1

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 65 - 73

А.М.Кондратенко

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ

Новосибирск

1973

А.М.Кондратенко

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ

АННОТАЦИЯ

Изучено деполяризующее влияние встречного пучка на поляризацию частиц в накопителях, обязанное стохастическому перемешиванию траекторий частиц во внешнем поле (например,из-за квантовых флуктуаций синхротронного излучения). Получены формулы для степени и времени установления поляризации электронов (позитронов) в накопителях со встречными пучками,позволяющие, в частности, находить ограничение на максимальное число встречных частиц, не разрушающих радиационную поляризацию пучка.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk

A.M.Kondratenko

Stability of Colliding Beams' Polarization

Abstract

The depolarization influence of colliding beam on a particle polarization in storage rings due to stochastic mixing of the particles' trajectories in an external field (e.g. because of quantum fluctuations of synchrotron radiation) is investigated. Formulae are obtained for the relaxation time and the degree of equilibrium polarization of electrons (positrons) in storage rings with colliding beams. In particular, they can be employed to find the limitation on the maximum number of colliding particles which does not destroy the radiative polarization of the beam.

1. Как известно, под действием синхротронного излучения частицы (электроны, позитроны) при движении в накопителе поляризуются /1-6/. При надлежащем выборе параметров движения в накопителе, частицы будут самополяризоваться со степенью поляризации близкой к единице[x)]. В настоящее время это наиболее доступный (и перспективный) способ получения поляризованных электронов в накопителях.

На следующем этапе представляет интерес исследовать радиационную поляризацию в накопителях со встречными пучками. Существенную роль в процессе релаксации спинов, как и в орбитальном движении частиц, играют, из-за сильной нелинейности поля встречных сгустков, резонансы с высокими номерами. Плотность спиновых резонансов, пропорциональная числу встречных частиц, очевидно, не должна быть слишком высокой для существования области устойчивости радиационной поляризации. На основании результатов работы, следует ожидать, что , выбирая должным образом параметры траекторий частиц, можно получить поляризованные электроны с числом встречных частиц, соответствующим максимальной светимости накопителя.

В электронных накопителях направление равновесной поляризации, обычно, близко к направлению управляющего магнитного поля и слабо зависит от азимута движения частиц. Однако, введением специального поля можно, при незначительном искажении равновесной траектории частицы, создавать в данном месте орбиты, практически, любое направление поляризации, например, вдоль скорости движения /7/. Имея в виду такие ситуации, исследование производится при произвольной зависимости направления равновесной поляризации от азимута.

2. Напомним основные свойства движения спина частицы в накопителе, отвлекаясь от радиационных процессов. Как известно, при условии классичности движения, поведение вектора спина $\vec{S}$ описывается уравнением Баргмана-Мишеля-Телегди (скорость света $C=1$) /7-9/:

---

x) Формулы для направления степени равновесной поляризации электронов (позитронов) и времени ее установления в стационарных условиях движения в накопителях с произвольными полями, без ограничений на близость спиновых резонансов, получены в одной из последних работ /6/.

$$\dot{\vec{S}} = [\vec{W}_л \vec{S}]$$

$$\vec{W}_л = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} + \gamma\frac{q'}{q_0}\right)[\vec{v}\dot{\vec{v}}] - \frac{q}{\gamma}\frac{\vec{v}(\vec{H}\vec{v})}{v^2} - \frac{q}{\gamma}\frac{[\vec{v}[\vec{H}\vec{v}]]}{v^2} \quad (1)$$

где $q = q_0 + q' = \frac{e}{m} + q'$ –гиромагнитное отношение, q' –его аномальная часть $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$; $\vec{v}$, $\dot{\vec{v}}$ – скорость и ускорение частицы в электромагнитном поле $\vec{E}$, $\vec{H}$.

При движении по равновесной замкнутой траектории $\vec{W}_л$ становится периодической функцией обобщенного азимута движения частицы θ. Как следует из результатов работы /7/, при этом существует периодическое направление $\vec{n}(\theta) = \vec{n}(\theta + 2\pi)$,имеющее смысл направления равновесной поляризации частиц[x)].

Проекция спина $S_{\vec{n}} = \vec{S}\vec{n}$ равновесной частицы,очевидно, остается вдоль траектории постоянной. В силу малости разброса траекторий частиц в пучке, проекция $S_{\vec{n}}$ неравновесной частицы может существенно измениться за большое число оборотов в накопителе вблизи спиновых резонансов. По фазам прецессий спинов вокруг $\vec{n}$ происходит размешивание из-за разброса частот прецессий. Удобно поэтому, для описания движения спина неравновесной частицы, переписать уравнение (1) в подвижной системе ортов $\vec{n}(\theta)$, $\vec{e}_1(\theta)$, $\vec{e}_2(\theta)$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ –произвольно выбранные поперечные к $\vec{n}$ периодические орты. Уравнение для проекций спина $\vec{S} = (S_{\vec{n}}, S_{\vec{e}_1}, S_{\vec{e}_2})$ на подвижные орты имеют вид /10/:

$$\frac{d\vec{S}}{d\theta} = [(\nu\vec{n} + \vec{w})\vec{S}] , \quad \vec{w} = \frac{\vec{W}_л}{\dot{\theta}} - \frac{\vec{W}_s}{\dot{\theta}_s} \quad (2)$$

где $\vec{W}_s(\theta)$ значение $\vec{W}_л$ на равновесной орбите, $\dot{\theta}_s$ –равновесная частота обращения частицы. Орты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ выбраны так,чтобы ν –частота прецессия спина равновесной частицы вокруг $\vec{n}$ (изме-

x) При движении поперек постоянного по направлению магнитного поля $\vec{n}$, очевидно, направлено по полю.

ренная в единицах $\dot{\theta}_s$) была постоянна (при движении поперек постоянного по направлению магнитного поля $\nu = \gamma q'/q_0$). Вектор $\vec{w}$ обязан отклонению от равновесной орбиты. При $\vec{w} = 0$ уравнение (2) описывает равномерную прецессию спина вокруг $\vec{n}$.

Наиболее сильное воздействие на спиновое движение возмущение $\vec{w}$ оказывает вблизи спиновых резонансов, когда ν близка к целочисленной комбинации из частот орбитального движения частицы. Пусть $|w_k|$ и ε_k обозначают мощность резонанса и расстояние до него. В линейном по $\vec{w}$ приближении x):

$$w_k = \langle \vec{w}\vec{e} \, exp(-i\Psi_k) \rangle_I$$

$$\varepsilon_k = \nu + \langle \vec{w}\vec{n} \rangle_I - K_\theta - K_\alpha \nu_\alpha$$

где $\vec{e} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$, $\Psi_k = K_\theta \theta + K_\alpha \psi_\alpha$; ψ_α, ν_α -фазы и частоты бетатронных и синхротронных колебаний частицы, K_θ, K_α -целые числа; скобки $\langle \ldots \rangle_I$ означают усреднение по θ , ψ_α. Величины w_k и ε_k являются функциями переменных действий орбитального движения I_α.

Вблизи уединенного резонанса достаточно учесть искажение движения спина лишь одной гармоникой w_k . При этом задача о движении спина сводится к движению к постоянном поле /10/

$$\vec{h} = \varepsilon_k \vec{n} + Re \, w_k^* \vec{e}_k$$

относительно "резонансной" системы координат $\vec{n}$, $\vec{e}_k = \vec{e} \cdot e^{-i\Psi_k}$ вращающейся вокруг $\vec{n}$ с частотой $K_\theta + K_\alpha \nu_\alpha$

Решение очевидно: спин в "резонансной" системе медленно прецессирует вокруг $\vec{h}$ с постоянной угловой скоростью $h = (|w_k|^2 + \varepsilon_k^2)^{1/2}$. Размешивание спинов частиц может происходить лишь в резонансной области, когда $|\varepsilon_k| \lesssim |w_k|$

В нерезоансной ситуации ($|\varepsilon_k| >> |w_k|$) $S_{\vec{n}} = const$ и, после размешивания по фазам прецессий спинов, поляризация бу-

x) Об определении w_k в высших приближениях см. /10/.

дет повторяться в заданном месте орбиты:

$$\langle S \rangle = \langle S_{\vec{n}} \rangle \vec{n}(\theta) \rangle$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по частицам в пучке.

При учете радиационных процессов $S_{\vec{n}}$ будет испытывать медленное изменение, приближаясь к равновесному значению. Степень равновесной поляризации ζ_0 и время её установления τ_p для электронов (позитронов) были получены в /5/ при условии x)

$$|\varepsilon_k| >> max\ (\tau_r^{-1}, |w_k|) \tag{3}$$

где τ_r -время радиационного перемешивания траекторий частиц ($\tau_r^{-1} \sim \gamma^3 |\dot{\vec{v}}| e^2/m$). Формулы для τ_p^{-1}; ζ_0 при этом имеют вид:

$$\tau_p^{-1} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \hbar q_0^2 \gamma^5 \dot{\theta}_s^{-1} \langle |\dot{\vec{v}}|^3 \left[1 - \frac{2}{9}(\vec{n}\vec{v})^2 + \frac{11}{18}\left(\gamma \frac{\partial \vec{m}}{\partial \gamma}\right)^2\right] \rangle$$

$$\zeta_0 = \frac{8}{5\sqrt{3}} \langle |\dot{\vec{v}}|^2 [\dot{\vec{v}}\vec{v}] \left(\vec{n} - \gamma \frac{\partial \vec{m}}{\partial \gamma}\right) \rangle / \langle |\dot{\vec{v}}|^3 \left[1 - \frac{2}{9}(\vec{n}\vec{v})^2 + \frac{11}{18}\left(\gamma \frac{\partial \vec{m}}{\partial \gamma}\right)^2\right] \rangle \tag{4}$$

Здесь $\hbar$ - постоянная Планка, $\vec{m}$ -направление оси квантования спина неравновесной частицы, мало отличающееся в нерезонансном случае от $\vec{n}$, $\gamma \frac{\partial \vec{m}}{\partial \gamma} = Re\, \vec{e}\, \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum\limits_{K} \frac{w_K^*}{\varepsilon_K} exp(-i \Psi_K)$

Рассмотрим ситуацию со встречным сгустком, создающим сильно неоднородное коллективное поле. При этом мощности резонансов довольно слабо уменьшаются с повышением чисел K_α. Увеличивается также разброс расстройки $\Delta\varepsilon_K$ по амплитудам колебаний частиц в пучке в основном из-за среднего сдвига бетатронных частот ν_α встречным сгустком. В этом случае всегда существуют гармоники w_K, для которых условие (3) нарушается,

x) Время измеряем в единицах $\dot{\theta}_s^{-1}$

что приводит к практической необходимости исследовать резонансную область.

Пусть $w_i(I)$, $\varepsilon_i(I)$ – ширина и расстройка резонанса для которого (3) не выполняется, зависящие, для простоты, от одной переменной – переменной действия I, например, радиальных колебаний частиц в пучке. При $w_i=0$ время поляризации и её степень находятся по формулам (4). Рассматриваемый резонанс оказывает деполяризующее воздействие, мощность которого характеризуется обратным временем деполяризации τ_d^{-1} пучка, определяемого квантовыми скачками импульса частиц при излучении. Равновесная степень поляризации

$$\zeta = \zeta_0 \frac{\tau_d}{\tau_p+\tau_d} \tag{5}$$

очевидно, будет устанавливаться за время $\tau_p\tau_d/(\tau_p+\tau_d)$.

Время τ_d можно находить из простых соображений. Случай, когда разброс $\Delta\varepsilon_i \leq |w_i|$ исследован в /11/ и может представиться для наиболее мощных линейных резонансов ($\sum\limits_{\alpha=1} |K_\alpha| = 1$), в области которых происходит деполяризация пучка ($\tau_d \ll \tau_p$). Для сохранения равновесной поляризации, очевидно, необходимо отстроиться, по крайней мере, от линейных резонансов на достаточные расстояния, что обычно не представляет труда.

При $\Delta\varepsilon_i \gg |w_i|$ деполяризующее воздействие резонанса можно учесть как результата его последовательных некоррелированных прохождений, обязанных процессам радиационного перемешивания траекторий частиц во внешнем поле.

Пусть I_i –резонансное значение I, при котором $\varepsilon_i(I)=0$. Скорость прохождения резонанса $\dot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{dI}\dot{I} \sim \Delta\varepsilon_i \tau_z^{-1}$

Выделяется два случая

а) медленное прохождение $|w_i|^2 \gtrsim |\dot{\varepsilon}_i|$

При этом в результате уже однократного прохождения резонанса проекция $S_{\vec{n}}$ существенно изменяется /10,12/, и полное исчезновение начальной поляризации, таким образом, происходит за время $\sim \tau_z$ ($\tau_p \sim \tau_z/\nu^2 \gg \tau_z$, ν –равновесный радиационный угловой размер пучка).

б) Быстрые прохождения (типичная ситуация со встречным пучком) $|w_i|^2 \ll |\dot{\mathcal{E}}_i|$

Если отвлечься от поляризующего механизма (не связанного с рассматриваемым резонансом), то изменение $S_{\vec{n}}$ при однократном прохождении выражается формулой /10,12/:

$$(\Delta S_{\vec{n}}) = \sqrt{\vec{S}^2 - S_{\vec{n}}^2}\,\sqrt{2\pi\, |w_i|^2/|\dot{\mathcal{E}}_i|}\,\cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{4}\right)$$

где φ_i - значение фазы прецессии спина в момент прохождения резонанса; w_i, $\mathcal{E}_i$ - здесь значения при $I = I_i$. Поскольку последовательные прохождения происходят некоррелированно, выражение для средней скорости изменения $S_{\vec{n}}$ имеет вид:

$$\dot{S}_{\vec{n}} = \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial}{\partial S_{\vec{n}}}\overline{(\Delta S_{\vec{n}})^2} = -\pi\varkappa\frac{|w_i|^2}{|\dot{\mathcal{E}}_i|} S_{\vec{n}} \qquad (6)$$

где $\varkappa$ - число прохождений частицей резонанса в единицу времени. Пусть $f(I)$ - стационарная функция распределения частиц ($\int\limits_0 f(I)\,dI = 1$), тогда, очевидно, $\varkappa = f(I_i)\,\dot{I}$. Подставляя это значение $\varkappa$ в (6), получаем для τ_d^{-1} следующее простое выражение:

$$\tau_d^{-1} = \pi\frac{|w_i|^2}{\left|\frac{d\mathcal{E}_i}{dI}\right|} f(I_i) \qquad (7)$$

Если условие (3) нарушается для нескольких резонансов, по ним в тех же условиях, в силу их некоррелированности, нужно произвести независимое суммирование:

$$\tau_d^{-1} = \pi\sum_i \frac{|w_i|^2}{|d\mathcal{E}_i/dI|} f(I_i) \qquad (8)$$

Не представляет труда обобщить (8) на большее число переменных действий[x)]:

$$\tau_d^{-1} = \pi\sum_i \left\langle |w_i|^2\, \delta(\mathcal{E}_i)\right\rangle \qquad (9)$$

где $\delta(\varepsilon_i)$ дельта-функция. Формулы (7-9) получены также в /6/ на основании решения уравнения для плотности поляризации. Формулы (4,5,9) позволяют детально исследовать устойчивость поляризации на встречных пучках в широком диапазоне их параметров.

3. Рассмотрим для примера наиболее простой случай движения, когда направление равновесной поляризации $\vec{n}$ почти постоянно вдоль орбиты и мало отличается от направления ведущего магнитного поля. В линейном приближении по отклонениям от равновесной плоской орбиты выражение для w_i приводится к виду /11/:

$$w_i = \left\langle \alpha \frac{z}{R} \exp(-i\Psi_i) \right\rangle_I \qquad (10)$$

где $R = v/\dot{\theta}_s$ - средний радиус накопителя, z - вертикальное отклонение от равновесной плоской орбиты, на которой $\vec{n} = \vec{e}_z = const$ $\nu = \gamma_s q'/q_0$, $\alpha(\theta)$ - периодическая функция азимута:

$$\alpha = -\left[\nu^3 \mathcal{K}^2 + i(\nu^2 - 1)\mathcal{K}'\right] \exp\left[-i\nu \int_0^\theta (\mathcal{K}-1)d\theta\right]$$

$$\mathcal{K} = H_z/\bar{H}_z \quad , \quad \left(\bar{\mathcal{K}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{K}d\theta = 1\right)$$

В азимутально симметричном накопителе $\alpha = -\nu^3 = const$. Как известно, реально вертикальный размер пучка, обязанный квантовым флуктуациям излучения, определяется связью вертикальных колебаний с радиальными и фазовыми. Поэтому, при описании возмущающего влияния встречного сгустка на вертикальные отклонения, необходимо, вообще говоря, учитывать, кроме прямого действия z -составляющей силы встречных сгустков F_z, действие и радиальной составляющей F_x, обязанное $z-x$ связи. Действием силы F_x мы будем пренебрегать, предполагая заданными установившиеся амплитуды z -колебаний; учет F_x не имеет принципиального значения для выяснения основных особенностей воздействия встречных сгустков на поляризацию и сильно загромождает все формулы. При этом уравнение, описывающее вертикальное отклонение, имеет вид:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + g_z z = F_z(z, x, \theta) \qquad (11)$$

Рассмотрим случай лобовой встречи электронов и позитронов, когда равновесные орбиты сгустков в области взаимодействия совпадают. Тогда эффективный потенциал V можно записать в виде /13/:

x) Формулы (7-9), очевидно, остаются справедливыми (в области спиновых резонансов) и при наличии дополнительных стохастических возмущений траектории.

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad V = -2R\frac{N r_e}{\gamma} U(x,z)\, g(2\theta)$$

$$U(x,z) = -\int dx'dz'\, \sigma(x',z') \ln\left[(x-x')^2 + (z-z')^2\right] \qquad (12)$$

где N – полное число частиц встречного пучка, r_e – классический радиус электрона. Функции σ и g описывают распределение плотности встречных сгустков относительно равновесной орбиты и нормированы следующим образом:

$$\int \sigma\, dx\, dz = 1 \qquad \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = 1$$

Распределение σ и g выберем в виде

$$\sigma = \frac{1}{\pi X_0 Z_0} \exp\left(-\frac{x^2}{X_0^2} - \frac{z^2}{Z_0^2}\right), \quad g(\theta) = \frac{2}{P}\sum_{K=0}^{P/2-1} \delta\left(\theta - \frac{4\pi}{P}K\right) \qquad (13)$$

где $2X_0$, $2Z_0$ – радиальный и вертикальный размеры встречных сгустков в местах встреч $(X_0 \gtrsim Z_0)$, $P/2$ – число сгустков(P – число мест встреч в накопителе). Предполагаем, что магнитная система накопителя имеет период $\theta_0 = 2\pi/P$.

Начнем с изучения одномерных резонансов, обязанных встречному пучку:

$$\nu \approx n_z \nu_z + KP \qquad (|n_z| \neq 0, 1)$$

Максимальный номер $|n_z| = n_z^{max}$, начиная с которого резонансы перестают "работать", находится из уравнения:

$$(\tau_d)_{min} = \tau_p = \left(\frac{5\sqrt{3}}{8}\gamma^{.5}\frac{\lambda r_e}{R_M^2}\right)^{-1}$$

где λ – комптоновская длина волны, $R_M = |\vec{v}|^{-1}_{max}$ – радиус кривизны траектории на участках с магнитным полем, $(\tau_d)_{min}$ – минимальное значение τ_d. Гармоника $w_{n_z,K}$ и сдвиг частоты вертикальных колебаний, вносимый встречным пучком $\Delta\nu_z$, определяют по формуле (8) τ_d. При гауссовском распределении по амплитудам вертикальных колебаний a_z:

$$f(a_z^2) = \frac{1}{\langle a_z^2\rangle} \exp\left(-\frac{a_z^2}{\langle a_z^2\rangle}\right) \qquad (14)$$

($2\sqrt{\langle a_z^2\rangle}$, a_z – вертикальный размер пучка и амплитуда в местах встреч) время τ_d минимально при резонансном значении

a_z^2 :

$$a_z^2 = |n_z| \langle a_z^2\rangle Z_0 / \sqrt{Z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle} \quad , \; (|n_z| >> 1)$$

При этом x) (см. приложение):

$$(\tau_d)^{-1}_{min} = \frac{4}{\pi} \frac{N r_e}{\gamma R} |A|^2 \frac{B}{|n_z|} \left(\frac{\langle a_z^2\rangle}{\langle a_z^2\rangle + Z_0^2 + Z_0\sqrt{Z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle}} \right)^{|n_z|} \qquad (15)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\int_0^{2\pi} \alpha f_z e^{-i\nu\theta} d\theta}{1 - \exp[-2\pi i(\nu - \nu_z)]} - \frac{\int_0^{2\pi} \alpha f_z^* e^{-i\nu\theta} d\theta}{1 - \exp[-2\pi i(\nu + \nu_z)]} \right\}$$

$f_z(\theta)$ – решение Флоке вертикальных колебаний пучка, определенное так, что его фаза равна нулю при $\theta = 0$ ($f_z(0) = |f_z|_0$),

$$B = \begin{cases} \dfrac{Z_0^2}{X_0^2} \dfrac{\langle a_z^2\rangle}{Z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle} & \text{при } a_z^2 = |n_z| \dfrac{\langle a_z^2\rangle Z_0}{\sqrt{Z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle}} >> X_0^2 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\pi}{|n_z|}} \dfrac{Z_0}{X_0} \dfrac{\sqrt{\langle a_z^2\rangle / Z_0^2}\sqrt[4]{1 + 2\langle a_z^2\rangle/Z_0^2}}{1 + \langle a_z^2\rangle / Z_0^2} & \text{при } Z_0^2 \ll a_z^2 \ll X_0^2 \end{cases}$$

В азимутально симметричном накопителе с мягкой фокусировкой $f_z = (\exp i\nu_z\theta)/\sqrt{\nu_z}$, величина $A = \nu^3/(\nu^2 - \nu_z^2)$. Уравнение для максимального номера n_z^{max} имеет вид:

$$\frac{\tau_p}{(\tau_d)_{min}} = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{4}{\pi} \frac{N R_M^2}{\gamma^6 \lambda R} |A|^2 \frac{B}{n_z^{max}} \left(\frac{\langle a_z^2\rangle}{\langle a_z^2\rangle + Z_0^2 + Z_0\sqrt{Z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle}} \right)^{n_z^{max}} = 1 \qquad (16)$$

При достаточной близости к резонансам с $|n_z| < n_z^{max}$ происходит деполяризация пучка. "Опасный" интервал частоты $\Delta\nu$, занимаемый резонансом $\nu \approx n_z\nu_z + KP$, является функцией номера

---

x) Поскольку F_z нечетная функция Z, возможны лишь резонансы с нечетными номерами n_z. Резонансы другой четности возникают при учете связи вертикальных колебаний с радиальными.

n_z :

$$|\Delta\nu| \lesssim |n_z|\,\Delta\nu_z^{max}$$

где $\Delta\nu_z^{max}$ максимальный сдвиг частоты ν_z, вносимый встречным сгустком (см.приложение):

$$\Delta\nu_z^{max} = \frac{2N r_e R |f_z|_0^2}{\pi\gamma z_0 (x_0 + z_0)}$$

Для существования свободных от "опасных" интервалов значений ν, очевидно, достаточно, чтобы

$$\sum_{n_z=-n_z^{max}}^{n_z^{max}} |\Delta\nu| \lesssim (n_z^{max})^2 \Delta\nu_z^{max} < P \qquad (17)$$

Условие (17) совместно с уравнением (16) дает ограничения на максимально возможное число частиц N^{max} встречного пучка, не разрушающего поляризацию, которые, примерно, те же, что и ограничения, необходимые для устойчивого осуществления встреч пучков (в орбитальном движении опасны нелинейные резонансы $\nu_z \approx \approx Pn/m$). Условия, ограничивающие максимально возможное число частиц N (светимость), при котором не нарушается устойчивость встреч, можно написать, основываясь на хорошо разработанной теории движения вблизи нелинейных резонансов /13-15/.Такое совпадение не случайно и объясняется следующим: декремент радиационной поляризации τ_p^{-1} в γ^{-2} раз слабее декремента орбитального движения τ_z^{-1} ($\tau_p/\tau_z \sim \gamma^{-2} \sim (\gamma^2 \frac{\lambda}{R})^{-1}$). Но во столько же раз меньше квадрат мощности спиновых резонансов $|w_i|^2$ по сравнению с соответствующим квадратом мощности орбитальных резонансов.

Как видно из (16,17) N^{max} сильно зависит от отношения $\langle a_z^2\rangle / z_0^2$, увеличивается с его уменьшением. Уменьшение модуля решений Флоке (β - функций) в местах встреч дает, как известно, выигрыш в светимости накопителя (из-за повышения плотности пучков в местах встреч). Также выгодно уменьшать $|f_z|_0 \sim |f_x|_0$ для повышения светимости накопителя с поляризованными пучками (степень равновесной поляризации слабее чувствительна к изменениям $|f_z|_0 \sim |f_x|_0$: $\tau_p/\tau_d \sim N|A|^2$). Действительно, несмотря на увеличение силы воздействия встречного сгустка $\sim |f_z|_0^{-1}$, сдвиг бетатронных частот и гармоники вертикального отклонения, определяющие мощность спиновых резонансов $|w_i|$, слабее чувствительны к изменениям β - функций в местах встреч.

Включение резонансов с радиальными и синхротронными колебаниями частиц приводит к возрастанию числа "работающих" резонансов. При этом условие (17) заменяется на[x)] (обычно $\Delta\nu_z^{max} \gtrsim \Delta\nu_x^{max} >> \Delta\nu_c^{max}$):

$$\frac{1}{3}(n_z^{max})^2 n_x^{max} n_c^{max} \Delta\nu_z^{max} < P \qquad (18)$$

дающее более сильное ограничение на N^{max} (n_x^{max}, n_c^{max} - максимальные номера "работающих" резонансов с радиальными и синхротронными колебаниями). Уравнения для n_x^{max}, n_c^{max} можно получать аналогичным образом. При учете медленных синхротронных колебаний, кроме модуляции бетатронных гармоник $w_{n_z,n_x,K}$, поперечного возмущения, нужно, вообще говоря, принимать во внимание синхротронную модуляцию $\vec{w}\vec{n}$ и бетатронных частот ν_x, ν_z.

Формулы (4,5,9), конечно, позволяют провести более детальное исследование с учетом всех реальных факторов, определяющих свойства орбитального движения. Однако, из-за отмеченной сложной зависимости w_i, $\mathcal{E}_i$ от амплитуд колебаний целесообразнее проводить такие исследования уже для конкретных накопителей. Основные же выводы остаются правильными вне зависимости от структуры электромагнитного поля в накопителях на встречных пучках.

Автор благодарен Я.С.Дербеневу и А.Н.Скринскому за многочисленные полезные советы и обсуждения в ходе выполнения работы.

---

x) Условие (18) видоизменяется, если частота синхротронных колебаний мала по сравнению с разбросом частот движения $\Delta\mathcal{E}_i$. При этом, вместо одного выделенного резонанса на ширине $\Delta\mathcal{E}_i$ появляется серия синхротронных резонансов, примерно, одинаковой мощности, по которым, очевидно, нужно производить суммирование.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Выражение для вертикальной составляющей силы воздействия встречных сгустков $F_z(z,x,\theta)$ при $x=0$ получается из(12) (σ задается в виде (13)):

$$F_z = -\frac{4N r_e R}{\gamma z_0}\int_0^1 dt\,\frac{z\exp(-z^2t/z_0^2)}{\sqrt{z_0^2(1-t)+x_0^2t}}$$

Сдвиг частоты $\Delta\nu_z$, вносимый встречным пучком, вычисляется по формуле /13-15/:

$$\Delta\nu_z = -\frac{|f_z|_0^2}{a_z}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\psi_z\cos\psi_z\,F_z(a_z\cos\psi_z,\theta) =$$

$$= \frac{2N r_e R}{\pi\gamma}|f_z|_0^2\begin{cases}1/a_z^2 & a_z \gg x_0\\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}\,x_0a_z} & z_0\ll a_z\ll x_0\\ \dfrac{1}{z_0(x_0+z_0)} & a_z=0\end{cases}$$

Выражение для $w_{n_z,k}$ с помощью (10,11) приводится к виду:

$$w_{n_z,k} = -\frac{N r_e}{\pi\gamma}A\,|f_z|_0\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial z}e^{-in_z\psi_z}d\psi_z$$

При n_z - четном $w_{n_z,k}=0$, при нечетном:

$$|w_{n_z,k}| = \left|\frac{N r_e|f_z|_0}{\pi\gamma z_0}A\int_0^{a_z^2/2z_0^2}\frac{2z_0e^{-t}dt}{\sqrt{a_z^2+2(x_0^2-z_0^2)t}}\left[I_{\frac{n_z-1}{2}}(t)-I_{\frac{n_z+1}{2}}(t)\right]\right| \qquad (\text{П.1})$$

где $I_{\frac{n_z\pm1}{2}}(t)$ - функции Бесселя от мнимого аргумента. Известна ассимптотика функций $I_m(t)$ при $m\gg1$ /16/:

$$I_m(t) = \frac{\exp\sqrt{m^2+t^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt[4]{m^2+t^2}}\left(\sqrt{1+\frac{m^2}{t^2}}-\frac{m}{t}\right)^m$$

Основной вклад в интеграле по t в(П.1) лежит при $|n_z|\gg1$ вблизи $t=a_z^2/2z_0^2$. Таким образом, окончательное выражение для

$|w_{n_z,k}|$ имеет вид:

$$|w_{n_z,k}| = \frac{4N r_e |f_z|_0}{\pi\sqrt{2\pi}\,\gamma X_0}\,\frac{|A|a_z}{z_0}\,\frac{\left(\sqrt{1+n_z^2 z_0^4/a_z^4}+1\right)^{1/2}\exp\frac{1}{2}\left(\sqrt{n_z^2+a_z^4/z_0^4}-a_z^2/z_0^2\right)}{\left(n_z^2+a_z^4/z_0^4\right)^{1/4}\left[|n_z| z_0^2/a_z^2+\sqrt{1+n_z^2 z_0^4/a_z^4}\right]^{|n_z|/2}}$$

При гауссовском распределении по амплитудам a_z получаем следующее выражение для τ_d^{-1}:

$$\tau_d^{-1} = \pi\,\frac{|w_{n_z,k}|^2 \exp(-a_z^2/\langle a_z^2\rangle)}{|n_z|\,\langle a_z^2\rangle\,|\partial\Delta\nu_z/\partial a_z^2|} \qquad (\Pi.2)$$

(Здесь a_z – значение амплитуды, при котором $\varepsilon_{n_z,k}=0$). Исследование (П.2) на экстремум, показывает, что минимальное значение τ_d определяется формулой (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Соколов, И.М.Тернов. ДАН СССР 153, 1052(1963).
2. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ 52, 1422(1967).
3. В.Н.Байер, В.М.Катков,В.М.Страховенко.ЖЭТФ 58, 1695(1970).
4. В.Н.Байер, УФН 105, №3,441 (1971).
5. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко.ЖЭТФ 64,1918 (1973).
6. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко ДАН(в печати).
7. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский.ДАН СССР, 192,№6, 1255(1970). Препринт ИЯФ СО АН СССР 2-70.
8. V.Bargmann,L.Michel,V.Telegdi Phys.Rev.Lett. 2, 435 (1959).
9. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц,Л.П.Питаевский."Релятивистская квантовая теория" ч.1 Наука М.(1968).
10. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский.ЖЭТФ 60,1216 (1971).
11. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко. ЖЭТФ 62, 430 (1972).
12. M.Froissart,R.Stora Nucl.Instr. and Meth 7, 297 (1960).
13. Я.С.Дербенев. Диссертация ИЯФ СО АН СССР,Новосибирск (1968).
14. Я.С.Дербенев. "Ядерная физика" 2, 119 (1965).
15. Я.С.Дербенев, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский."Атомная энергия", 20, 217 (1966).
16. H.Bateman "Higher Transcendental Functions" New York and oth. (1953).

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати I.УШ.73г. МН 08408
Усл. 0,8 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 65. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР