0|^2dx=|E_0|^2 l$.
В пределе $æ\to 0$ имеем из (18):

$$dI(\theta)=\frac{2I_0}{\pi l k}\,\frac{\sin^2\frac{kl\theta}{2}}{\theta^2}\,dI \tag{19}$$

что совпадает с известным выражением для фраунгоферовской дифракции (см.,например,/2/).

Нули (18) находятся в точках по θ , где

$$\cos^2 l\left(\frac{(k\partial)^2}{4}+|q_0|^2\right)^{1/2} = 1$$, т.е.

$$\left(\theta^2_{min}\right)_n = \frac{4n^2\pi^2}{k^2 l^2} - \frac{2\delta n_{нл} I_0}{l} \qquad (20)$$

В линейной теории

$$\left(\theta^2_{л.min}\right)_n = \frac{4n^2\pi^2}{k^2 l^2}$$, т.о.

$$\left(\theta^2_{min}\right)_n = \left(\theta^2_{л.min}\right)_n - \frac{2\delta n_{нл} I_0}{l} \qquad (21)$$

Нетрудно убедиться, что точно такое же соотношение имеет место и для положения дифракционных максимумов, т.е.

$$\left(\theta^2_{max}\right)_n = \left(\theta^2_{л.max}\right)_n - \frac{2\delta n_{нл} I_0}{l}$$

Важно отметить, что величина сдвига максимума или минимума не зависит от интегральной интенсивности. Все определяется величиной $|E_0|^2$ в плоскости экрана.

Как следует из (18), интенсивность в дифракционном максимуме $\theta = 0$ ведет себя как $-\frac{k}{\pi æ} \ln \cos^2\left(I_0 \frac{læ}{2}\right)^{1/2}$.

Это выражение обращается в бесконечность при $\frac{I_0 læ}{2} = \frac{\pi^2}{4}$, т.е.

$$I_{кр} = \frac{\pi^2}{2l} \frac{n_0}{\delta n_{нл} k^2} \qquad (22)$$

При $I_0 \to I_{кр}$ интенсивность дифракции на нулевой угол ведет себя как

$$\left.\frac{dI}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{2k}{\pi æ} \ln \frac{2\pi}{(I_{кр}-I)læ}$$

Критическое значение интенсивности (22) представляет собой порог рождения однородного волноводного канала, найденный в /8/. Отметим, наконец, что в соответствии со сказанным выше, все результаты настоящего параграфа применимы в докритическом режиме, т.е. при $0 < I < I_{кр}$.

§ 3. Дифракция на плоской решетке

Рассмотрим теперь дифракцию на решетке, т.е. системе N одинаковых щелей; расстояние между центрами соседних щелей обозначим через L. Считаем, как и выше, поле в плоскости экрана заданным, полагая $E(x)$ равным нулю, если x не попадает в какую-либо щель, и $E(x) = E_0$ в противном случае. Матрица рассеяния системы (3) с $q(x)$ указанного вида представляется в виде произведения матриц рассеяния на потенциалах типа (16). Это обстоятельство позволяет найти $|a(\xi)|^2$:

$$|a(\xi)|^2 = 1 - \frac{|q_0|^2}{\xi^2 + |q_0|^2} \sin^2 \chi l \, \frac{\sin^2 N\lambda}{\sin^2 \lambda} \qquad (23)$$

Здесь l - ширина щели, $|q_0|^2 = \frac{\varkappa}{2}|E_0|^2$, $\chi^2(\xi) = \xi^2 + |q_0|^2$, а величина λ есть $\lambda = \arccos\left(\cos \chi l \cos \xi(L-l) - \xi/\chi \sin \chi l \sin \xi(L-l)\right)$

Распределение интенсивности дифрагированного излучения по направлениям дается общим выражением (15). Переход к линейному пределу можно произвести следующим образом. Если $\varkappa \to 0$ то $\chi \to \xi$; при этом, как легко убедиться, $\lambda = \xi L$. Разлагая, далее, $\ln 1/|a(\xi)|^2$ по степеням $\varkappa$ получим хорошо известное выражение (см./2/)

$$\frac{dI(\theta)}{d\theta} = \frac{2I_{tot}}{\pi N k l} \, \frac{\sin^2 \frac{kl\theta}{2}}{\theta^2} \, \frac{\sin^2 \frac{NkL\theta}{2}}{\sin^2 \frac{kL\theta}{2}}$$

Здесь I_{tot} - полная интенсивность света, падающего на все щели.

Вернемся к нелинейной задаче. Очевидно, что интенсивность дифракции на нулевой угол ведет себя как

$$\left.\frac{dI}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{k}{\pi \varkappa} \ln \frac{1}{\cos^2 N|q|\ell}$$

Это выражение обращается в бесконечность при $N|q|\ell = \pi/2$. При этом полная интенсивность излучения, падающая на щель есть $I_{кр} = \pi^2/2\varkappa N\ell$. При интенсивностях, превосходящих указанное значение образуется волноводный канал (которому соответствует δ -образная особенность в $dI/d\theta$. Любопытно отметить, что как пороговое значение интенсивности, так и зависимость $dI/d\theta|_{\theta=0}$ от I_{tot} для системы N щелей ширины ℓ в точности совпадает с теми же величинами, найденными в предыдущем параграфе для одной щели, ширина которой равна $N\ell$. Этот результат, впрочем, становится совершенно очевидным, если обратиться к системе (3) и положить в ней $\xi = 0$. При этом в тех областях, где $E=0$ $du_{1,2}/dx = 0$; по этой причине $a(0)$ вообще не зависит от взаимного расположения щелей. Таким образом мы приходим к важному выводу, что для произвольной совокупности щелей интенсивность дифракции на нулевой угол будет той же самой, что и для одной щели с шириной, равной сумме ширин всех щелей. В частности и величина порога образования волноводного канала зависит только от суммарной ширины щелей.

§ 4. Асимптотика несолитонной части решения уравнения КДВ

Уравнение Кортевега-де-Вриза (КДВ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (24)$$

также принадлежит к числу уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния /3/. С этим уравнением связан одномерный оператор Шредингера, задачу на собственные значения для которого мы будем записывать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi + k^2\psi = 0 \qquad (25)$$

Решение (25), имеющее асимптотику при $x \to +\infty$ $\psi \to e^{ikx}$ на $-\infty$ по x имеет вид:

$$\psi \simeq a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx} \tag{26}$$

При этом, если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (24), то $a(k)$ от времени не зависит, а $b(k,t) = b(k,0)e^{-8ik^3t}$. Величины $a(k)$ и $b(k)$ связаны известным соотношением унитарности

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1 \tag{27}$$

Кроме того, хорошо известно, что $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной k. Потенциал $u(x)$ однозначно восстанавливается по матрице рассеяния $a(k)$, $b(k)$ для чего достаточно решить уравнение Марченко /9/

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_{-\infty}^{x} K(x,s)F(s+y)\,ds = 0 \tag{28}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx}\,dk \tag{29}$$

а $K(x,y)$ связано с $u(x)$:

$$\int_{-\infty}^{x} u(s)\,ds = -2K(x,x) \tag{30}$$

Как и в § 1, в выражении для $F(x)$ (29) мы не учли члены, связанные с возможными нулями $a(k)$ в верхней полуплоскости k, которым соответствуют солитоны. Однако в рассматриваемом случае учет солитонов не представляет труда, поскольку все солитоны уравнения КДВ (24) имеют положительные скорости; несолитонная же часть движется в противоположном направлении. По этой причине солитонная и несолитонная части решения могут рассматриваться независимо; при этом в (29) вместо $a(k)$ достаточно подставить аналитическую функцию $a_1(k) = \prod \frac{k+i\varkappa_n}{k-i\varkappa_n} a(k)$, где $i\varkappa_n$ – нули $a(k)$ в верхней полуплоскости; $a_1(k)$, т.о. не имеет нулей в области $\operatorname{Im} \varkappa > 0$. Можно, поэтому без ограничения общности считать, что $a(\varkappa)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Обозначим, далее $\int\limits_{-\infty}^{x} k(x,y)\, e^{i\xi y} dy = K(x,\xi)$. Для $K(x,\xi)$ получим из (28) уравнение

$$K(x,\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' c(\xi') \frac{e^{i(\xi-\xi')x}}{\xi-\xi'-i0} + \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' c(\xi') K^*(x,\xi') \frac{e^{i(\xi-\xi')x}}{\xi-\xi'-i0} = 0$$

где

$$c(\xi) = \frac{b(\xi,t)}{a(\xi)} = \frac{b(\xi,0)}{a(\xi)}\, e^{-8i\xi^3 t} \tag{32}$$

Рассмотрим теперь асимптотику $K(x,\xi)$ на прямых $x - vt = \text{const}$, $t \to \infty$, $v < 0$. Пользуясь описанной в §1 процедурой получим:

$$K(x,\xi) + c_1(\xi) e^{-i\xi x - 8i\xi^3 t} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int d\xi' K(x,-\xi') c(\xi',t) \frac{e^{i(\xi-\xi')x}}{\xi-\xi'-i0} = 0. \tag{33}$$

Здесь

$$c_1(\xi) = \begin{cases} c(\xi) & \xi^2 > -v/12 \\ 0 & \xi^2 > -v/12 \end{cases}$$

Ищем, далее, решение получившегося уравнения в виде $K(x,\xi) = A(\xi) e^{i\xi x} + B(\xi) e^{-i\xi x - 8i\xi^3 t}$. Вычисляя возникающий интеграл от быстроосциллирующей функции, получаем для $A(\xi)$ и $B(\xi)$:

$$B(\xi) = -c_1(\xi)\left(1 + A^*(\xi)\right)$$

$$A(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{B^*(\xi') c(\xi')}{\xi'-\xi+i0}\, d\xi' \tag{34}$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что решение этой системы имеет вид:

$$A(\xi) = a_1^*(\xi) - 1\ , \quad B(\xi) = -c_1 a_1\ , \tag{35}$$

где $a_1(\xi)$ – аналитическая в верхней полуплоскости ξ функция, не имеющая там нулей, модуль которой на вещественной оси есть:

$$|a_1(\xi)| = \begin{cases} |a(\xi)| & \xi^2 > -V/12 \\ 1 & \xi^2 < -V/12 \end{cases} \tag{36}$$

Восстанавливая по (36) $\arg a_1(\xi)$ найдем:

$$\arg a_1(\xi) = \frac{2\xi}{\pi} \int_{\sqrt{-V/12}}^{\infty} \frac{\ln|a(\xi')|}{\xi'^2 - \xi^2}\, d\xi' \tag{37}$$

Выражения (35), (36), (37) дают матрицу рассеяния на части потенциала, движущейся со скоростью, меньшей V. Найдем теперь $K(x,x)$.

$$K(x,x) = \lim_{y \to x+0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a_1^*(\xi) - 1)\, e^{i\xi(x-y)}\, d\xi$$

Производя интегрирование в пределе $y \to x$ и учитывая (30) получаем окончательно:

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{x_0+Vt} u(s,t)\, ds = -\frac{2}{\pi} \int_{\sqrt{-V/12}}^{\infty} \ln|a(k)|^2\, dk \tag{38}$$

Соотношение (38) является прямым аналогом (14).

Хорошо известно, что уравнение КДВ (24) имеет счетный набор интегралов движения (см., например, /10/), имеющих вид некоторых интегралов $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} I_n\{u(x)\}\, dx$ от полиномов по

$u(x)$ и её производным. Все эти интегралы движения могут быть получены путем асимптотического разложения, не зависящей от времени величины $\ln a(k)$ по степеням $1/k$ и последующим вычислением коэффициентов этого разложения непосредственно из задачи на собственные значения (25). Это приводит, как известно, /11/ к следующей связи :

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_n\{u(x)\}dx = \int_0^{\infty} k^{2n} \ln|a(k)|^2 dk. \qquad (39)$$

Воспользовавшись теперь асимптотическим видом матрицы рассеяния (35)-(37) получим асимптотическое обобщение (39):

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{x_0+Vt} I_n\{u(x)\}dx = \int_{\sqrt{-V/12}}^{\infty} k^{2n} \ln|a(k)|^2 dk. \qquad (40)$$

Таким образом мы приходим к следующему выводу: если $\int F(u)dx$ является точным интегралом движения уравнения КДВ (24), то уравнение КДВ имеет асимптотические интегралы (т.е. величины, сохраняющиеся при $t\to\infty$) вида $\int_{V_1t+x_1}^{V_2t+x_2} F(u)\,dx$.

Отметим еще, что $\ln|a(k)|$ представляет собой, с точностью до множителя, канонические действия для уравнения КДВ, введенные в /11,7/. Соотношения (38), (40) позволяют придать этим действиям смысл "чисел заполнения" асимптотических состояний.

В заключение автор выражает благодарность В.Е.Захарову за полезное обсуждение

Литература

1. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, ЖЭТФ 61, 118 (1971).
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Теория поля".
3. C.S. Gardner, G Green, M. Kruskal, R. Miura Phys. Rev. Lett. 19 1095 (1967).
4. В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ, 2, 222 (1965).
5. P.L. Kelley Phys. Rev. Lett 15 1095 (1965)
6. В.И.Карпман. Письма ЖЭТФ, 6, 329 (1967).
7. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, ТМФ (в печати).
8. С.В.Манаков, ЖЭТФ (в печати).
9. В.А.Марченко "Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля" "Наукова думка", Киев, 1972.
10. R. Miura G. Gardner M. Kruskal J. of Math. Phys. 9 N8 p.1204 (1968)
11. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддев. Функциональный анализ, 5, вып.4, стр.18 (1971).

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 15.8.73 № МН 08437
Усл. 0,8 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 67

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР