21

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 71 - 72

Я.С.Дербенёв, А.Н.Скринский

ФАЗОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ СГУСТКОВ В ЖЕСТКОФОКУСИРУЮЩИХ НАКОПИТЕЛЯХ

Новосибирск

1972

Я.С.Дербенев, А.Н.Скринский

ФАЗОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ СГУСТКОВ В ЖЕСТКОФОКУСИРУЮЩИХ НАКОПИТЕЛЯХ

(Доклад, представленный на III Всесоюзное совещание по ускорителям, Москва, 1972 г.)

АННОТАЦИЯ

Показано, что в накопителях с неоднородной фокусировкой под влиянием встречного сгустка искажается потенциальная яма энергетических колебаний частиц, вплоть до потери устойчивости равновесной фазы при достаточно большом токе. Эффект слабо зависит от поперечных размеров встречного сгустка и амплитуд колебаний частиц, но быстро растет с увеличением их азимутальной модуляции. Этот механизм взаимодействия приводит также к связи когерентных фазовых колебаний встречных сгустков. Эти явления, наряду с эффектом изменения синхротронной массы, следует учитывать при проектировании установок с малыми значениями β -функции в месте встречи.

PHASE EFFECTS OF THE COLLIDING BUNCHS INTERACTION IN THE STRONG-FOCUSING STORAGE RINGS

Ya.S.Derbenyev, A.N.Skrinsky

Abstract

It is shown that in the storage rings with inhomogeneous focusing the potential of particle energetic oscillations is distorted under the influence of the colliding bunch up to the stability loss at sufficiently high current.The effect depends weakly on transversal dimensions of colliding bunch and oscillation amplitudes of particles but it increases rapidly with increasing of its azimutal modulation. This interaction mechanism leads also to the coupling of coherent phase oscillations of colliding bunchs. These phenomena as well as the effect of synchrotron mass changing should be taken into account in designing of installations with low β-function at the place of collision.

Влияние встречного сгустка на энергетические колебания частиц в накопителях рассматривалось ранее в работах /2/, где был исследован случай встречи под углом. Оказывается, что в накопителях с жесткой фокусировкой искажение потенциальной ямы колебаний энергии встречным сгустком может иметь место и при совпадающих равновесных орбитах.

Отправным пунктом для понимания природы эффекта в целом может послужить рассмотрение столкновения двух встречных частиц, скорости которых не вполне антипараллельны. При этом лабораторная система не совпадает с системой центра инерции, и может происходить обмен энергией. В накопителях с неоднородной фокусировкой существует корреляция между угловым и пространственным отклонениями от равновесной орбиты; с этим обстоятельством и связано возникновение среднего эффекта.

Найдем среднюю по бетатронным колебаниям скорость изменения энергии частицы под действием электрического поля встречного сгустка, учитывая азимутальную модуляцию фокусировки. Исходим из общего выражения:

$$\overline{\dot{\mathcal{E}}} = e\overline{\vec{E}\vec{v}} = -e\overline{\vec{v}\left(\nabla A^0 + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)} = e\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(A^0 - \frac{\vec{v}}{c}\vec{A}\right)} = \tag{1}$$

$$= -\overline{\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t)}$$

где (A^0 , $\vec{A}$) – 4-потенциал, черта означает усреднение по времени вдоль траектории частицы при постоянной энергии ; функция $\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t)$ представляет собой лагранжиан взаимодействия частицы с полями встречного сгустка. В неограниченном пространстве $\mathcal{L}$ можно записать в виде

$$\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t) = -ee'\int d\Gamma' \frac{1-\vec{v}\vec{v}'/c^2}{|\vec{r}-\vec{r}'|} f(\vec{p}',\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|) \tag{2}$$

где $f(\vec{p},\vec{r},t)$ – плотность распределения частиц встречного сгустка в фазовом пространстве. В накопителе выражение для $\mathcal{L}$ будет зависеть от волноводных свойств камеры.

Возьмем наиболее простой и "чистый" случай однородной камеры с односвязным сечением. При этом поля отдельных элементов сгустка экранируются на расстояниях порядка апертуры A .

Если, как обычно, поперечные размеры сгустков $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ малы по сравнению с апертурой, то для вычисления $\bar{\mathcal{E}}$ можно воспользоваться выражением (2), ограничив интегрирование по $\vec{r}'$ в продольном направлении расстоянием $|\vec{r}-\vec{r}'|_{max} \sim A$. Представим радиус-векторы частиц в виде $\vec{r} = \vec{r}_s(\theta) + \vec{r}_\perp$, где $\vec{r}_s(\theta)$ соответствует равновесной орбите (θ – азимут), а $\vec{r}_\perp$ – поперечному отклонению. Пренебрегая на расстояниях $|\vec{r}-\vec{r}'| \le A$ запаздыванием и кривизной траекторий, получаем после интегрирования по θ':

$$\mathcal{L} = 4ee'\int d^3p'\, d^2r'_\perp\, f(\vec{p}', \theta, \vec{r}'_\perp, t)\, \ln(|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|/A)$$

или

$$\mathcal{L}(\theta, \vec{r}_\perp, t) = 4ee'\int d^2r'_\perp\, n(\theta, \vec{r}'_\perp, t)\, \ln(|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|/A)$$

Представим $\vec{r}_\perp$ как функцию азимута, энергии, амплитуд и фаз бетатронных колебаний:

$$\vec{r}_\perp(\theta, \phi) = \vec{\psi}(\theta)\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} + \vec{r}_b(a_1, a_2, \phi_1, \phi_2)$$

В случае "идеальной" динамики $\vec{r}_\perp = (x, z)$

$$x = \psi(\theta)\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} + a_x(\beta_x/R)^{\frac{1}{2}}\cos\phi_x \;; \quad d\phi_{x,z}/d\theta = R/\beta_{x,z}$$

$$z = a_z(\beta_z/R)^{\frac{1}{2}}\cos\phi_z \;; \quad \langle R/\beta_{x,z}\rangle = \nu_{x,z}$$

Азимут θ условимся отсчитывать от точки "встречи" равновесных частиц.

Стационарное распределение во встречном пучке имеет вид:

$$f_{st} = F(a_1, a_2, \mathcal{E}, \varphi') \;, \quad \varphi' = \theta + \omega_s t$$

Учитывая, что на траектории $\theta = \omega_s t + \varphi$, $\varphi = const$, выражение для $\bar{\mathcal{E}}$ можно записать в виде:

$$\overline{\dot{\mathcal{E}}} = 2ee'\int d\Gamma'_b\, dp' F\, \overline{\frac{d}{dt}\ln\left[|\vec{r}_\perp(\theta,\phi) - \vec{r}\,'_\perp(\theta,\phi')|/A(\theta)\right]}$$

Пренебрежем возможностью бетатронных резонансов, тогда усреднение по времени можно заменить независимым усреднением по θ и ϕ; при этом члены с производными по ϕ при усреднении выпадают, и окончательно получаем:

$$\overline{\dot{\mathcal{E}}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{ee'c}{\pi R^2}\int d\Gamma' F(a,\varepsilon',\varphi')\,\overline{\ln\left[|\vec{r}_\perp(\tfrac{\varphi+\varphi'}{2},\phi) - \vec{r}\,'_\perp(\tfrac{\varphi+\varphi'}{2},\phi')|/A(\tfrac{\varphi+\varphi'}{2})\right]}$$

Отсюда непосредственно видно, что эффект симметрично зависит от азимутальной модуляции поперечного движения встречных частиц; зависимость же от самих величин поперечных отклонений весьма слабая.

В азимутально-однородном случае $\frac{\partial \vec{r}_\perp}{\partial\theta} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial\theta} = 0$, а потому $\overline{\dot{\mathcal{E}}} = 0$.

Если длина сгустка мала по сравнению с характерной длиной азимутальной модуляции фокусировки, то приближенно

$$\overline{\dot{\mathcal{E}}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{ee'c}{\pi R^2}\int d\Gamma' F\,\overline{\ln\left[|\vec{r}_\perp(\tfrac{\varphi}{2},\phi) - \vec{r}\,'_\perp(\tfrac{\varphi}{2},\phi')|/A(\tfrac{\varphi}{2})\right]}\,; \tag{3а}$$

при этом $\overline{\dot{\mathcal{E}}}$ не зависит от длины сгустка.

Выполнив в этом выражении интегрирование по импульсам $\vec{p}\,'$, получим:

$$\overline{\dot{\mathcal{E}}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{ee'c}{\pi R^2}\int d^2 r'_\perp\, \sigma(\vec{r}\,'_\perp, \tfrac{\varphi}{2})\,\overline{\ln\left[|\vec{r}_\perp(\tfrac{\varphi}{2},\phi) - \vec{r}\,'_\perp|/A(\tfrac{\varphi}{2})\right]} \tag{3б}$$

Функция $e'c\,\sigma(\vec{r}_\perp,\theta)$ представляет собой среднюю (за период обращения) плотность тока встречного пучка в точке $\vec{r}_\perp, \theta$. Если параметр экранирования A не зависит от азимута, то $\ln A$ можно опустить, так как

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int d^2 r_\perp \sigma(\vec{r}_\perp, \theta) \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} N = 0$$

Здесь мы будем считать $A = const$.

Найдем $\bar{\mathcal{E}}$ для частицы, пролетающей по равновесной орбите ($\vec{r}_\perp \equiv 0$):

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{ee'c}{\pi R^2}\int d^2 r'_\perp \sigma\left(\vec{r}'_\perp, \frac{\varphi}{2}\right) \ln r'_\perp$$

Пусть плотность $\sigma(x, z, \theta)$ имеет вид

$$\sigma(x, z, \theta) = N\left[2\pi \varkappa_x \varkappa_z \exp\left(z^2/2\varkappa_z^2 + x^2/2\varkappa_x^2\right)\right]^{-1}$$

где $\varkappa_x(\theta)$, $\varkappa_z(\theta)$ – среднеквадратичные размеры пучка. Вычисления дают результат:

$$\bar{\mathcal{E}}(\varphi) = \frac{Nee'c}{\pi R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\varkappa\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \varkappa = \varkappa_x + \varkappa_z \qquad (4)$$

Для получения максимальной светимости выгодно иметь в месте встречи минимум поперечных размеров; при этом, как видно, равновесная фаза не смещается, а относительное изменение квадрата синхротронной частоты Ω равно (при условии $d\omega/d\mathcal{E} < 0$, обычном в ультрарелятивистском случае):

$$\Delta\Omega^2/\Omega^2 = \frac{\Delta V}{V} = -\frac{N|e|}{2RqV}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{d^2\varkappa}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} \cdot sign(ee') \qquad (5)$$

где V и q – амрлитуда и кратность частоты ВЧ-напряжения.

В электрон-позитронном случае $\Delta V < 0$, т.е. жесткость уменьшается.

Обратимся теперь к ситуации, когда поперечные отклонения частицы от равновесной орбиты в среднем значительно превыша - ют размеры встречного пучка. Тогда

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{Nee'c}{\pi R^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\overline{\ln r_\perp\left(\frac{\varphi}{2}, \phi\right)} = \frac{Nee'c}{\pi R^2}\overline{\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial r_\perp}{\partial\theta}\right)}_{\theta=\frac{\varphi}{2}} \qquad (6)$$

$$\Delta\Omega^2/\Omega^2 = -\frac{N|e|}{2RqV}\overline{\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial^2 r_\perp}{\partial\theta^2}\right)}_{\theta=0} \cdot sign(ee') \qquad (7)$$

Рассмотрим пример, когда в месте встречи $\beta_x = \beta_z = \beta$, $(d\beta/d\theta)_{\theta=0} = 0$, $\psi \equiv 0$ и отсутствует фокусировка. При этом формула (3а) (так же, как (5) и (7)) дает:

$$|\Delta V/V| = N|e|R/2qV\beta^2 = |\Delta\Omega^2/\Omega^2| \tag{8}$$

Удобно выражение для ΔV в киловольтах через ток в амперах:

$$|\Delta V|_{кв} \approx \left(\frac{R}{\beta}\right)^2 J_A/3q$$

Для R = 250 см, β = 5 см, J = 1 а, q = 1 получаем

$$|\Delta V| \approx 800 \text{ кв}$$

Кроме искажения потенциальной ямы колебаний энергии, следует учитывать еще очевидный эффект изменения зависимости $\omega(\mathcal{E})$ (F.Amman , препринт Фраскати 1972 г). Он обязан лишь поперечным полям встречного сгустка, под воздействием которых эффективно изменяется фокусировка, и должен зависеть от размеров пучка. Поправку $\delta\omega(\mathcal{E})$ нетрудно найти, воспользовавшись тем, что переменные p и $R\varphi$ – канонически сопряженные:

$$R\delta\dot{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial p}\overline{\mathcal{L}}$$

Представив x в виде $x = \psi\frac{\Delta p}{p} + x_b$ и усреднив по бетатронным колебаниям, получим для малых x:

$$\delta\omega = -\overline{\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}}/pR \approx -(\Delta p/p^2R)\,\overline{\psi^2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}} =$$

$$= 2\Delta\nu_x\omega_s(\psi^2/\beta_x)(\Delta p/p)$$

где $\Delta\nu_x$ – сдвиг частоты малых бетатронных колебаний, отношение ψ^2/β_x берется в месте встречи. Для относительного сдвига квадрата синхротронной частоты получаем:

$$\Delta\Omega^2/\Omega^2 = 2\Delta\nu_x\psi^2/\beta_x\,\frac{\mathcal{E}}{\omega}\frac{d\omega}{d\mathcal{E}} \tag{9}$$

Из сравнения (8) и (9) видно, что относительная значимость двух эффектов зависит от большого числа параметров.

Рассмотренные механизмы воздействия встречного сгустка на синхротронное движение частиц будут, очевидно, вносить также связь в когерентные фазовые колебания сгустков.

Литература

1. Я.С.Дербенев, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский, АЭ, 20, 217(1966).
2. J.E.Augustin , препринт Orsay , сентябрь 1970г.

Ответственный за выпуск Я.С.Дербенев
Подписано к печати 13.10.72 МН10516
Усл.0,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 71 . ПРЕПРИНТ
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР