13

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 61 - 72

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Новосибирск

1972

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрен процесс излучения при движении релятивистского электрона в периодическом внешнем электромагнитном поле. Получены поляризационные, спектральные и угловые характеристики излучения. Рассмотрена область, в которой существенны квантовые эффекты. Показано, что предложенный ранее авторами операторный квазиклассический метод применим и в случае сильно неоднородных полей.

Проводится обсуждение возможных экспериментов.

1. Введение

В связи с возможными применениями магнитотормозного излучения в последнее время возрос интерес к излучению релятивистских частиц в периодических электромагнитных структурах, именуемых часто ондуляторами. Свойства излучения в таких структурах в основном такие же как при излучении релятивистских частиц в поле плоской электромагнитной волны, которая может рассматриваться как определенный тип ондулятора.

Частицы высокой энергии x) ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \gg 1$) излучают главным образом вперед в малый угол $\sim 1/\gamma$, характеристики излучения существенно зависят от соотношения между углом отклонения (поворота) ψ частицы в поле и углом $1/\gamma$. В случае (I) $\psi \gg 1/\gamma$ излучение формируется на длине когерентности xx) l_m

($l_m \simeq \frac{R}{\gamma} = \frac{m}{eH} = \frac{1{,}7 \cdot 10^3 \text{см})}{H \text{ (эрс)}}$ и имеет универсальный характер (см., например, /1,2/), причем максимум спектрального распределения интенсивности излучения лежит в области $\omega \sim |\dot{\vec{v}}| \cdot \gamma^3$. В этом случае излучение в ондуляторе формируется внутри каждого элемента периодичности, а полная интенсивность излучения есть некогерентная сумма интенсивностей излучения в каждом элементе периодичности. В обратном случае (II) $\psi \ll 1/\gamma$ излучение существенно зависит от деталей структуры внешнего поля. Однако и в этом случае свойства излучения в периодических структурах являются в основной части универсальными, существенна когерентность излучения в разных элементах структуры, максимум спектрального распределения интенсивности смещается (в заданном поле) в сторону больших частот в l_m/l раз (l -длина периода ондулятора), причем излучается в основном одна гармоника (или несколько низших гармоник) соответствующая частоте периодической структуры. Именно эта специфика делает случай II особенно интересным.

---

x) Используется система единиц C=1, метрика $ab = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$

xx) Длина когерентности зависит от частоты, здесь она приведена для частоты в максимуме спектрального распределения.

Различные аспекты использования периодических электромагнитных структур (ондуляторов) многократно обсуждались в литературе: генерация микрорадиоволн [3], рассеяние света на свете [4], измерение энергии релятивистских частиц (см., например, [5] и цитированную там литературу).

В данной работе определены поляризационные и спектральные характеристики излучения релятивистских частиц в произвольном ондуляторе x) в случае II (когда $\psi \ll 1/\gamma$, т.е. длина периода много меньше длины когерентности в соответствующем поле). Рассмотрена как классическая задача излучения в ситуации, когда квантовые поправки малы, так и излучение в существенно квантовой области, которая в этом случае ближе к реальным возможностям эксперимента, чем в случае I.

II. Излучение в классической области

Рассмотрим излучение в бесконечном ондуляторе, в котором движение является квазипериодическим (под этим мы будем понимать движение, являющееся периодическим в системе, где частица в среднем покоится (см. рис. 1). Анализ задачи удобно проводить используя Фурье-компоненту скорости xx)

$$\vec{v}_{\tilde\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(t)\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{T} \vec{v}(t)\, e^{ikx}\, e^{i\varphi_0 n}\, dt = \vec{v}^{\,T}_{\tilde\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi_0} \qquad (1)$$

где $\varphi_0 = \omega T - \vec{k}\vec{r} = \omega T(1 - \vec{n}\vec{v}) = \tilde\omega T$

x) После того, как настоящая работа была закончена, нам стала известна работа [8], в которой найдено спектральное распределение интенсивности в классической задаче излучения для некоторых моделей периодической структуры в случае II.

xx) В этих же терминах проводится рассмотрение в квантовой области.

$\vec{v}$ – средняя скорость частицы, $\vec{l} = \vec{v}T$ – длина периода структуры, $\tilde{\omega} = \omega(1 - \vec{n}\vec{v})$. Учитывая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi_0} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi k) \tag{2}$$

имеем

$$\vec{v}_{\tilde{\omega}} = \vec{v}_{\tilde{\omega}}^{T} \cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi k) \tag{3}$$

переход от (1) к (3) соответствует переходу от интеграла к ряду Фурье.

Как уже отмечалось, свойства излучения существенно зависят от соотношения между углом отклонения частицы на длине периода и углом $1/\gamma$. В случае 1, когда $\psi = \dot{v}T = \Delta v \gg 1/\gamma$, из формулы (1) следует, что излучаются в основном частоты $\omega \sim \frac{\dot{v}\gamma}{1-\vec{n}\vec{v}}$ тогда $\varphi_0 \gg 1$. В случае П, когда $\psi = \dot{v}T = \Delta v \ll 1/\gamma$ соответственно излучаются в основном частоты $\omega \sim \frac{1}{T(1-\vec{n}\vec{v})}$, тогда $\varphi_0 \lesssim 1$.

В случае 1 в области основных частот фаза φ_0 велика, тогда

$$2\pi \sum_{k} \delta(\varphi_0 - 2\pi k) \to 2\pi \int dk\, \delta(\varphi_0 - 2\pi k) = 1 \tag{4}$$

так что излучение на каждом элементе периодической структуры является независимым, а интенсивность излучения в данном направлении может быть получена в результате сложения интенсивностей на каждой длине излучения (см./1,2/). Отметим, однако, что и в случае 1 для частот $\omega \lesssim \gamma^2/T$ длина когерентности сравнима с периодом структуры, так что при излучении этих частот следует учитывать когерентность.

В случае П ($\Delta v \ll 1/\gamma$) излучение формируется на многих элементах периодической структуры и в области основных частот всегда существенна когерентность. В этом случае удобно преобразовать $v_{\mu\tilde{\omega}}^{T}$ к виду:

$$v_{\mu\tilde{\omega}}^{T} = \frac{i}{kv} \left(\dot{v}_{\mu\tilde{\omega}}^{T}(kv) - v_{\mu}(k\dot{v}_{\tilde{\omega}}^{T}) \right) \tag{5}$$

где $K\mathrm{v} = \tilde{\omega} = \omega(1-\vec{n}\vec{\mathrm{v}})$

$$\dot{\mathrm{v}}^{T}_{\mu\tilde{\omega}} = \int_0^T \dot{\mathrm{v}}_\mu(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt \qquad (6)$$

причем скорость $\vec{\mathrm{v}}$ рассматривается как постоянная величина. С учетом (5) общее выражение для интенсивности излучения релятивистской частицы в бесконечном ондуляторе имеет вид[x)]

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{d^3k}{2\pi T}\cdot\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4}\left|(\vec{e}^{\,*}\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}})(1-\vec{n}\vec{\mathrm{v}}) + (\vec{e}^{\,*}\vec{\mathrm{v}})(\vec{n}\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}})\right|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\delta(\varphi_0 - 2\pi k) \quad (7)$$

При фиксированном векторе $\vec{n}$ формула (7) представляет собой сумму гармоник.

Просуммировав по поляризациям излученного фотона найдем (пренебрегая членами $\sim 1/\gamma$)

$$\langle dI\rangle_{\vec{n}\omega} = \frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{d^3k}{2\pi T}\cdot\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4}|\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}}|^2\cdot\frac{1}{2\gamma^4}\Big\{2y^2 + (1-2y)\cdot\Big[1+\cos 2(\beta-\varphi_1) - \quad (8)$$

$$- 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\sin 2\beta\cdot\sin 2\varphi_1\Big]\Big\}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\varphi_0 - 2\pi k)$$

где $y = \gamma^2(1-\vec{n}\vec{\mathrm{v}}) = \gamma^2\tilde{\omega}/\omega$; Фурье-компонента ускорения $\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}}$ разложена по двум взаимно перпендикулярным ортам в плоскости ортогональной к вектору $\vec{\mathrm{v}}$:

$$\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}} = |\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}}|\cdot e^{i\delta}(\vec{l}_1\cos\beta + \vec{l}_2\sin\beta\cdot e^{i\varphi}) \qquad (9)$$

$\vec{n}\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\cos\vartheta,\ \vec{n}\vec{l}_1 = \sin\vartheta\cos\varphi_1$. После интегрирования по азимутальному углу вылета фотона получим

$$\langle dI\rangle_{y\omega} = \frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{2}{T}\cdot\frac{d\omega}{\omega^2}\cdot\frac{dy}{y^2}|\dot{\vec{\mathrm{v}}}|^2\gamma^6\cdot F(1-2y+2y^2)\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\frac{\omega y T}{\gamma^2} - 2\pi k\right) \quad (10)$$

где введена величина

$$F = |\dot{\vec{\mathrm{v}}}^{T}_{\tilde{\omega}}|^2\tilde{\omega}^2 / 4|\dot{\vec{\mathrm{v}}}|^2 \qquad (11)$$

---

x) Используется хэвисайдова система единиц.

зависящая только от структуры поля. Формула (10) следует из приведенной в /1/ (стр.278) для случая квазипериодического движения (3). Проинтегрировав (10) по частоте получаем угловое распределение излучения

$$\langle dI \rangle_y = \frac{e^2}{4\pi} |\dot{\vec{v}}|^2 \gamma^4 \frac{dy}{2y^5} \left(1-2y+2y^2\right) \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\varphi_0 = 2\pi k)}{k^2} \quad (12)$$

Наконец, проинтегрировав по y имеем для полной интенсивности

$$\langle I \rangle = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{4}{3} |\dot{\vec{v}}|^2 \gamma^4 \cdot \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\varphi_0 = 2\pi k)}{k^2} \quad (13)$$

При любой структуре поля

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\varphi_0 = 2\pi k)}{k^2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

так что полная интенсивность излучения дается известным выражением $\langle I \rangle = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{2}{3} |\dot{\vec{v}}|^2 \gamma^4$

Из выражения (7) могут быть найдены также поляризационные характеристики излучения. Введем орты

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{n}\vec{v}]}{|[\vec{n}\vec{v}]|} \; ; \quad \vec{e}_2 = \frac{[\vec{n}[\vec{n}\vec{v}]]}{|[\vec{n}[\vec{n}\vec{v}]]|} \; ; \quad (15)$$

тогда поляризационные свойства излучения описываются матрицей

$$dI_{ik} = \frac{\langle dI \rangle}{2} \left(\delta_{ik} + \sum_{n=1}^{3} \xi_n \sigma^n_{ik} \right) \quad (16)$$

где σ^n матрицы Паули ξ_n -параметры Стокса:

$$\xi_n = \frac{a_n}{c} \; ; \quad n = 1, 2, 3 \quad (17)$$

где

$$a_1 = 2\left[\sin 2(\varphi_1-\beta) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\varphi_1\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]\cdot y(1-y)$$

$$a_2 = 2\sin 2\beta\cdot\sin\varphi\cdot y(1-y) \tag{18}$$

$$a_3 = -\left[\cos 2(\varphi_1-\beta) - 2\sin 2\beta\cdot\sin 2\varphi_1\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\right](1-2y+2y^2)-(1-2y)$$

$$c = 2y^2 + (1-2y)\left[1+\cos 2(\varphi_1-\beta) - 2\sin 2\beta\cdot\sin 2\varphi_1\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$$

Излучение при заданных $\vec{n}, \omega$ является полностью поляризованным (вообще говоря эллиптически), т.е. параметры Стокса удовлетворяют соотношению $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1$, в чем можно убедиться прямым вычислением.

Представляют интерес также поляризационные свойства излучения, когда по ряду переменных проведено интегрирование. После интегрирования по частоте и азимутальному углу вылета фотона имеем

$$\xi_1 = 0,\quad \xi_2 = \frac{S\cdot 2y(1-y)}{1-2y+2y^2},\quad \xi_3 = \frac{2y-1}{1-2y+2y^2} \tag{19}$$

где учтено равенство (14) и

$$S = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F\cdot\sin 2\beta\cdot\sin\varphi}{k^2}\Bigg|_{\varphi_0=2\pi k} \tag{20}$$

Наконец, проинтегрировав по полярному углу излучения, найдем поляризационные свойства излучения в целом:

$$\xi_1 = 0,\quad \xi_2 = \frac{S}{2},\quad \xi_3 = \frac{1}{2} \tag{21}$$

Таким образом, излучение в ондуляторе в случае П является частично поляризованным, причем степень линейной поляризации(ξ_3) является универсальной и не зависит от структуры поля, а степень циркулярной поляризации в существенной степени определяется этой структурой.

Для иллюстрации рассмотрим два конкретных примера, когда периодическая структура состоит из участков с однородным магнитным полем разного направления, причем угол поворота частицы в поле данного направления $\psi = \dot{\vartheta} T \ll 1/\gamma$, ось z направлена по $\vec{v}$, ось x – по $\vec{l}_1$, ось y – по $\vec{l}_2$.

A) $$H_y = H \quad 0 < z < \ell/2$$
$$H_y = -H \quad \frac{\ell}{2} < z < \ell \tag{22}$$
$$H_x = H_z = 0$$

В этом случае

$$F_A(\varphi_0 = 2\pi k) = 4\sin^4\frac{\pi k}{2}, \quad S = 0 \tag{23}$$

Подставляя F_A в (10) – (13) получаем спектр излученных фотонов. На рис.2 приведен график функции $\frac{2}{\langle I\rangle}\frac{\langle dI\rangle_A}{d\xi}$, $\xi = \omega/\omega_c$, $\omega_c = \frac{4\pi\gamma^2}{T}$

Излучение частично линейно поляризовано ($|\vec{\xi}| = \frac{1}{2}$) под углом $\pi/4$ к направлению ускорения (см.(21)), а циркулярная поляризация в этом случае отсутствует. Однако она может быть получена в магнитном поле более сложной конфигурации:

B) $$H_y = -H, \ 0 < z < \frac{\ell}{8}, \ \frac{5}{8}\ell < z < \frac{3}{4}\ell$$
$$H_y = H, \ \frac{\ell}{8} < z < \frac{\ell}{4}, \ \frac{\ell}{2} < z < \frac{5}{8}\ell \tag{24}$$
$$H_x = -H, \ \frac{\ell}{4} < z < \frac{3}{8}\ell, \ \frac{7}{8}\ell < z < \ell$$
$$H_x = H, \ \frac{3}{8}\ell < z < \frac{\ell}{2}, \ \frac{3}{4}\ell < z < \frac{7}{8}\ell$$

В этом случае

$$F_B(\varphi_0 = 2\pi k) = 32\sin^2\frac{\pi k}{2}\cdot\sin^4\frac{\pi k}{8}$$
$$S = -\frac{8}{\pi^2}\left[3y - 4y_1\right] \tag{25}$$

здесь $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ =0,916 постоянная Каталана

$$\psi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cdot \cos\left[\frac{(2k+1)}{4}\pi\right] = 0{,}753$$

Подставляя F_B в (10)-(13) найдем спектр излученных фотонов, приведенный на рис.3 (в тех же единицах, что и для случая А).

Излучение частично эллиптически поляризовано (см.(21)).

Мы рассматривали ондулятор бесконечной длины, можно показать, что для ондулятора с числом периодов N полученные выражения справедливы с точностью $\sim 1/N$.

Приступим к общему обсуждению. Периодические электромагнитные структуры (ондуляторы) позволяют получить направленные (в угол $\gtrsim 1/\gamma$) интенсивные пучки излучения от инфракрасной до рентгеновской области. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату внешнего поля. Поэтому для получения высокой интенсивности желательно использовать большие напряженности поля. Но при $H = 10^4$э длина излучения (для максимума спектрального распределения) составляет $\sim 0{,}2$ см. В таких полях при создании стационарной магнитной "решетки" практически можно реализовать только случай I (максимум промежуточный случай $\psi \sim 1/\gamma$). Однако существенные отличия случая П - сдвиг максимума спектрального распределения интенсивности в жесткую часть спектра, большая монохроматичность и возможность получения циркулярно поляризованного излучения проявляются в области $\psi \ll 1/\gamma$. Одна реализация этой области возможна при использовании лазеров. Тогда можно получить рентгеновское излучение с использованием электронов не слишком высокой энергии. Возможная схема[x] для этого такая: электроны с энергией ε движутся в накопителе радиуса R, в прямолинейном участке накопителя электроны попадают в лазерный резонатор, внутри которого создана область фокусировки длиной в несколько см эта область играет роль ондулятора. При ε =25Мэв и R = 25 см ведущее поле накопителя $H = 3.10^3$гс, так что максимум спектра магнитотормозного излучения в накопителе лежит в инфракрасной области ($\hbar\omega \sim 0{,}05$ эв). Если использовать лазер с длиной волны 10 мк (на CO_2), то будут излучаться фотоны с энергией $\sim$ 300 эв. Если напряженность лазерной волны в фокусе будет $H = 2.10^4$э, то энергия, теряемая на излучение в лазере, будет сравнима с потери-

x) Авторы благодарны А.Н.Скринскому за обсуждение этого вопроса.

ми за счет магнитотормозного излучения в накопителе.

Ш. Излучение в квантовой области

В работах [6,7] было показано, что наиболее адекватным подходом к задаче об излучении частицы высокой энергии во внешнем электромагнитном поле является формализм, использующий квазиклассическое приближение уже в исходных выражениях. В основе этого подхода лежит тот факт, что можно пренебречь некоммутативностью динамических переменных (члены $\hbar\omega_0/\varepsilon$, ω_0 -частота обращения) и учитывать только их коммутаторы с полем излученного фотона, т.е. отдачу при излучении (члены $\sim \frac{\hbar\omega}{\varepsilon}$). Развитый в этих работах операторный метод позволял, после проведения необходимых коммутаций и распутывания экспоненциальных выражений, переходить к величинам на классической траектории частицы. Следует отметить, что при проведении операции распутывания предполагалось, что длина формирования излучения много меньше характерной длины неоднородности поля. Как показывает проведенный в [2] анализ, такое ограничение не является необходимым, нужна только квазиклассичность движения $\hbar\omega_0/\varepsilon \ll 1$, при этом операция распутывания с этой точностью приводит к следующему выражению:

$$e^{-ikx(t_2)}\, e^{ikx(t_1)} = T\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\mathcal{H}-\hbar\omega-\sqrt{(\vec{\mathcal{P}}(t)-\hbar\vec{k})^2+m^2}\right]\right\} \tag{26}$$

где $\mathcal{H}$, $\vec{\mathcal{P}}$ -операторы энергии и импульса соответственно, T - оператор хронологического произведения.

Разлагая правую часть этого равенства по величине $(1-\vec{n}\vec{v})$ $\sim 1/\gamma^2$ и учитывая старшие члены разложения приходим к выражению по форме совпадающему с формулой (16) работы [6]

$$e^{-ikx(t_2)} \cdot e^{ikx(t_1)} = \exp\left\{-i\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\hbar\omega}\left[kx(t_2)-kx(t_1)\right]\right\} \tag{27}$$

здесь $k^2=0$.

Поскольку остальные коммутаторы тоже не связаны с видом поля, то формулы (16,17,18) работы [6] справедливы с квазиклассической точностью в произвольном внешнем поле, при условии, что его величина много меньше критической ($H \ll H_0 = \frac{m^2}{e\hbar}$).

Таким образом эти формулы справедливы в случае, когда длина неоднородности поля много меньше характерной длины формирования магнитотормозного излучения. Критерием квазиклассичности здесь является $\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar}{T\varepsilon} \ll 1$, т.е. частота квантов внешнего поля много меньше энергии электрона.

Поскольку энергия излучаемого кванта $\hbar\Omega\gamma^2 \sim \hbar\omega$, а классическая теория применима при $\hbar\omega \ll \varepsilon$, квантовые эффекты излучения мы будем характеризовать параметром $\eta = \frac{4\pi\gamma^2}{T\varepsilon}$. При $\eta \ll 1$ имеем классический случай, когда $\eta \gtrsim 1$ существенны квантовые эффекты в процессе излучения. Интенсивность излучения фотона с 4-импульсом K_μ имеет вид (см. 9,17,18) работы [6] x)

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{d^3K}{(2\pi)^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt\cdot R(t)\cdot\exp\left[\frac{i\varepsilon\cdot Kx(t)}{\varepsilon-\omega}\right]\right|^2 \qquad (28)$$

где $R(t)$ по форме совпадает с матричным элементом перехода для свободных частиц с учетом законов сохранения и зависимости импульса от времени $p = p(t)$. Для скалярных частиц:

$$R(t) = \frac{\vec{e}^{\,*}\vec{p}(t)}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}} \qquad (29)$$

Для спинорных частиц

$$R(t) = \varphi_f^+\left[A(t) + i\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)\right]\varphi_i$$

$$A(t) = \frac{\vec{e}^{\,*}\vec{p}(t)}{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\varepsilon-\omega+m}{\varepsilon+m}} + \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon-\omega+m}}\right) \qquad (30)$$

$$\vec{B}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon-\omega+m}{\varepsilon+m}}\left[\vec{e}^{\,*}\vec{p}(t)\right] - \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon-\omega+m}}\cdot\left[\vec{e}^{\,*}, \vec{p}(t)-\vec{K}\right]\right)$$

---

x) В дальнейшем $\hbar = 1$.

Выбрана поперечная калибровка поляризации фотона. Здесь нас как и в классической области будет интересовать случай ГI движения и периодических структурах, когда длина неоднородности (период структуры) много меньше характерной длины магнитотормозного излучения $\Omega = \frac{2\pi}{T} \gg \frac{\gamma}{R} = \frac{H}{H_0}\cdot m$.

В этом случае интенсивность излучения скалярными частицами получается, если умножить выражение (7), полученное в классической теории, на фактор $((\varepsilon-\omega)/\varepsilon)^3$, а также фазу $\varphi_0(\omega)$ заменить на фазу $\varphi_0' = \varphi_0(\omega' = \omega\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega})$.

По этой причине до интегрирования по частотам параметры Стокса при излучении скалярными частицами совпадают в классическом и квантовом случаях (см.(18)).

В случае спинорных частиц выражение для интенсивности просуммированное по спину конечного и усредненное по спину начального электрона имеет вид

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\cdot\frac{d^3k}{2\pi T}\cdot\left(\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon}\right)^3\cdot\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4}\cdot\left\{\frac{(2\varepsilon-\omega)^2}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)}\left|(\vec{e}^{\,*}\dot{\vec{v}}^{\,T}_{\tilde{\omega}})(1-\vec{n}\vec{v}) + \right.\right. \tag{31}$$

$$\left.+(\vec{e}^{\,*}\vec{v})(\vec{n}\dot{\vec{v}}^{\,T}_{\tilde{\omega}})\right|^2 + \frac{\omega^2}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)}\left[|\dot{\vec{v}}^{\,T}_{\tilde{\omega}}|^2(1-\vec{n}\vec{v})^2(\vec{e}^{\,*}\vec{e}) - \right.$$

$$\left.\left. -\left|(\vec{e}\,\dot{\vec{v}}^{\,T}_{\tilde{\omega}})\cdot(1-\vec{n}\vec{v}) + (\vec{e}\vec{v})(\vec{n}\dot{\vec{v}}^{\,T}_{\tilde{\omega}})\right|^2\right\}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\delta(\varphi_0' - 2\pi k)$$

Параметры Стокса для спинорных частиц в выбранных ранее осях и обозначениях см. (15-17) равны

$$\xi_1^{(\frac{1}{2})} = \frac{a_1}{c+\frac{\omega^2 y^2}{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}}\,,\quad \xi_2^{(\frac{1}{2})} = \frac{1+\frac{\omega^2}{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}}{c+\frac{\omega^2 y^2}{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}}\,,\quad \xi_3^{(\frac{1}{2})} = \frac{a_3}{c+\frac{\omega^2 y^2}{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}} \tag{32}$$

Проводя суммирование по поляризации фотона и интегрируя по азимутальному углу его вылета (фактор 2π) получаем:

$$dI^{(0,\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} F\cdot \frac{e^2 m^2 \eta^2 x^2\, du\, dy}{16\pi^3 y^6 u^2 (1+u)^3}\cdot\left(y^2 f^{(0,\frac{1}{2})}_{(u)} + \frac{1}{2} - y\right)\cdot \delta\left(uy - \frac{\eta k}{2}\right) \tag{33}$$

здесь введены следующие обозначения

$$u = \frac{\omega}{\varepsilon-\omega},\quad \eta = \frac{\omega_c}{\varepsilon} = \frac{4\pi\gamma}{Tm},\quad f^{(0)} = 1,\quad f^{(\frac{1}{2})}_{(u)} = 1 + \frac{u^2}{2(1+u)}$$

$$x^2 = |\vec{v}|^2 \gamma^4 / m^2$$

F введено выше см. (11), (23), (25).

Проинтегрировав выражение (33) по полярным углам вылета фотона получаем спектральное распределение в следующем виде

$$dI^{(0,\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} F\, \frac{e^2 m^2 x^2 u\, du}{\pi^3 \eta^2 k^4 (1+u)^3}\left(f^{(0,\frac{1}{2})}_{(u)} + 2\left(\frac{u}{\eta k}\right)^2 - \frac{2u}{\eta k}\right)\vartheta(\eta k - 2u) \tag{34}$$

Классические выражения для интенсивности получаются из (34) заменой $(1+u)^3 \to 1,\ f \to 1$

Для получения полной интенсивности излучения удобно провести сначала интегрирование по u , получаем угловое распределение излучения

$$dI^{(0,\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} F\, \frac{e^2 m^2 x^2}{k^2 \pi^3}\cdot \frac{x\, dx}{(1+\eta k x)^3}\left(f^{(0,\frac{1}{2})}_{(\eta k x)} - 2x + 2x^2\right) \tag{35}$$

здесь $x = \dfrac{1}{2y}$; $(0 \le x \le 1)$

Вычислим полную интенсивность излучения в асимптотических областях $\eta \ll 1$ и $\eta \gg 1$. При $\eta \ll 1$ очевидно получаем классическое выражение для интенсивности. В случае $\eta \gg 1$ со степенной точностью имеем

$$I_A^{(0)} = \frac{2e^2 m^2 x^2}{\pi^3 \eta^2} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(2K+1)^4} = \frac{2e^2 m^2 x^2}{\pi^3 \eta^2} \left(\frac{\pi^4}{96}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{48} \left(e m \frac{x}{\eta}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi} \cdot \frac{(eHT)^2}{192} \tag{36}$$

Из этого выражения видно, что интенсивность излучения не зависит от массы и энергии частицы:

$$I_B^{(0)} = \frac{2e^2 m^2 x^2}{\pi^3 \eta^2} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{3-4\cos\left[\left(K+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]}{(2K+1)^4} = \frac{1}{4} I_A^{(0)} \tag{37}$$

Для спинорных частиц соответственно имеем

$$I_A^{(\frac{1}{2})} = I_A^{(0)} \left(\ln\eta - \frac{5}{6} + \frac{96}{\pi^4} L_A\right); \quad L_A = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\ln(2K+1)}{(2K+1)^4} \simeq 0{,}017$$

$$I_B^{(\frac{1}{2})} = I_B^{(0)} \left(\ln\eta - \frac{5}{6} + \frac{384}{\pi^4} L_B\right); \quad L_B = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(3-4\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(K+\frac{1}{2}\right)\right]\right)}{(2K+1)^4} \ln(2K+1) = 0{,}094 \tag{38}$$

Вклад в полную интенсивность в случае скалярных частиц дает область больших по сравнению с $1/\gamma$ углов $\vartheta \sim \sqrt{\eta}/\gamma$. В случае спинорных частиц вклад в логарифм дает вся область интегрирования.

Отметим, что в области больших η излучение еще в большей степени чем в классическом случае падает на первые гармоники. При излучении фотона энергии, сравнимой с энергией электрона, представляет интерес получение вероятности излучения фотона. Для этого выражения для интенсивности необходимо умножить на величину $1/\omega = (1+u)/u\varepsilon$. Тогда для вероятности излучения с частотой ω имеем

$$dW^{(0,\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} F \frac{e^2 m^2 x^2 du}{\pi^3 \varepsilon \eta^2 k^4 (1+u)^2} \left(f^{(0,\frac{1}{2})}_{(u)} + 2\left(\frac{u}{\eta k}\right)^2 - 2\frac{u}{\eta k} \right) \vartheta(\eta k - 2u) \tag{39}$$

а угловое распределение имеет вид

$$dW^{(0,\frac{1}{2})} = \sum_{k=1}^{\infty} F \frac{e^2 m^2 x^2}{\pi^3 k^3 \varepsilon \eta} \frac{dx}{(1+\eta k x)^2} \left(f^{(0,\frac{1}{2})}_{(\eta k x)} - 2x + 2x^2 \right) \tag{40}$$

При $\eta \ll 1$ имеем для полной вероятности излучения

$$W_A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8e^2 m^2 x^2}{3\pi^3 \varepsilon \eta} \cdot \frac{1}{(2k+1)^3} = \frac{7}{3} \zeta(3) \frac{e^2 m^2 x^2}{\pi^3 \varepsilon \eta}$$

$$W_B = \frac{8e^2 m^2 x^2}{3\pi^3 \varepsilon \eta} \Lambda_1 ; \quad \Lambda_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 - 4\cos\left[\frac{\pi}{2}(k+\frac{1}{2})\right]}{(2k+1)^3} \simeq 0{,}445 \tag{41}$$

В случае $\eta \gg 1$

$$W_A^{(0)} = \frac{4e^2m^2x^2}{\varepsilon \pi^3 \cdot \eta^3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^5} = \frac{31}{8}\zeta(5)\frac{e^2m^2x^2}{\pi^3 \varepsilon \cdot \eta^3}$$

$$W_B^{(0)} = \frac{4e^2m^2x^2}{\varepsilon \cdot \pi^3 \eta^3} \cdot \Lambda_2 ; \ \Lambda_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 - 4\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}{(2k+1)^5} \simeq 0,197 \tag{42}$$

Вероятность излучения для частиц со спином половина в случае $\eta \gg 1$ имеет вид

$$W_{A,B}^{(1/2)} = \frac{1}{2} W_{A,B}^{(0)} \cdot \left(\ln\eta + \frac{1}{2} + \delta_{A,B}\right)$$

Здесь

$$\delta_A = \frac{32}{31}\frac{1}{\zeta(5)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(2k+1)}{(2k+1)^5} \simeq 0,005$$

(43)

$$\delta_B = \frac{1}{\Lambda_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 - 4\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}{(2k+1)^5} \cdot \ln(2k+1) \simeq 0,148$$

Если в формуле (43) положить $\delta = 0$, то она с точностью до численного множителя совпадает с выражением для вероятности комптоновского рассеяния в случае, когда налетающий фотон мягкий. Это обстоятельство связано с тем, что ондулятор можно представить в виде суперпозиции стоячих волн с определенными частотами, а те в свою очередь представляют сумму "бегущих" навстречу друг другу плоских влн, причем основной вклад в процесс дает волна, волновой вектор которой направлен против скорости электрона. Мягкость квантов этой волны следует из условия $\hbar\Omega \ll \varepsilon$ (условие квазиклассичности).

Л и т е р а т у р а

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М.Наука, 1967.
2. В.Н Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. М.Атомиздат, 1972.
3. В.Л.Гинзбург. Изв. АН СССР, сер. физ.11, 165, 1947.
4. Г.И.Будкер. Вестник АН СССР, № 1, 1972.
5. Н.А.Корхмазян, С.С.Элбакян, ДАН СССР, 203, 791, 197 2.
6. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ, 53, 1478, 1967.
7. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ 55, 1542, 1968.
8. Д.Ф.Алферов, Ю.А.Башмаков, Е.Г.Бессонов. Препринт ФИАН, № 23, 1972.

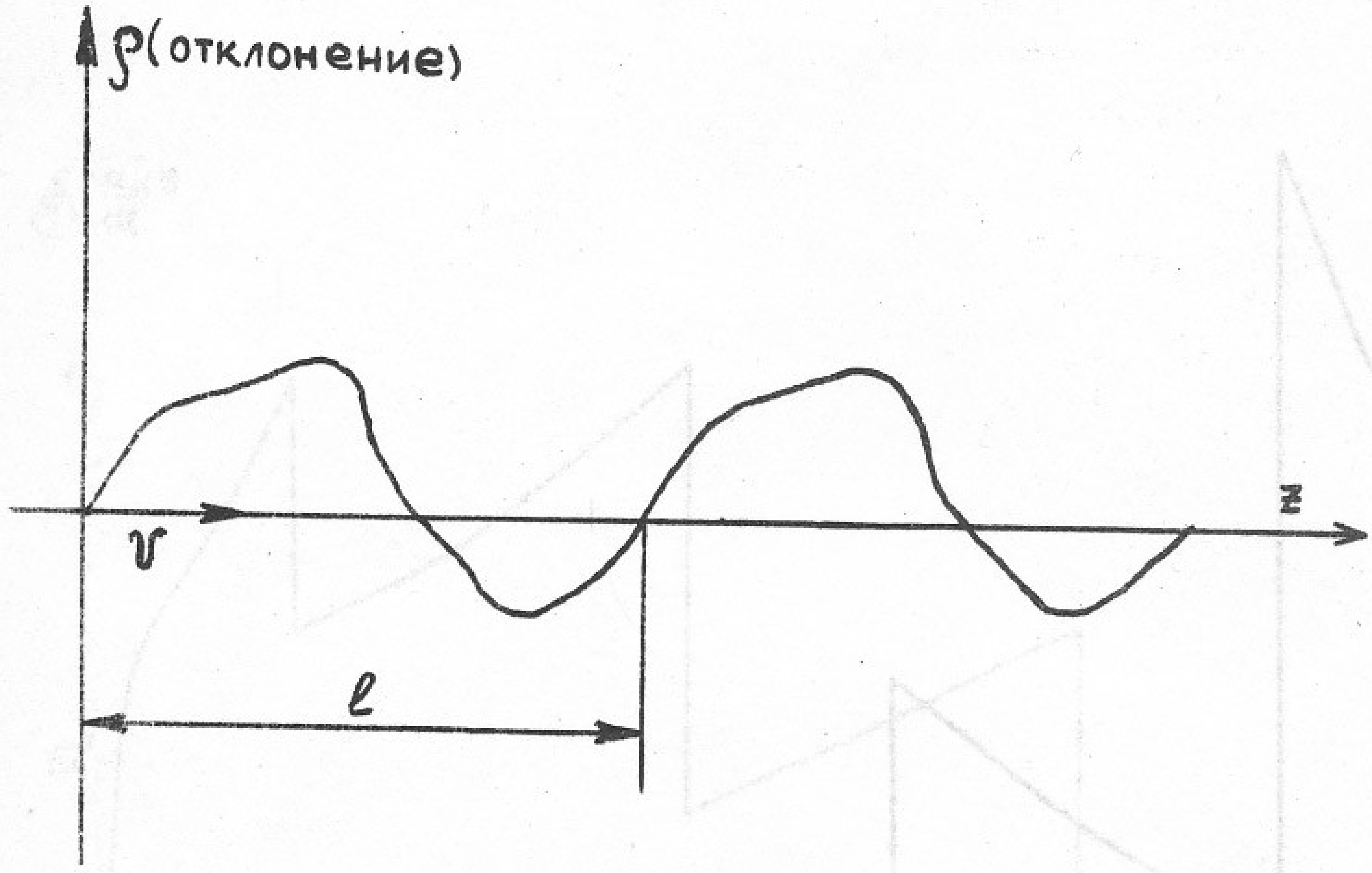

Рис. 1

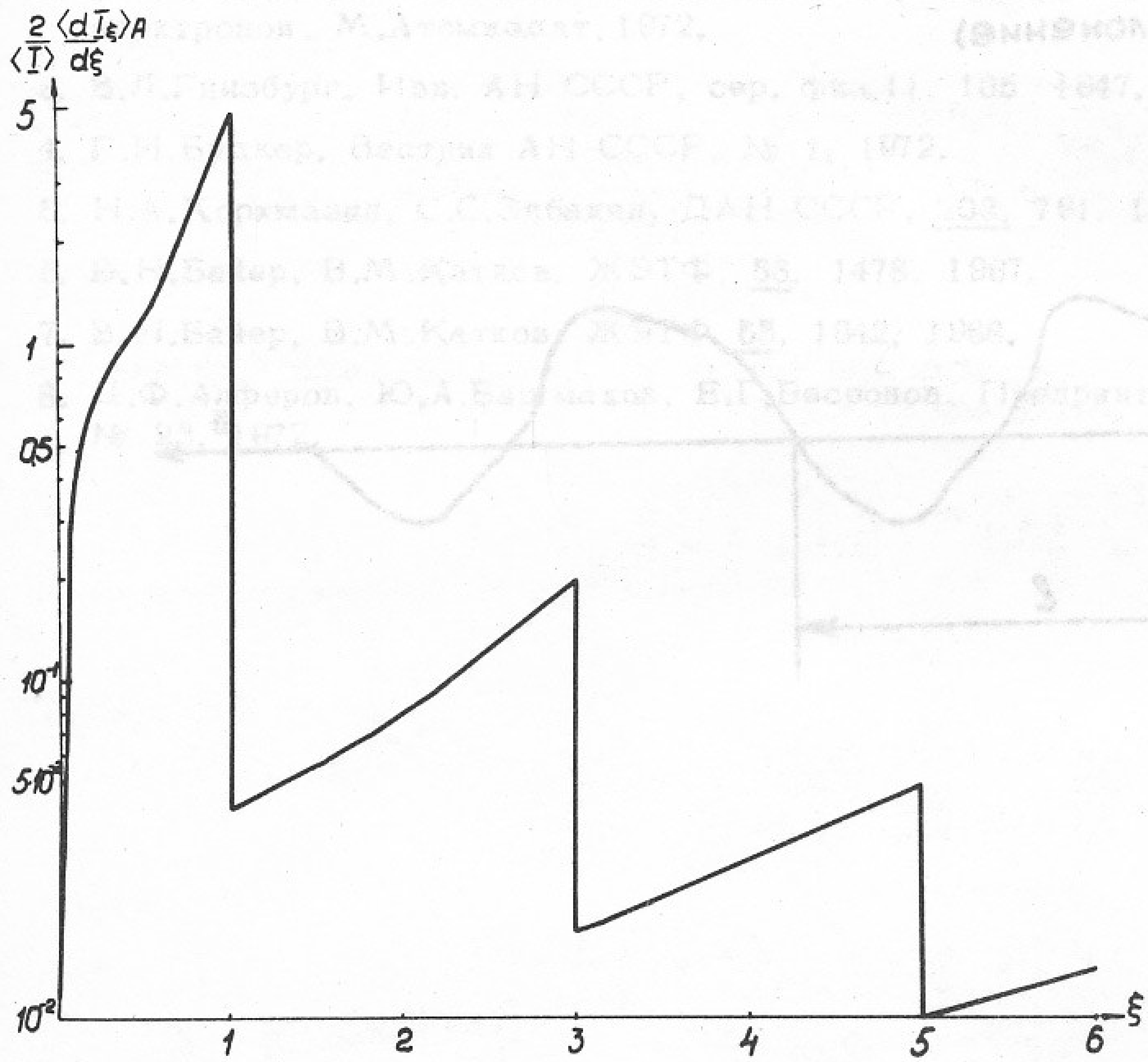

рис 2

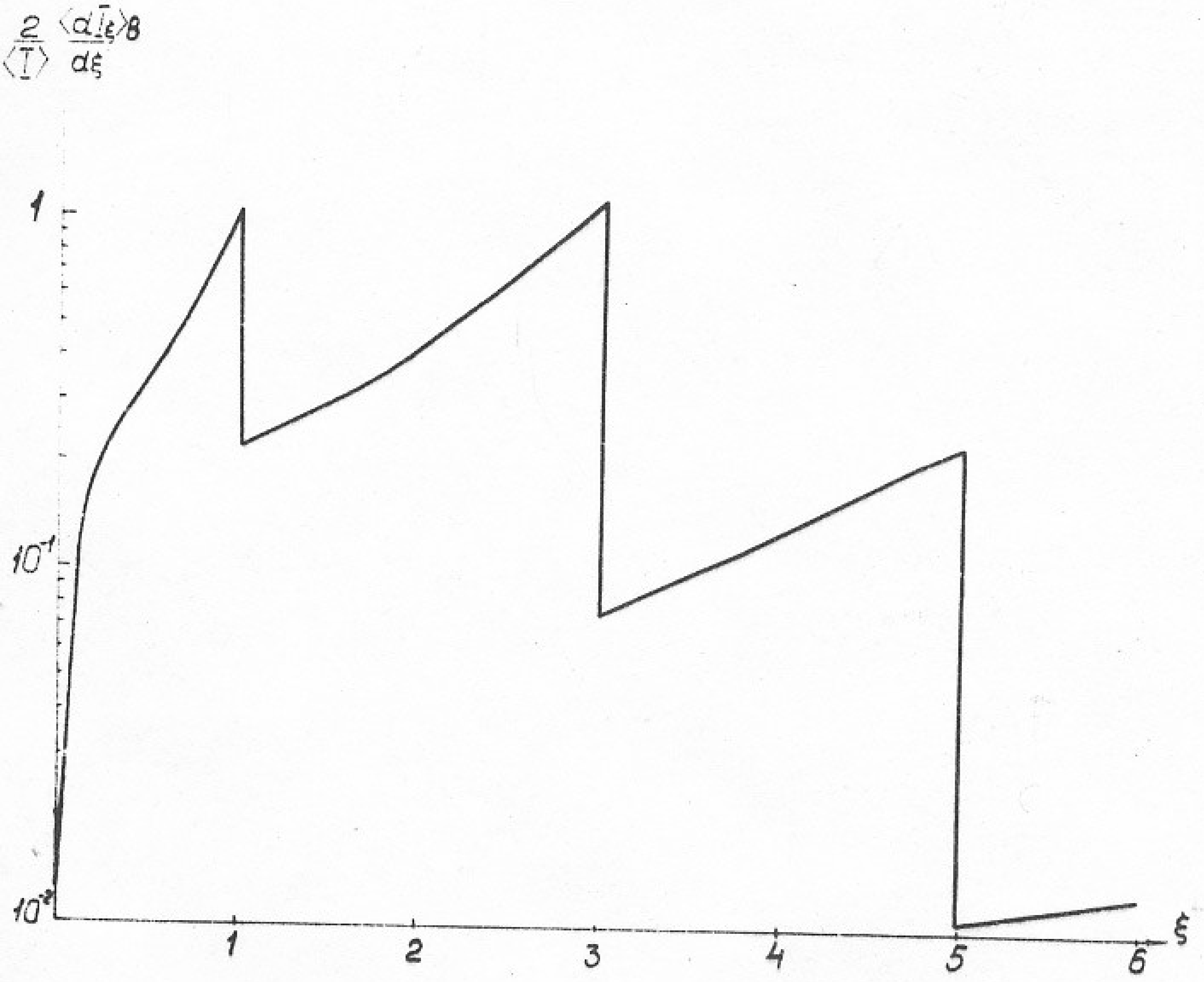
$\frac{2}{\langle I \rangle} \frac{\langle dI_\xi \rangle_B}{d\xi}$
1
10^{-1}
10^{-2}
1
2
3
4
5
6
ξ

РИС 3

Ответственный за выпуск В.М.Страховенко
Подписано к печати 7.1X.72 г. МН 10489
Усл. О,9 печ.л. тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 61. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР