

24

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 75 - 72

В.С.Львов, С.Л.Мушер, С.С.Старобинец

**ТЕОРИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ
ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ
СПИНОВЫХ ВОЛН**

Новосибирск

1972

В.С.Львов, С.Л.Мушер, С.С.Старобинец

ТЕОРИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СПИНОВЫХ ВОЛН

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что низкочастотные автоколебания намагниченности объясняются неустойчивостью коллективных степеней свободы, представляющих периодические во времени и пространстве изменения амплитуд и фаз связанных попарно параметрических спиновых волн и в определенном смысле аналогичных волнам второго звука на магнонах. Изучен спектр этих коллективных колебаний и найдены условия возникновения автоколебаний, главным образом применительно к YIG . С помощью ЭВМ рассмотрен нелинейный режим автоколебаний; проводится качественное сопоставление теории с экспериментом, объясняются некоторые свойства автоколебаний, в частности их гигантская кристаллографическая анизотропия в почти изотропных кубических ферромагнетиках.

§ 1. В в е д е н и е

Хорошо известно, что в ферромагнетиках при параметрической генерации спиновых волн стационарный режим, как правило, не устанавливается и намагниченность совершает сложные колебания вокруг некоторого среднего значения. Это явление наблюдается в виде амплитудной и частотной модуляции мощности накачки, проходящей через резонатор с образцом, или в виде НЧ колебаний в катушке, реагирующей на изменение продольной составляющей намагниченности (M_z). Впервые автоколебания при параметрическом возбуждении спиновых волн наблюдались Хартвиком, Перессини и Вейссом /1/. Непонятное явление вызвало интерес и была проведена большая экспериментальная работа по его изучению (см. /2/). Однако первый энтузиазм быстро прошел после того как выяснилось, что свойства автоколебаний зависят практически от всех возможных параметров системы: мощности накачки, величины магнитного поля, кристаллографической анизотропии, размера и формы образца и т.п. Появились сомнения в возможности существования в этой области каких-либо простых закономерностей.

Основные экспериментальные факты, полученные для совершенных кристаллов иттриевого граната (YIG) при параллельной накачке, заключаются в следующем:

1. Частоты автоколебаний лежат в интервале от 10^4 до приблизительно 10^7 гц (в зависимости от мощности накачки и постоянного магнитного поля). При небольшом превышении порога спектр автоколебаний состоит из одной линии; с ростом уровня мощности происходит увеличение числа линий и смещение их в сторону более высоких частот. При больших превышениях над порогом спектр имеет шумовой характер.

2. Порог автоколебаний обычно весьма мал: 0,1 - 1 дб по отношению к порогу параметрического возбуждения, за исключением области малых волновых векторов ($H > H_c$), где порог заметно увеличивается. Порог также возрастает при введении в кристалл внутренних неоднородностей /3/.

3. Наблюдается гигантская кристаллографическая анизотропия свойств автоколебаний, значительно превышающая анизотропию спектра спиновых волн. Интенсивность автоколебаний в YIG

при ориентации намагниченности вдоль оси $\langle 111 \rangle$ превышает интенсивность этих колебаний вдоль оси $\langle 111 \rangle$ приблизительно в 100 раз /2/.

Физическая природа автоколебаний рассматривалась в литературе с разных точек зрения. Многие авторы (см., например, /4/) считали, что эти колебания в основном обусловлены изменением намагниченности при параметрическом возбуждении спиновых волн. Из-за уменьшения намагниченности (от величины которой зависит собственная частота волн) нарастающие в процессе генерации волны постепенно расстраиваются и затухают. Затем процесс начинается сначала и т.д.

Эта модель была количественно анализирована Я.А.Моносовым /2/, который показал возможность существования автоколебаний в тех случаях, когда изменение намагниченности запаздывает по отношению к изменению амплитуд спиновых волн в соответствии с моделью релаксации Блоха-Бломбергена. В рамках этих представлений и некоторых дополнительных предположений Моносову с сотрудниками удалось объяснить ряд свойств автоколебаний, например, порог возбуждения и начальную частоту колебаний. Однако инерционность намагниченности, как показали Барьяхтар и Урушадзе /5/, может оказаться существенной только в той части спектра, где разрешены процессы распада $\omega_{p/2} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$. Для YIG ($T = 300^\circ\text{K}$, $\omega_p = 2\pi \cdot 10^{10} \text{сек}^{-1}$) это узкая область вблизи поля насыщения H_s /6/ $H_s < H_0 < H_s + 100 \text{ э}$. Кроме того, в значительной степени произвольный характер сделанных допущений оставляет открытым вопрос об условиях применимости модели "инерционных" автоколебаний даже в распадной части спектра.

Уанг с сотрудниками /7/ выдвинули другую модель автоколебаний, основанную на постулировании существования пакета близких по частоте (вблизи $\omega_{p/2}$) параметрических спиновых волн. При этом образец конечного размера действует как резонатор Фабри-Перро, выбирая из немонахроматического пакета ряд дискретных частот, разнесенных на величину $v_g 2\pi/d$ (v_g - групповая скорость спиновых волн, d - размер образца). По мнению авторов "биения" между этими частотами и являются причиной колебаний. Была проделана большая экспериментальная работа /7-8/ с целью подтвердить даваемую моделью биений зависимость

частоты колебаний от постоянного магнитного поля. Авторы отмечают ряд удивительно хороших совпадений. Однако в картине биений полностью игнорируется наблюдаемая экспериментально зависимость частоты от мощности накачки. С другой стороны теоретические представления о параметрической генерации спиновых волн /9/ говорят в пользу того, что параметрические волны обладают высокой степенью монохроматичности — во всяком случае разброс их частот много меньше обратного времени релаксации спиновых волн.

В этой работе показано, что низкочастотные автоколебания намагниченности, наблюдаемые при параметрической генерации спиновых волн, объясняются наличием новых ветвей коллективных возбуждений в энергетическом спектре ферромагнетика. Эти возбуждения представляют собой периодические во времени и пространстве изменения амплитуд связанных попарно параметрических спиновых волн (в определенном смысле аналогичные волнам второго звука на магнонах); их характерные частоты определяются величиной взаимодействия пар между собой и обычно лежат в интервале от 0 до 10^7сек^{-1} .

Существование коллективных колебаний было экспериментально обнаружено в работе /10/ при изучении реакции параметрической спиновой системы на слабый сигнал. В этих экспериментах на фоне параллельной накачки спиновых волн наблюдалось резонансное поглощение слабого электромагнитного поля, обусловленное возбуждением нулевой (однородной) моды коллективных колебаний.

Наряду с однородной модой, в которой все пары колеблются в унисон, имеется множество неоднородных типов колебаний и волн. Как правило, некоторые из них оказываются неустойчивыми и самовозбуждаются даже в отсутствие вынуждающей силы. Эта неустойчивость возникает при обращении в нуль частоты коллективных колебаний и в этом смысле похожа на неустойчивость "мягкой моды" в сегнетоэлектриках. В сегнетоэлектриках (в термодинамическом равновесии) неустойчивость мягкой моды приводит к фазовому переходу. В нашем случае, далеком от термодинамического равновесия другого устойчивого состояния, не существует и неустойчивость типа мягкой моды приводит к осцилляциям системы вокруг основного состояния.

В этой работе мы изучим спектр коллективных колебаний и

найдем условия возникновения автоколебаний главным образом применительно к $\gamma \Gamma \Gamma$. Далее с помощью ЭВМ будет рассмотрен нелинейный режим автоколебаний для простейших мод. При этом глубина модуляции основного состояния оказывается отнюдь не мала и может в определенных случаях достигать $\sim 100\%$, что характеризует возбуждение автоколебаний как явление сильной турбулентности. Изучены свойства такой турбулентности: период и форма колебаний, характер движения системы в \vec{k} -пространстве, переход к стохастическому режиму (шум).

§ 2. Коллективные колебания

Взаимодействие спиновых волн играет определяющую роль при параметрическом возбуждении: оно ограничивает уровень возбуждения спиновых волн и приводит, как мы увидим, к появлению коллективных колебаний на его фоне. В S -теории [11, 12] это взаимодействие описывается с помощью самосогласованного поля связанных спиновых волн a_k, a_{-k} . Функция Гамильтона такой системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \int (\omega_k - \omega_p/2) a_k a_k^* dk + \frac{i}{2} \int (h V_k a_k^* a_{-k}^* + \text{c.c.}) dk + \int (T_{kk'} a_k a_k^* a_{k'} a_{k'}^* + \frac{i}{2} S_{kk'} a_k a_{-k} a_{k'}^* a_{-k'}^*) dk dk' \quad (1)$$

Здесь a_k, a_{-k} - "медленные" амплитуды волн, V_k - коэффициент их взаимодействия с полем параллельной накачки

$$h(t) = h \exp(-i\omega_p t)$$

$T_{kk'}, S_{kk'}$ - нелинейные характеристики ферромагнетика. Функция $T_{kk'}$ описывает перенормированную на взаимодействие собственную частоту спиновых волн

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2 \int T_{kk'} a_{k'} a_{k'}^* dk' \quad (2)$$

а $S_{kk'}$ - "коллективную накачку", которая складывается (в соответствующей фазе) с внешней накачкой $h V_k$:

$$P_k = h V_k + \int S_{kk'} a_{k'} a_{-k'}^* dk' \quad (3)$$

Несмотря на то, что за порогом внешняя накачка hV_{κ} превышает диссипацию волн γ_{κ} , вследствие перенормировки накачки (3) устанавливается стационарное состояние, в котором для каждой пары волн выполняется условие баланса энергии,

$$|P_{\kappa}|^2 = \gamma_{\kappa}^2 + (\tilde{\omega}_{\kappa} - \omega_p/2)^2 \quad (4)$$

Из множества стационарных состояний (4) реализуется состояние, обладающее внешней устойчивостью по отношению к рождению новых пар во всех точках $\vec{\kappa}$ -пространства, где $a_{\kappa} = 0$. Это состояние мы будем называть основным, для него (см. /11/)

$$|P_{\kappa}| = \gamma_{\kappa}, \quad \tilde{\omega}_{\kappa} = \omega_p/2 \quad (5)$$

Теория основного состояния содержится в работах /11, 12/ и вкратце сводится к следующему.

Введем корреляционные функции

$$P_{\kappa} = \langle a_{\kappa} a_{\kappa}^* \rangle, \quad B_{\kappa} = \langle a_{\kappa} a_{-\kappa} \rangle$$

удобные для описания системы параметрических волн. Скобки означают усреднение по времени или, что то же самое, по случайным фазам индивидуальных волн. Фазы волн $a_{\kappa}, a_{-\kappa}$ в паре жестко скоррелированы (в рамках S^{σ} -теории), так что

$$|B_{\kappa}| = P_{\kappa}$$

Конкретный вид функций P_{κ}, B_{κ} зависит от структуры коэффициентов V_{κ} и $S_{\kappa\kappa'}$. В изотропном ферромагнетике, а также в YIG при ориентации $\vec{M}_0 \parallel \langle 111 \rangle$ и $\vec{M}_0 \parallel \langle 100 \rangle$ основное состояние обладает аксиальной симметрией вокруг направления намагниченности \vec{M}_0 . При не слишком больших превышениях над порогом (в YIG до превышений 6-10 дБ /13/ спиновые волны расположены в $\vec{\kappa}$ -пространстве в плоскости $\kappa_z = 0$, перпендикулярной намагниченности, именно

$$P_{\kappa}^{(0)} = \frac{N_0}{2\pi\kappa_0} \delta(\kappa_z) \delta(\kappa_{\perp} - \kappa_0) \quad (6)$$

$$B_{\kappa}^{(0)} = P_{\kappa}^{(0)} e^{-2i\varphi}$$

где φ - азимутальный угол волнового вектора \vec{k}_0 ; N_0 интегральная амплитуда основного состояния

$$N_0 = \int \rho_{kk}^{(0)} dK = \frac{\sqrt{(kV)^2 - \gamma^2}}{|S_0|} \quad (7)$$

S_0 - среднее по углу φ значение функции S_{kk} (см. ниже формулу (11)).

Покажем, что в системе параметрических спиновых волн, описываемой гамильтонианом (1), на фоне основного состояния, в качестве которого возьмем для простоты состояние (6), существуют коллективные колебания. Проще всего это сделать, выделяя в гамильтониане часть $\mathcal{H}^{(0)}$ соответствующую основному состоянию и части $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$, содержащие линейные и квадратичные члены по малым отклонениям от него. Возмущения удобно записать в виде

$$b_k = b_k^{(0)} + \frac{\sqrt{N_0}}{2\pi k_0} \alpha \varphi e^{-2i\varphi} \delta(k_z) \delta(k_1 - k_0) \quad (8)$$

$$|\alpha \varphi| \ll \sqrt{N_0}$$

При изучении спектра колебаний естественно вначале пренебречь диссипацией (положить $\gamma = 0$) и считать \mathcal{H} интегралом движения. Учитывая (5), убеждаемся в экстремальности энергии основного состояния:

$$\mathcal{H}^{(1)} = 0$$

Квадратичная по малым возмущениям (8) часть гамильтониана имеет вид:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{N_0}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ [2T_{kk'} + S_{kk'} e^{-2i(\varphi - \varphi')}] \alpha \varphi \alpha \varphi'^* + (T_{kk'} \alpha \varphi \alpha \varphi' + \text{c.c.}) \} d\varphi d\varphi' \quad (9)$$

Переходя к Фурье-компонентам

$$d_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{im\varphi} d\varphi$$

и используя аксиальную симметрию

$$T_{\kappa\kappa'} = T(\varphi - \varphi'), \quad S_{\kappa\kappa'} = S(\varphi - \varphi')$$

получим

$$\mathcal{H}^{(2)} = N_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(2T_m + S_m) d_m d_m^* + (T_m d_m d_{-m} + \text{c.c.}) \right] \quad (10)$$

где

$$T_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi$$

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi \quad (11)$$

Квадратичный гамильтониан (10) стандартным образом приводится к диагональному виду

$$\mathcal{H}^{(2)} = 2N_0 \sum_m \sqrt{S_m(2T_m + S_m)} \beta_m \beta_m^* \quad (12)$$

представляющему собой сумму энергий осцилляторов с частотами

$$\Omega_m = 2\sqrt{S_m(2T_m + S_m)} N_0 \quad (13)$$

Эти осцилляторы (нормальные моды) описывают коллективные возбуждения системы параметрических спиновых волн. Коэффициенты S_m и T_m , определяющие спектр коллективных возбуждений, зависят от частоты накачки, намагниченности, формы образца и

других условий эксперимента (см. ниже формулу (18)). При определенных условиях может возникнуть неустойчивая ситуация, в которой $\Omega_m^2 < 0$ для какого-нибудь m . Эта неустойчивость, как будет показано в § 4, приводит к осцилляциям функций расщеплений μ_m и $\tilde{\omega}_m$ относительно основного состояния (6). Следует иметь в виду, что на нелинейной стадии развития неустойчивости понятие об отдельных нормальных модах в значительной степени теряет смысл. Мы имеем дело с сильной нелинейностью коллективных колебаний, когда энергия взаимодействия их между собой ($\mathcal{H}^{(3)}$ и $\mathcal{H}^{(4)}$) одного порядка с собственной энергией $\mathcal{H}^{(2)}$. Форма осцилляций поэтому, как правило, заметно отличается от гармонической.

В рамках S -теории коллективные колебания системы параметрических спиновых волн являются пространственно однородными. При учете пространственной дисперсии каждой нормальной моде соответствует целая ветвь спектра $\Omega_m(\mathcal{K})$, формулой (13) определяется её щель: $\Omega_m = \Omega_m(0)$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только однородных в пространстве колебаний, наиболее сильно взаимодействующих с электромагнитным полем накачки.

§ 3. Условия возникновения неустойчивостей

Рассмотрим подробно условия неустойчивости спектра коллективных возбуждений. Предварительно выясним, какое влияние на этот спектр оказывает затухание спиновых волн, тем более, что величина затухания γ может быть одного порядка с частотой коллективных колебаний (13). Затухание учитывается здесь в рамках канонических уравнений движения

$$\frac{da_k}{dt} + \gamma_k a_k = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_k^*} \quad (14)$$

Беря гамильтониан \mathcal{H} в форме (1), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\mu_k}{dt} + \gamma_k \mu_k + \text{Im} (P_k^* \tilde{\omega}_k) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + (\gamma_k + i(\tilde{\omega}_k - \omega_p/2)) \tilde{\omega}_k + i P_k \mu_k = 0$$

где P_m и $\tilde{\omega}_m$ определены формулами (2) и (3).

Линеаризуя уравнения (15) на фоне основного состояния (6) относительно возмущений (8) и полагая $\alpha, \alpha^* \sim \exp(i\Omega t)$, получим систему однородных по α и α^* алгебраических уравнений, условие разрешимости которой определяет спектр и затухание коллективных колебаний

$$\Omega_m = -i\Gamma \pm [4S_m(2T_m + S_m)N_0^2 - \gamma^2]^{1/2} \quad (16)$$

Это дисперсионное соотношение полностью решает вопрос об устойчивости коллективных колебаний. Из него следует, что при

$$S_m(2T_m + S_m) \gg 0$$

колебания затухают с декрементом γ . Этот факт подтверждают и эксперименты /9/ по резонансному возбуждению однородной моды $m = 0$: измеренная ширина резонансной полосы совпала с величиной γ , определенной из порога параметрического возбуждения $\hbar V = \gamma$.

При обратном неравенстве

$$S_m(2T_m + S_m) < 0 \quad (17)$$

возникает неустойчивость относительно нарастания моды m и эта неустойчивость, как и в случае $\gamma = 0$, не имеет порога по амплитуде.

Для нахождения условий, при которых неравенство (17) может иметь место, необходимо вычислить коэффициенты S_m и T_m для исследуемого ферромагнетика. Процедура вычисления этих коэффициентов изложена в /12/. В кубических ферромагнетиках типа YIG, учитывая энергию диполь-дипольного и обменного взаимодействия, зеемановскую энергию и энергию кристаллографической анизотропии, получим следующие выражения:

$$T_0 = \frac{g}{2M_0} \frac{\omega_p^2 + \omega_M^2}{\omega_p^2} \left[\omega_M (N_z - 1) + \frac{\omega_M^2}{\sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2}} - \beta \omega_a \right]$$

$$S_0 = \frac{g}{2M_0} \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2 \left[\omega_M (N_z - 1) + \sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2} - \beta \omega_a \right] \quad (18)$$

$$T_{\pm 1} = S_{\pm 1} = 0$$

$$T_{\pm 2} = \frac{g}{2M_0} \left(\frac{\omega_M}{2\omega_p} \right)^2 \left[\omega_{ex}(l\kappa)^2 - \omega_M + \sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2} - \beta \omega_a \right]$$

$$S_{\pm 2} = \frac{g}{2M_0} \left\{ \left[\omega_{ex}(l\kappa)^2 - \omega_M - \beta \omega_a \right] U_{\pm}^2 + \frac{\omega_M^2}{2\omega_p} U_{\pm} \right\}$$

$$U_{\pm} = \left(\sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2} \mp \omega_p \right) / 2\omega_p$$

$$S_m = T_m = 0 \quad \text{при } |m| > 2$$

Здесь ω_p - частота накачки, $\omega_M = 4\pi g M_0$, $\omega_a = \frac{2g|K_1|}{M_0}$

- поле анизотропии в трудном направлении $\langle 100 \rangle$,

$$\beta = \begin{cases} 8 & \text{для } \vec{M}_0 \parallel \langle 111 \rangle \\ -9 & \text{для } \vec{M}_0 \parallel \langle 100 \rangle \end{cases}$$

Остальные обозначения ясны из выражения для закона дисперсии волн

$$\omega_{\kappa}^2 = \left[\omega_M - \omega_M N_z + \alpha \omega_a + \omega_{ex}(l\kappa)^2 + \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta \right]^2 - \frac{\omega_M^2}{4} \sin^4 \theta \quad (19)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 2/3 & \text{для } \vec{M}_0 \parallel \langle 111 \rangle \\ -1 & \text{для } \vec{M}_0 \parallel \langle 100 \rangle \end{cases}$$

Формулы (18) объясняют причину сильной анизотропии свойств спиновых волн за порогом параметрического возбуждения: вклад энергии анизотропии в коэффициенты нелинейного взаимодействия волн T и S оказывается на порядок больше, чем её вклад в собственные частоты волн ω_k . Для иллюстрации этого важного обстоятельства приведем таблицу коэффициентов T и S для YIG в типичной экспериментальной ситуации: $N_z = \frac{1}{3}$ (сфера), $\omega_p = 9,4$ ГГц, $\omega_{ex}(k) = 0$ ($H = H_c$), $\omega_M = 4,9$ ГГц, $\omega_a = 0,23$ ГГц (комнатная температура)

Ориентация	T_0	S_0	$T_{\pm 2}, T_{-2}$	S_2	S_{-2}
$\langle 100 \rangle$	0,28	0,52	0,11	0,01	- 0,36
$\langle 111 \rangle$	-0,75	0,30	0,05	0,01	- 1,27

Все коэффициенты приведены в единицах $2\pi g^2$.

Подставляя табличные данные в критерий (17), можно сравнить предсказания теории о возникновении неустойчивости с экспериментальными результатами в YIG . С помощью таблицы легко убедиться, что в легком направлении ($\vec{M}_0 \parallel \langle 111 \rangle$) имеется неустойчивость относительно нулевой моды ($m = 0$), а в трудном направлении ($\vec{M}_0 \parallel \langle 100 \rangle$) все моды коллективных колебаний устойчивы. На опыте при $H \approx H_c$ в трудном направлении автоколебания действительно отсутствуют вплоть до превышений 6 - 7 дБ (второй порог /13/), в легком же направлении наблюдаются интенсивные автоколебания практически сразу за порогом параметрического возбуждения. Анализ выражений (18)

показывает, что с увеличением волнового вектора спиновых волн (с уменьшением внешнего магнитного поля H) в трудном направлении возникает неустойчивость моды $m = -2$. Возникновение автоколебаний небольшой амплитуды в полях $H \ll H^* \ll H_c$ как это хорошо видно из рис. 4.4 монографии [2], действительно наблюдается на эксперименте^{х)}. Совпадение предсказаний теории о возникновении автоколебаний с экспериментом [12] можно проследить также для образцов YIG в форме дисков, намагниченных параллельно ($N_x = 0$) и перпендикулярно ($N_x = 1$) плоскости. Интересно отметить, что выключение поля анизотропии ($\omega_a \ll 0,022$ ГГц) приводит к неустойчивости нулевой моды. И действительно, интенсивные автоколебания наблюдаются в сфере YIG с примесью скандия, уменьшающей анизотропию до $\omega_a \approx 0,016$ ГГц.

Необходимо подчеркнуть, что в рассматриваемой здесь теории порог автоколебаний равен нулю (совпадает с порогом параметрического возбуждения), в то время как на эксперименте в YIG наблюдается небольшой порог $\sim 0,1 - 0,5$ дБ. Мы думаем, что это связано с влиянием неоднородностей кристалла YIG . Магнитные неоднородности приводят к "размытию" функций $\mu_k^{(0)}$, $\beta_k^{(0)}$ в основном состоянии (6) и некоторой перенормировке затухания и коэффициентов S и T [13]. По этой причине следует ожидать, что в плохих кристаллах формулы (17), (18) в лучшем случае качественно описывают реальную ситуацию.

§ 4. Автоколебания

Задача о нелинейной стадии развития неустойчивости коллективных возбуждений решается только с помощью ЭВМ. Вычисления для конкретного ферромагнетика (например, YIG) требуют огромной затраты машинного времени и вряд ли целесообразны. С физической точки зрения гораздо интересней рассмотреть какую-либо простую модель, передающую качественно основные свойства автоколебаний.

Рассмотрим систему пар спиновых волн, одинаково взаимодействующих с полем накачки и заполняющих два луча \vec{k}_1 и \vec{k}_2 в \vec{k} -пространстве. В начальном состоянии (до приложения на-

х) Поведение кривой порога неустойчивости в полях $H \ll 1300\text{э}$, может быть связано с возбуждением пространственно-неоднородных автоколебаний.

качки) распределение пар на лучах n_{1k} и n_{2k} , вообще говоря, произвольно. Для определенности примем

$$n_{1k} = n_{2k} = n_0, \quad b_{1k} = b_{2k} = 0 \quad (20)$$

Величину n_0 можно рассматривать как уровень теплового шума в системе.

Параметрическое возбуждение спиновых волн от уровня теплового шума описывается уравнениями вида (15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dn_{1k}}{dt} + \gamma(n_{1k} - n_0) + \text{Im}(P_i^* b_{1k}) &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{db_{1k}}{dt} + [\gamma + i(\tilde{\omega}_{1k} - \omega_p/2)] b_{1k} + i P_i n_{1k} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

и аналогичными уравнениями для второго луча.

Здесь

$$P_1 = \frac{1}{2} \bar{V} + S_{11} \sum_k b_{1k} + S_{12} \sum_k b_{2k}$$

$$\tilde{\omega}_{1k} = \omega_1 + 2 T_{11} \sum_k n_{1k} + 2 T_{12} \sum_k n_{2k}$$

$$S_{12} = S_{21}^*, \quad T_{12} = T_{21}$$

Изменение суммы амплитуд на лучах $\sum_k (n_{1k} + n_{2k}) \equiv N_1 + N_2$ моделирует нулевую коллективную моду ($m=0$), а изменение разности $N_1 - N_2$ - высшие моды ($m \neq 0$). По ряду причин, которые будут ясны из дальнейшего, исследование моды с $m \neq 0$ является более простой задачей, которую мы рассмотрим в первую очередь. Для уменьшения числа параметров задачи положим

$$S_{11} = S_{22} \equiv S_1; \quad S_{12} = S_{21} \equiv S_2, \quad T_{11} = T_{22} = -T_{12} \equiv T$$

(при этом мода $m = 0$ устойчива).

Стационарное решение уравнений (20), обладающее внешней устойчивостью (см. условия (5)), имеет вид (при $\nu_c \rightarrow 0$):

$$N_1 = N_2 = \frac{\sqrt{(\kappa V)^2 - \gamma^2}}{|S_1 + S_2|} \equiv N_0 \quad (22)$$

Нестационарные решения были получены ЭВМ для системы из 120 пар при начальных условиях (20).

На рис. 1 изображены вычисленные зависимости $N_{1,2}(t)$ при слабой надкритичности ($\kappa V - \gamma < \gamma$) и сравнительно низком уровне шума ($\sum \nu_c / N_0 \sim 10^{-4}$). Вначале при $t = t_1$ пакеты n_{1c} и n_{2c} имеют гауссов вид с максимумом в точке $\omega_c = \omega_p / 2$ и растут с одинаковым инкрементом $\kappa V - \gamma$. Когда N_1 и N_2 сравниваются по порядку величины с характерной амплитудой (22), начинает проявляться внутренняя неустойчивость относительно разности амплитуд $N_1 - N_2$, рост одной из них, например, N_2 , отстает от другой ($t = t_2$) и далее N_2 уменьшается. Появление разности $N_1 - N_2$ приводит к сдвигу пакетов в разные стороны от точки $\omega_c = \omega_p / 2$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не оказывается при $t = t_3$, что $N_2 \ll N_1 \sim N_1^{(0)}$

и, соответственно, максимум пакета n_{1c} в положении $\omega_c - \omega_p / 2 = -2T N_1^{(0)}$, где $N_1^{(0)} = \sqrt{(\kappa V)^2 - \gamma^2} / |S_1|$

- стационарная амплитуда S -теории для одного луча. Такое состояние, внешне устойчивое на своем луче, является неустойчивым к рождению пар на чужом луче, причем инкремент неустойчивости ν максимален при $\omega_c - \omega_p / 2 = 2T N_1^{(0)}$ и равен

$$\nu_{\max} = |P_2| - \gamma \approx \left(\frac{S_1 - S_2}{S_1} \right)^2 \sqrt{(\kappa V)^2 - \gamma^2}$$

За время ожидания $t_4 - t_3 \sim \nu_{\text{max}}^{-1} \ln(\sum n_0 / N_0)$
 пакет n_{2k} вырастает до амплитуд порядка $N_2^{(0)}$, раз-
 ность $N_1 - N_2$ уменьшается и это приводит к обратному дви-
 жению пакетов к центру $\omega_k = \omega_p / 2$ ($t = t_5$). Но сос-
 тояние, при котором $N_1 \sim N_2 \sim N_0$ не обладает внутренней
 устойчивостью, и движение продолжается. При $t = t_7$ кар-
 тина совпадает с $t = t_3$ с точностью до перемены пакетов
 местами. Далее все повторяется. Размах движения пакетов в \vec{K} -
 пространстве определяется надкритичностью и коэффициентами
 T и S :

$$\Delta K = (4T/S_1) \sqrt{(kV)^2 - \gamma^2} / \frac{\partial \omega}{\partial K}$$

Период и форма автоколебаний сильно зависят от величины
 надкритичности и уровня шума n_0 . При малом n_0 период
 определяется в основном временем ожидания и логарифмически за-
 висит от n_0 , а глубина модуляции амплитуды близка к 100%.
 С ростом n_0 время ожидания уменьшается и при $\sum n_0 / N_0 \sim 10^3$

сравнивается с "временем движения"

($t_4 - t_6$ на рис.1). При дальнейшем увеличении n_0 зави-
 симость от него периода становится более слабой, глубина моду-
 ляции уменьшается, а форма автоколебаний становится более плав-
 ной и при некоторых T и S (например, $S_1 = 0$, $T = \frac{3}{4} S_2$)

близка к гармонической. В реальной ситуации мы имеем

$\sum_k n_0 / N_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ /8/, т.е. попадаем на плато
 зависимости $\tau(n_0)$, изображенной на рис.2. Период и другие
 свойства автоколебаний при этом не критичны к уровню шума, кото-
 рый в дальнейшем взят равным 10^{-2} .

На рис.3 показана зависимость периода автоколебаний от пре-
 вышения над порогом. При малых и больших превышениях величина
 периода пропорциональна характерному времени задачи $1/\sqrt{(kV)^2 - \gamma^2}$

Период колебаний, также зависит от коэффициентов T и S .
 правда, зависимость эта довольно сложная, например, при
 $kV \gg 2\gamma$ можно предложить эмпирическую формулу

$$\tau \approx \frac{2(4BT - 7S_-)}{S_-^2 + 4TS_-} \frac{1}{\sqrt{(kV)^2 - \gamma^2}}$$

$$S_- = S_1 - S_2$$

При малых превышениях распределения $n_{1,2}(\kappa)$ имеют форму пакетов с одним максимумом. Поэтому возникает естественное желание описать движение в κ -пространстве в рамках уравнений для моментов распределений $n_{1\kappa}, n_{2\kappa}$ и $b_{1\kappa}, b_{2\kappa}$. Однако анализ показал, что даже при весьма малых превышениях описание с помощью трех моментов (суммарной амплитуды, центра тяжести и ширины пакета) является недостаточным, так как период, форма и даже само существование автоколебаний зависит от способа расщепления бесконечной цепочки моментов. Для корректного описания автоколебаний необходимо учесть более высокие моменты, оказалось, что не существует даже численного параметра расщепления.

При большой надкритичности в свойствах автоколебаний обнаруживаются существенные отличия. С ростом амплитуды накачки меняется характер движения в κ -пространстве: у функций распределения $n_{1,2}(\kappa)$ появляются новые максимумы, растет число степеней свободы, эффективно участвующих в движении. Это вызывает нарушение "дальнего порядка" во временной зависимости $N(t)$. Как видно из рис. 4 при $\lambda V = 10^8$ движение полностью хаотизировано, характерное время изменения $N(t)$ порядка $1/\lambda V$. Функция распределения $n(\kappa)$ имеет вид "частотокола", состоящего из $\sim \lambda V/\nu$ максимумов разной высоты, среднее расстояние между которыми $\Delta\kappa \approx \nu/\omega$. Вид $n(\kappa)$ полностью меняется за время $1/\lambda V$. Эта картина соответствует сильной турбулентности корреляционных функций n_{κ} и b_{κ} .

Рассмотрим теперь кратко автоколебания, возникающие при неустойчивости относительно нулевой моды $m = 0$. В работе /15/ показано, что в среде, обладающей сферической симметрией, развитие неустойчивости по нулевой моде приводит к неограниченному росту амплитуды пар. Однако в интересующей нас аксиально-симметричной ситуации рост амплитуды N_0 с $\theta = \pi/2$ приводит к увеличению самосогласованной накачки $P_{\alpha'} = \lambda V \theta'^+$ + $S_{\theta'} N_0 e^{-i\kappa\theta}$ в другие пары с $\theta' \neq \frac{\pi}{2}$, которые и возбуждаются как только величина $|P_{\theta'}|$ станет больше затухания $\gamma_{\theta'}$. Обратное влияние новых пар останавливает рост пар

с $\theta = \frac{\pi}{2}$. С другой стороны, как уже отмечалось выше, в стационарном состоянии (при не очень больших превышениях:

$\dot{h}/h_0 \ll 2.5$) могут быть возбуждены только пары с

$\theta = \frac{\pi}{2}$, они, однако, неустойчивы относительно нулевой моды.

В результате возникают автоколебания, характерным отличием которых от автоколебаний, рассмотренных выше, является возбуждение широкого по θ пакета параметрических волн.

При изучении этих автоколебаний использовалась "несимметричная" модель двух лучей N_1 и N_2 , представляющих спиновые волны с $\theta = \pi/2$ и $\pi/4$: $V_2 = \frac{1}{2} V_1$. Значения коэффициентов S, T выбраны близкими к реальным в YIG . Характерная зависимость суммарной амплитуды на лучах N_1, N_2 приведена на рис.5 ($hV_1 = 2\gamma$).

В заключение отметим, что простая модель "двух лучей" качественно передает основные свойства автоколебаний, наблюдаемые на эксперименте: частоту, ее зависимость от амплитуды накачки, переход от гармонического к шумовому спектру с ростом амплитуды накачки (рис.4), большую амплитуду автоколебаний при неустойчивости по нулевой моде по сравнению с амплитудой при неустойчивости высших мод (ср. рис.4 и 5) и, наконец, то важное обстоятельство, что автоколебания происходят вблизи основного состояния S -теории и их возникновение, таким образом, не изменяет существенно уровень ограничения амплитуды параметрических спиновых волн.

Л и т е р а т у р а

1. T.S. Hartwick, P.R. Peressini, M.T. Weiss, *J. Appl. Phys.* 32, 2235, 1961
2. Я.А.Моносов, Нелинейный ферромагнитный резонанс, изд. "Наука", М., 1971.
3. А.П.Сафантьевский, Диссертация, М., 1971.
4. J.J. Green, E. Schlömann, *J. Appl. Phys.* 33, 1358 S, 1962
5. В.Барьяхтар, Г.Урушадзе. *ЖЭТФ*, 38, 1253, 1960.
6. Г.Мелков, *ЖЭТФ*, 31 373, 1971.
7. S. Wang, G. Thomas, Ta-lin Hsu, *J. Appl. Phys.* 39, 2719, 1968
8. S. Wang, Ta-lin Hsu, *Appl. Phys. Letters* 16, 534, 1970
S. Wang, Ta-lin Hsu, *J. Appl. Phys.* 42, 1566, 1971
S. Wang, Ta-lin Hsu, *J. Appl. Phys.* 43, 233, 1972
9. В.Е.Захаров, В.С.Львов, *ЖЭТФ*, 60, 2066, 1971.
10. В.В.Зауткин, В.С.Львов, С.С.Старобинец, *ЖЭТФ*, 62, 1972.
11. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец, *ЖЭТФ*, 59, 1200, 1970.
12. В.В.Зауткин, В.Е.Захаров, В.С.Львов С.Л.Мушер, С.С.Старобинец, *ЖЭТФ*, 62, 1782, 1972
13. В.В.Зауткин, В.С.Львов, С.Л.Мушер, С.С.Старобинец, Письма в *ЖЭТФ*, 14, 310, 1971.
14. В.Е.Захаров, В.С.Львов, *ФТТ* 14 (в печати) 1972.
15. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.Л.Мушер, *ФТТ*, 14, 832, 1972.

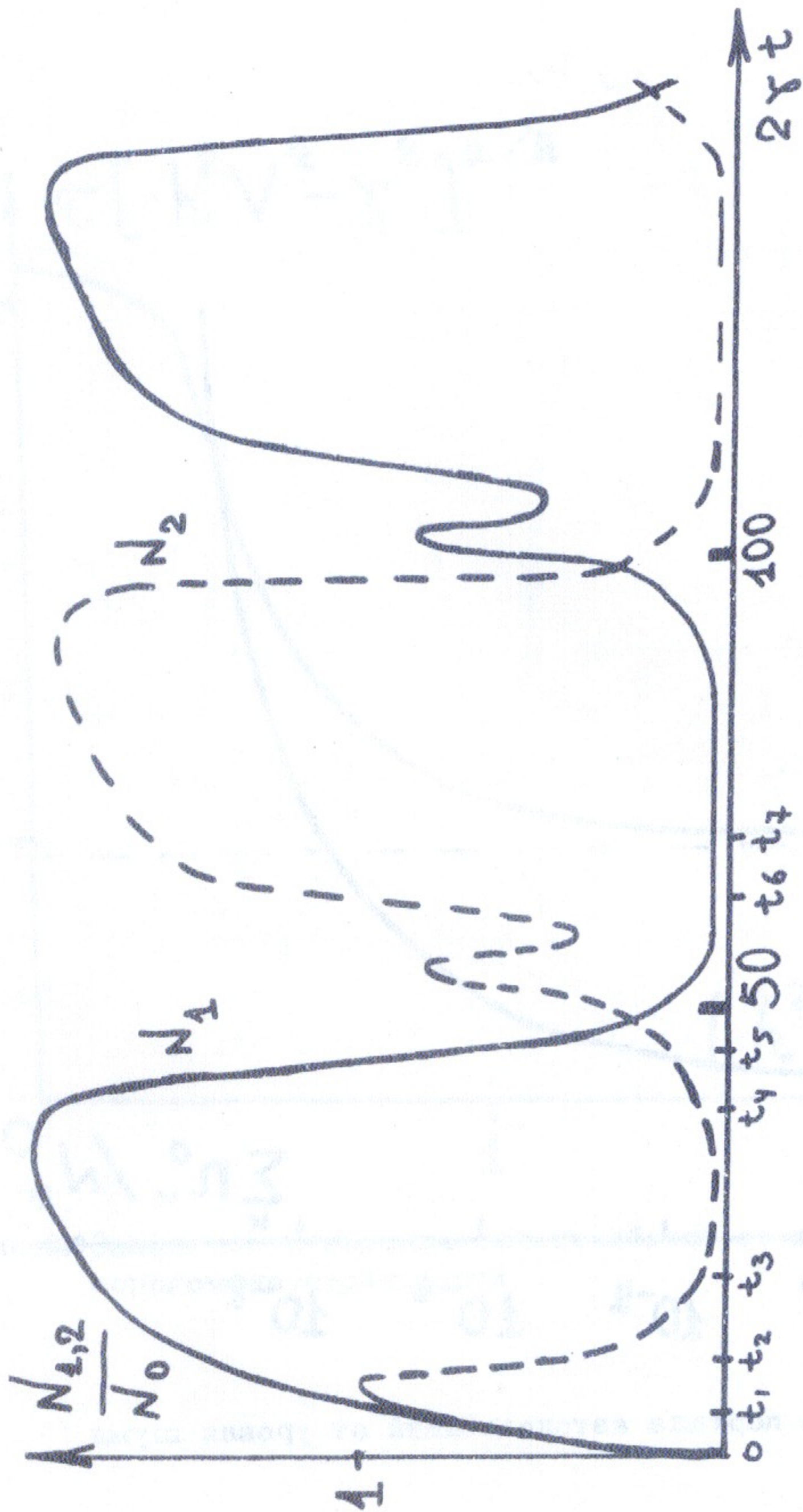


Рис.1. временная зависимость амплитуд $N_1(t)$ и $N_2(t)$ на лучах при $kV - \gamma = 0,1\gamma$. $\sum_k n_{0k} N^{-1} = 10^{-4}$.

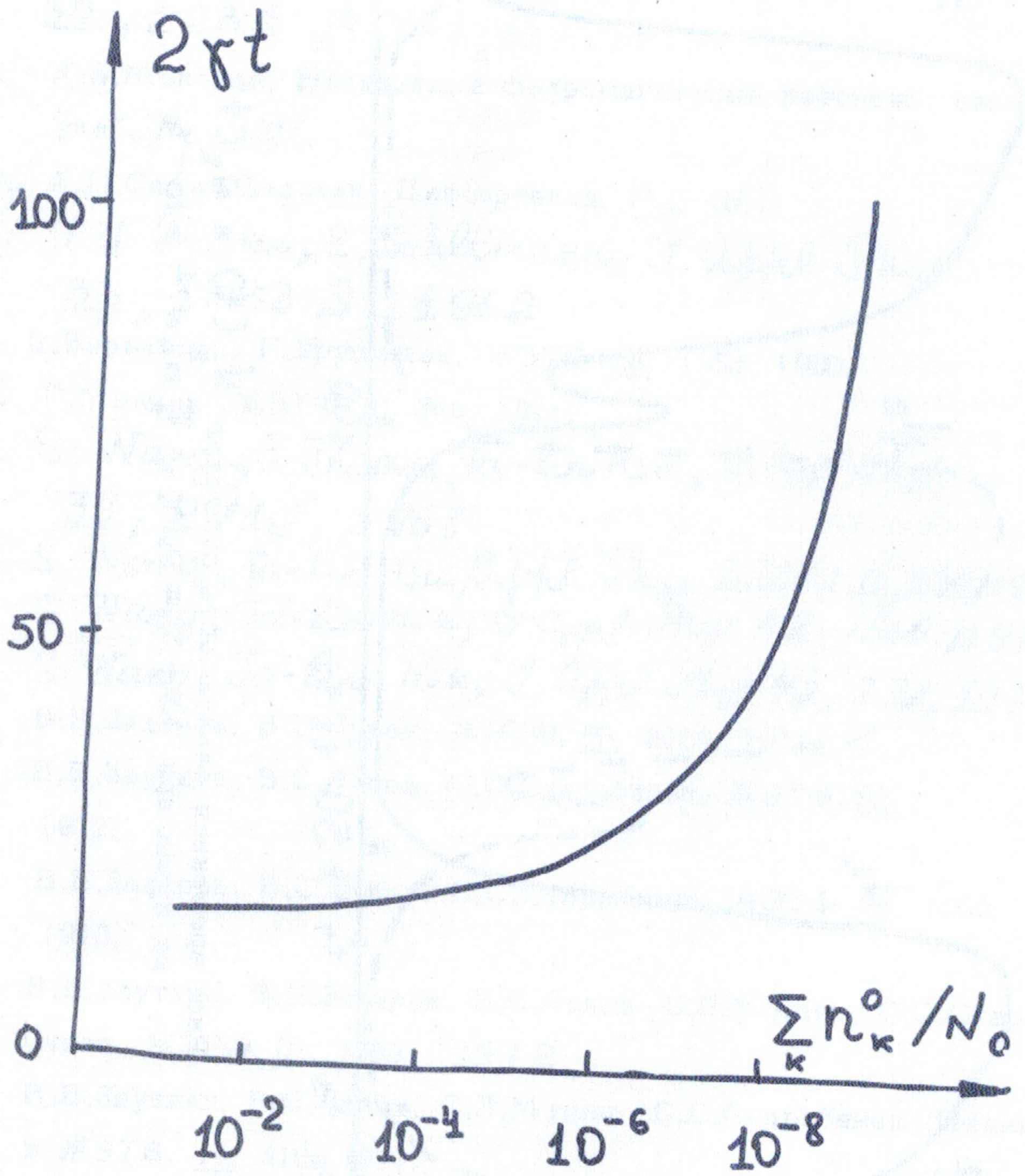


Рис.2. Зависимость периода автоколебаний от уровня шума

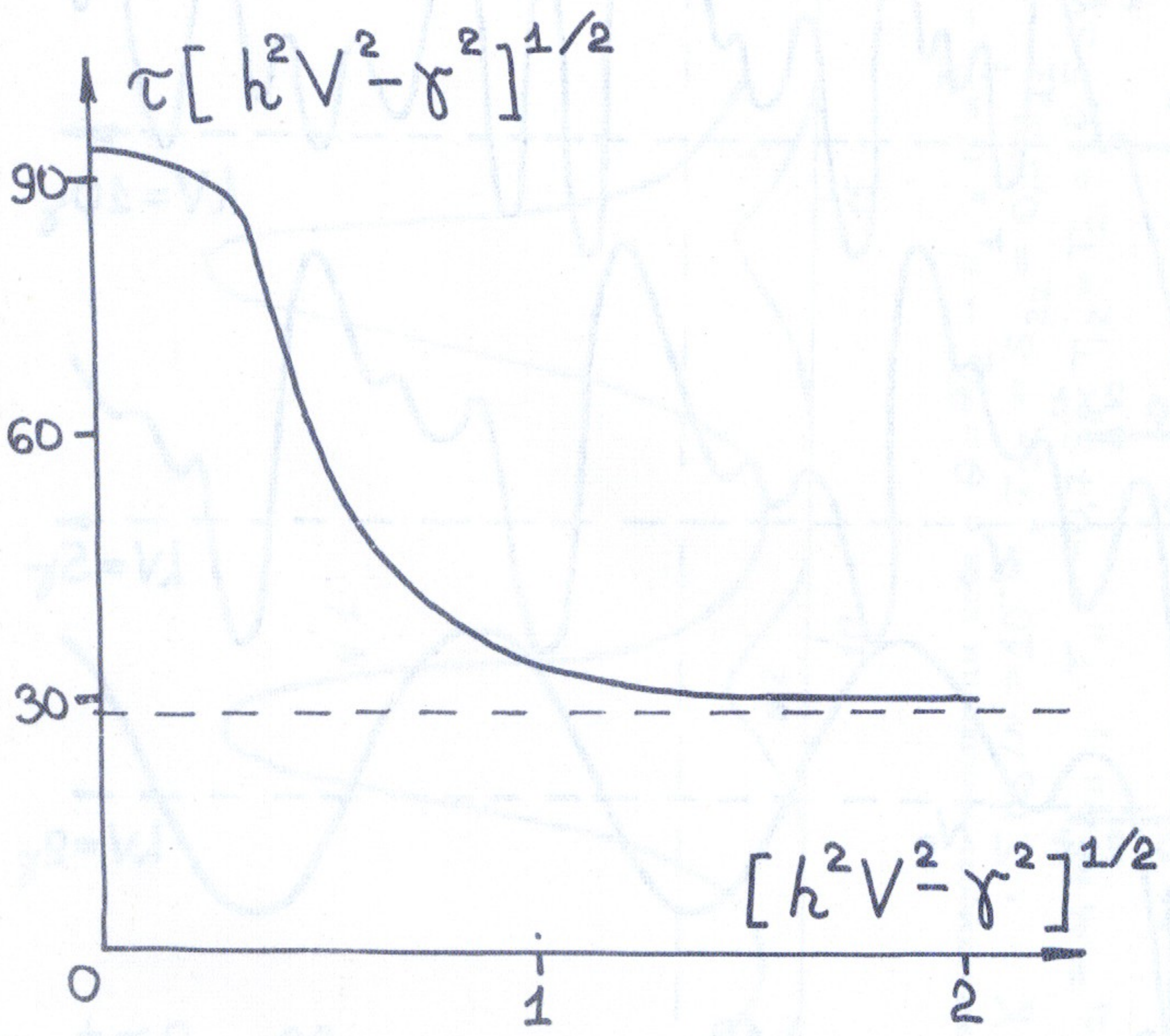


Рис.3. Зависимость периода автоколебаний от превышения над порогом неустойчивости.

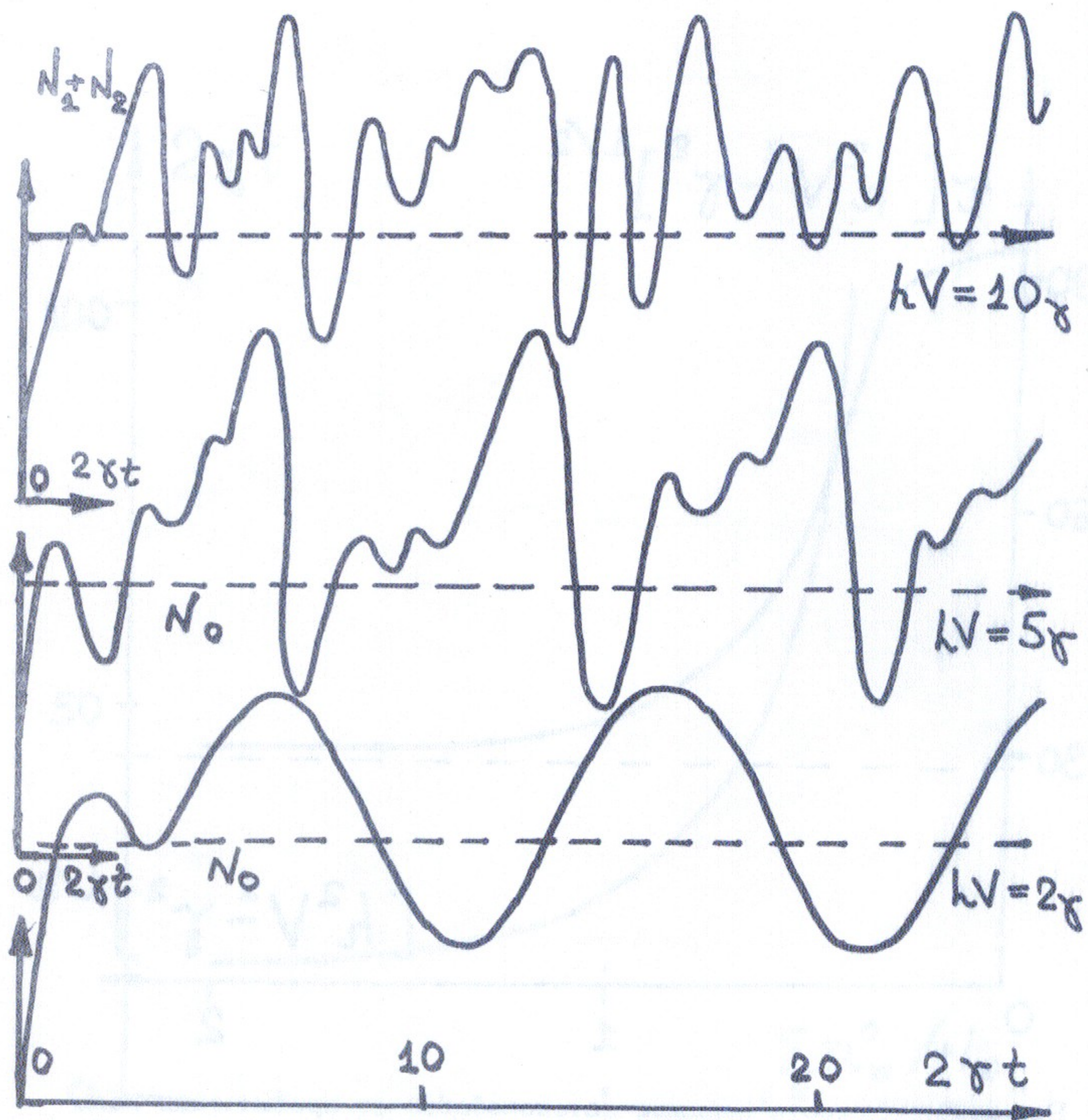


Рис.4. Временная зависимость суммарной амплитуды пар при различных превышениях.

$$\left(\sum n_0 / N_0 = 10^{-2}, S_1 = 0, T = \frac{3}{4} S_0 \right).$$

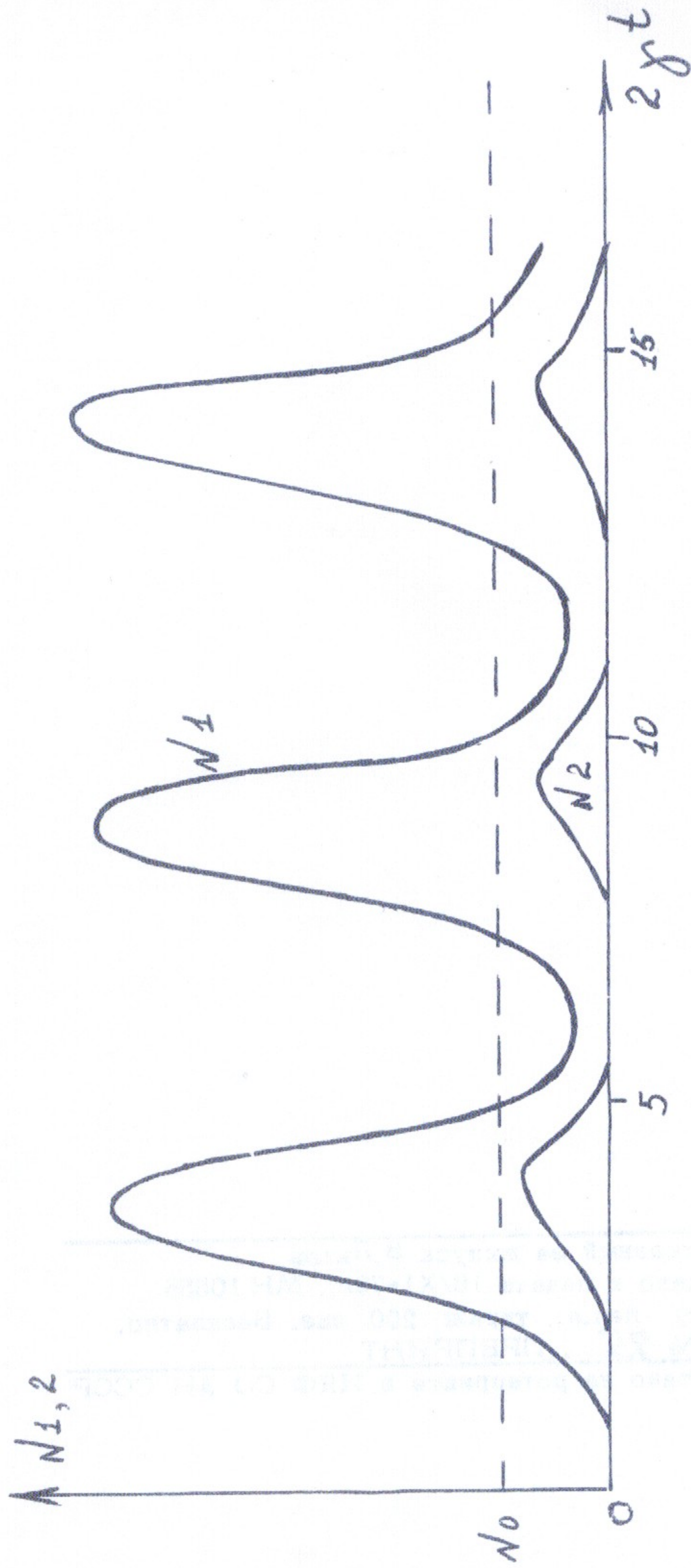


Рис. 5. Временная зависимость амплитуды волн с $\theta = \pi/2 - N_1$ и $\theta = \pi/4 - N_2$
 ($\ln T_{1,2} = 2\chi$, $\sum n_{0,1} = 10^{-2}$, $T_{22} = S_{22} = 0,5 S_{11}$,
 $S_{12} = S_{21} = 0,75 S_{11}$, $T_{11} = -0,7 S_{11}$, $T_{12} = T_{21} = -0,5 S_{11}$)

Ответственный за выпуск В. Львов

Подписано к печати 10/XI-72г., МН 10555

Усл. 1,2 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 75 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР