10

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 57 - 72

В.С.Львов, А.М.Рубенчик

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Новосибирск

1972

В.С.Львов, А.М.Рубенчик

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

АННОТАЦИЯ

Изучается нелинейная стадия распадной неустойчивости внешнего высокочастотного электрического поля $E(t)=E_0\cos\omega_0 t$ на ленгмюровскую (ЛВ) и ионнозвуковую (ИЗВ) волну: $\omega_0=\omega_k+\Omega_{-k}$. Показано, что корреляция фаз ЛВ и ИЗВ в паре ω_k, Ω_{-k}, возникающая на линейной стадии неустойчивости, определяет и нелинейное поведение системы волн. Поэтому кинетическое уравнение для волн в этой задаче принципиально неприменимо. Сформулированы уравнения, в которых статистическая задача о взаимодействии параметрически возбужденных волн сведен к динамической задаче о взаимодействии пар. Они отличаются от линейных динамических уравнений для распадной неустойчивости лишь самосогласованной перенормировкой спектра волн и характера взаимодействия их с внешним полем. Качественная картина нелинейного поведения волн существенно зависит от частоты и амплитуды внешнего поля. Оценивается амплитуда параметрически возбужденных волн, их распределение в k -пространстве и поток энергии в плазму.

При параметрическом возбуждении высокочастотным электрическим полем ионнозвуковых и ленгмюровских колебаний в неизотермической плазме /1/ их амплитуда становится такой, что поведение системы в основном определяется взаимодействием волн между собой. Интерес к этой проблеме вызван не только важностью практических приложений /2/, но разнообразием возникающих физических явлений, чем и объясняются трудности, возникающие при её изучении.

Весьма нетривиальной является даже линейная теория параметрических неустойчивостей плазмы в однородном высокочастотном электрическом поле $E=E_0 \cos \omega_0 t$, подробно развитая в работах /1,3/. Однако, для не слишком больших амплитуд E_0, когда характерный инкремент меньше частоты ионного звука и дисперсии ленгмюровских волн, параметрические неустойчивости в неизотермической плазме имеют простой смысл распадных неустойчивостей поля $E(t)$ первого /4/

$$\omega_0 = \omega_k + \Omega_{-k} \tag{1}$$

и второго порядка /5/

$$2\omega_0 = \omega_k + \omega_{-k} \tag{2}$$

где Ω_k и ω_k - законы дисперсии ионнозвуковых и ленгмюровских колебаний соответственно.

В нашей работе изучаются различные нелинейные явления, возникающие при развитии этих неустойчивостей. Задача существенно упрощается тем, что возбуждающиеся волны можно описывать гидродинамическими уравнениями (4), (5). В §1 эти уравнения записываются в канонических переменных a_k и b_k (6) - комплексных амплитудах бегущих ленгмюровских и ионнозвуковых волн /6/. Структура канонических уравнений (10) не зависит от природы взаимодействующих волн; вся конкретная информация о системе (плазме) содержится в законах дисперсии волн и виде матричных элементов. В канонической формулировке наша задача становится близкой к подробно изученной задаче о поведении спиновых волн при их параметрическом возбуждении высокочастотных однородным магнитным полем в ферромагнетиках /7/.

В §2 кратко сформулированы результаты исследования линейной стадии параметрических неустойчивостей (1), (2) в рамках канонических уравнений (10). Особое внимание уделяется фазовым соотношениям между возбужденными волнами, которые играют важную роль на нелинейной стадии процесса. В дальнейшем основное внимание уделяется нелинейной стадии распадной неустойчивости первого порядка (1), имеющий наибольший инкремент и минимальный порог.

При не слишком больших превышениях над порогом основным нелинейным механизмом, определяющим поведение параметрически возбужденных волн, является их динамическое четырехволновое взаимодействие, идущее через промежуточные вынужденные биения. Уравнения для биений легко интегрируются, исключая их, мы приходим в § 3 к каноническим уравнениям (7) с четырехволновым гамильтонианом взаимодействия (14), включающим только параметрически возбужденные волны a_k, b_k. В §3 делается основное приближение задачи: считая фазы индивидуальных волн случайными, мы переходим к статистическому описанию на языке корреляционных функций пар

$$n_s(k)=\langle b_k b_k^* \rangle \quad n_L(k)=\langle a_k a_k^* \rangle \quad \sigma_k=\langle a_k b_{-k} e^{i\omega_0 t} \rangle \tag{3}$$

Такое приближение соответствует упрощению гамильтониана взаимодействия (14) до вида, диагонального по парам волн и по-существу является приближением самосогласованного поля; при этом статистическая задача о взаимодействии параметрически возбужденных волн сводится к самосогласованной динамической задаче о взаимодействии пар. В конце параграфа 3 показано, что образующаяся в результате процесса (1) фазовая корреляция фаз волн a_k, b_{-k} в этом приближении полностью сохраняется и на нелинейной стадии процесса, то-есть $|\sigma_k|^2 = n_L(k)\, n_S(k)$.
В работах [8-10] причиной, ограничивающей рост амплитуды шумов при параметрической неустойчивости, считалось взаимодействие волн с частицами, приводящее к увеличению диссипации энергии в плазме. В нашей работе показано, что фазовая корреляция приводит к увеличению характерных инкрементов четырехволновых процессов до величины, пропорциональной (W/nT). В результате существенно уменьшается поток энергии от накачки в систему параметрически возбужденных волн и это часто является основной причиной установления стационара. В параграфе 4 исследуются стационарные

решения уравнений 17 для и , изучается их устойчивость. Показано, что как и в /11/, устойчивые распределения расположены на поверхности в -пространстве. Эта поверхность описывается формулой (1), где в законах дисперсии волн учтены соответствующие нелинейные поправки. Характеристики системы, в частности, распределение волн на этой поверхности существенно зависят от волновых векторов возбуждающихся волн. Мы ограничимся рассмотрением случая $k r_D < \frac{2}{9} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$, когда параметрически возбужденные волны не могут слиться в собственную ленгмюровскую волну. При этом вплоть до больших превышений (28) распределение волн сингулярно: $N_k \neq 0$ только на "полюсе" $k \parallel E_0$, где связь волн с внешним полем максимальна. Для этого случая в §4 определены стационарные амплитуды и фазы пар-формулы (25) и (24).

В §5 выясняется, что в рамках неусредненных уравнений это монохроматическое распределение оказывается промодулированным в основном в поперечном направлении с характерным размером $\varkappa_\perp << k_0$ (см.(32)). Картина модуляции является динамической и полностью меняется за время порядка обратного инкремента распадной неустойчивости (1). В процессе турбулентного движения амплитуда модуляций может оказаться достаточно большой для того, чтобы самовоздействие волн оказалось сильнее, чем дифракционная расходимость и эти области коллапсируют аналогично мощным пучком света в диэлектрике /12/.

В заключение рассмотрена устойчивость описанных в работе физических явлений относительно индуцированного рассеяния на частицах - главного нелинейного механизма, возникающего при выходе за рамки гидродинамического описания.

§ 1. Основные уравнения

Рассмотрим однородную неизотермическую плазму ($T_e \gg T_i$), помещенную в однородное переменное электрическое поле $E = E_0 \cos \omega_0 t$ с частотой ω_0, близкой к плазменной частоте ω_p. Возникающее однородное периодическое движение электронов и ионов в поле $E(t)$ оказывается неустойчивым относительно возбуждения длинноволновых ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний ($k r_D \ll 1$) /3/. Предполагая, что в ионно-звуковых колебаниях плазма квазинейтральна, имеем для плотности ионов

$$n_i = n + \delta n \qquad \delta n \ll n$$

и электронов

$$n_e = n + \delta n + \delta n_e \qquad \delta n_e \ll n$$

где δn_e -изменение плотности электронов, обусловленная ленгмюровскими колебаниями. Для них воспользуемся линеаризованной системой гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{V}_e + \operatorname{div} \delta n \vec{V}_e = -\operatorname{div} \delta n \vec{V}_{oe}$$

$$\frac{\partial \vec{V}_e}{\partial t} + \frac{e}{m} \nabla \varphi_e + \frac{3T_e}{mn} \nabla \delta n_e = 0 \tag{4}$$

$$\Delta \varphi_e = -4\pi e \delta n_e$$

Здесь скорость электронов $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{\tilde{V}} + \vec{V}_{oe}$, где V_e их скорость в ленгмюровских колебаниях. $\tilde{V}$ -соответствует медленному движению электронов V_{oe} -есть скорость осцилляций электронов в однородном электрическом поле $V_{oe} = \frac{eE_0}{m\omega_0}$.

Движение ионов под действием высокочастотного давления описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n + n_0 \operatorname{div} \vec{\sigma} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + c_s^2 \frac{\nabla \delta n}{n} = \frac{1}{8\pi \rho_0} \nabla \left[\overline{(\nabla \varphi_e)^2 + 2(\vec{E} \nabla \varphi_e)} \right]$$

где υ -скорость ионов, $C_S=\sqrt{\frac{T_e}{M}}$ -скорость ионного звука.

Следуя работе /6/ в уравнениях (4), (5) перейдем к каноническим переменным:

$$\delta n_e = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int k\sqrt{\frac{n}{2m\omega_p}}\left(a_k + a_{-k}^*\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,d\vec{k}$$

$$\vec{V}_e = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{\vec{k}}{k}\sqrt{\frac{\omega_p}{2mn}}\left(a_k - a_{-k}^*\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,d\vec{k}$$

$$\delta n = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \sqrt{\frac{nk}{2MC_s}}\left(b_k + b_{-k}^*\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,d\vec{k} \tag{6}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \vec{k}\sqrt{\frac{2Mnk}{C_s}}\left(b_k - b_{-k}^*\right)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,d\vec{k}$$

в которых они принимают вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta a_k^*} \qquad \frac{\partial b_k}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta b_k^*} \tag{7}$$

где функция Гамильтона H:

$$H = \int\left(\omega_k a_k a_k^* + \Omega_k b_k b_k^*\right)d\vec{k} + H_p + H_{int}^{(3)}$$

$$\omega_k = \omega_p\left(1 + \frac{3}{2}k^2 r_D^2\right), \quad \Omega_k = c_s k$$

Закон дисперсии ленгмюровских и ионнозвуковых волн, a_k и b_k -

нормальные амплитуды этих волн.

Гамильтониан взаимодействия $H_{int}^{(3)}$ волн a_k, b_k между собой

$$H_{int}^{(3)} = \int \left[V_{123} b_1 a_2 a_3^* + \text{к.с} \right] \delta(\vec{k}_3 - \vec{k}_2 - \vec{k}_1) d\vec{k} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \quad (8)$$

где

$$V_{123} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\omega_p}{2\sqrt{2Mnc_s}} \sqrt{k_1} \frac{(\vec{k}_2 \vec{k}_3)}{k_2 k_3}$$

а гамильтониан взаимодействия волн с внешним полем ("накачкой")

$$H_p = \int \left[e^{-i\omega_0 t} V_k a_k^* (b_k + b_{-k}^*) + \text{к.с} \right] d\vec{k} \quad (9)$$

где

$$V_k = \frac{(\vec{k}\vec{V}_0)}{4} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} (k r_D)^{-1/2} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} (k r_D)^{1/2} \left(\frac{W_{ex}}{nT}\right)^{1/2} \frac{(\vec{k}\vec{E})}{kE}$$

$$\vec{V}_0 = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega_0} \qquad V_{-k} = -V_k$$

В уравнениях (4) и (5) отброшены члены, описывающие собственно электронные и ионные нелинейности. Эти члены приводят в гамильтониане взаимодействия к добавкам, несущественным по одному из параметров

$$\frac{m}{M} \ll 1, \quad (k r_D)^2 \ll 1, \quad k r_D \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1$$

С учетом затухания уравнения (7) приобретают вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + (i\omega_k + \gamma_k) a_k + i V_k (b_k + b_{-k}^*) e^{-i\omega_0 t} = \quad (10)$$
$$-i \int \left[V_{k'k''k} b_{k'} + V_{-k'k''k} b_{-k'}^* \right] a_{k''} \delta(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'') d\vec{k}'' d\vec{k}'$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + (i\Omega_k + \Gamma_k) b_k + V_k \left[e^{i\omega_0 t} a_k - e^{-i\omega_0 t} a^*_{-k} \right] =$$

$$= -i \int V_{kk'k''} a_{k'} a^*_{k''} \delta(\vec{k}' - \vec{k} - \vec{k}'') d\vec{k}' d\vec{k}''$$

где γ_k –затухание ленгмюровских волн, а $\Gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m}{M}} \Omega_k$ – затухание ионного звука.

§ 2. Параметрическая неустойчивость

Линейная стадия параметрической неустойчивости плазмы в однородном поле подробно исследованы в ряде работ /1.3/. Здесь мы кратко сформулируем соответствующие результаты в гидродинамическом приближении, то-есть в рамках уравнений (10).

Нулевое решение уравнения (10) может оказаться неустойчивым относительно нарастания волн:

$$a_k \sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \qquad a^*_{-k} \sim e^{-i(\omega - \omega_0)t}$$

$$b_k, b^*_{-k} \sim e^{-i\omega t}$$

Для комплексной частоты ω получается дисперсионное уравнение

$$\left[(\omega_k - \omega_0)^2 - (\omega + i\gamma)^2 \right] \left[\Omega_k^2 - (\omega + i\Gamma)^2 \right] = 4 \Omega_k V_k^2 (\omega_k - \omega_0) \tag{11}$$

Для не слишком длинных волн минимальным порогом $V_c = \sqrt{\gamma \Gamma}$ обладает распадная неустойчивость первого порядка /4/. Её инкремент максимален на сфере

$$\omega_0 = \omega_k + \Omega_{-k}$$

и равен

$$\nu_{max} = \frac{1}{2}\left[-(\gamma+\Gamma)+\sqrt{(\gamma-\Gamma)^2-4V^2}\right]$$

С этим инкрементом нарастают две пары волн $a_k\, b_{-k}$ и $a_{-k}\, b_k$, между амплитудами и фазами волн в каждой паре выполняются соотношения

$$i(\nu_{max}+\gamma_k)a_k = V_k b_{-k}^*$$

$$i(\nu_{max}+\gamma_k)a_{-k} = -V_k b_k^*$$

В другой области k пространства, вблизи сферы (2) существует распадная неустойчивость второго порядка. Вблизи (2) уравнение (11) преобразуется к виду

$$(\omega+i\gamma)^2 = (\omega_k-\omega_0)\left[\omega_k-\omega_0+\frac{4V_k^2}{\Omega_k}\right]$$

максимальный инкремент достигается при

$$\omega_k-\omega_0 = \frac{2V_k^2}{\Omega} \tag{12}$$

и равен

$$\nu_{max} = \frac{2V^2}{\Omega} - \gamma$$

С этим инкрементом нарастает пара ленгмюровских волн для которой $i a_k = a_{-k}^*$.

При достаточно больших амплитудах поля, когда $V \geq \Omega_k$ расстояние по частотам между поверхностями (2) и (1) становятся меньше характерной нелинейности задачи и возникают комбинированные" неустойчивости с нетривиальной зависимостью инкремента от амплитуды внешнего поля. В дальнейшем мы будем считать, что $V_k < \Omega_k$, т.е.

$$\frac{W_{ex}}{nT} < 8\, k r_D \sqrt{\frac{m}{M}} \tag{13}$$

Это означает, что неустойчивости (2) и (1) развиваются в разных областях k -пространства и их нелинейная стадия может быть рассмотрена независимо.

§ 3. Нелинейные уравнения для распадной неустойчивости

Неустойчивость внешнего поля относительно распада на ленгмюровскую волну и ионный звук характеризуется наибольшим инкрементом и естественно рассмотреть нелинейную стадию её развития в первую очередь. Подчеркнем, что на линейной стадии возникает фазовая корреляция между суммой фаз волн в паре и фазой накачки. Эта фазовая корреляция будет сохраняться и на нелинейной стадии при достаточно больших амплитудах волн [11]. Поэтому четырехволновое взаимодействие уже в первом порядке не исчезает в уравнениях движения при усреднении по фазам и будет играть важную, а в ряде случаев определяющую роль. В гамильтониане взаимодействия (8) четырехволновые процессы отсутствуют, однако они возникнут во втором порядке теории возмущения по $H_{int}^{(3)}$. Действительно, в результате развития неустойчивости нарастают пары ионнозвуковых и ленгмюровских волн с волновыми векторами k вблизи (1). В соответствии с $H_{int}^{(3)}$ они служат вынуждающей силой для ионнозвуковых и ленгмюровских биений с $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ и частотами $\omega(k_1) - \omega(k_2)$ и $\omega(k_1) \pm \Omega(k_2)$ соответственно. Эти биения в свою очередь могут порождать новые пары волн с другими k_1' и k_2' ($k_1' + k_2' = k$).

Уравнения движения для биений можно считать линейными по амплитуде биений, см. /13/, они легко интегрируются и после их исключения мы вновь приходим к "каноническим" уравнениям (7) с новым гамильтонианом взаимодействия

$$H_{int}^{(4)} = \frac{1}{2}\int \tilde{T}_{1234}\, a_1^* a_2^* a_3 a_4\, \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\, d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4$$

$$+\int T_{1234}\, a_1^* b_2^* a_3 b_4\, \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\, d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\vec{k}_3 d\vec{k}_4 \qquad (14)$$

где $$\tilde{T}_{1234} \equiv \tilde{T}_{k_1k_2k_3k_4} = -\frac{4\Gamma^2}{c_s}\frac{(\vec{k}_1\vec{k}_4)(\vec{k}_2\vec{k}_3)}{k_1 k_2 k_3 k_4}$$

$$\Gamma^2 = \frac{\omega_p^2}{8(2\pi)^3\rho_0 c_s}$$

$$T_{1234} \equiv T_{k_1k_2k_3k_4} = \frac{V_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_1+\vec{k}_2}\, V_{\vec{k}_3,\vec{k}_4,\vec{k}_3+\vec{k}_4}}{\Omega(k_1)+\omega(k_2)-\omega(\vec{k}_2+\vec{k}_1)+i\gamma(\vec{k}_1+\vec{k}_2)} \qquad (15)$$

$$+\frac{V_{\vec{k}_3,\vec{k}_2-\vec{k}_3,\vec{k}_2}\, V_{\vec{k}_1,\vec{k}_2-\vec{k}_3,\vec{k}_4}}{\omega(k_2)-\Omega(k_3)-\omega(\vec{k}_2-\vec{k}_3)+i\gamma(\vec{k}_2-\vec{k}_3)}$$

Затухание в знаменателе T_{1234} следует учитывать лишь при $k r_D > \frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{M}}$, когда могут выполняться распадные условия

$$\omega(k_1) \pm \Omega(k_2) = \omega(k) \qquad (16)$$

В гамильтониане при этом возникает антиэрмитовая часть, описывающая нелинейное затухание волн. Физической причиной этого является линейное затухание собственных ленгмюровских колебаний плазмы, образующихся в результате слияния параметрически возбужденных волн (16).

В случае, когда при развитии параметрической неустойчивости возбуждается достаточно широкий пакет волн и, следовательно, индивидуальные фазы волн случайны (при сохранении корреляции суммы фаз в паре!) можно перейти от динамических уравнений для волн к статистическому описанию в терминах корреляционных функций пар:

$$n_L(k) = \langle a_k a_k^* \rangle \qquad n_S(k) = \langle b_k b_k^* \rangle$$

$$\sigma_k = \langle a_k b_{-k} e^{i\omega_0 t} \rangle$$

Критерий применимости такого описания обсуждались в работе /14/, в § 5 мы рассмотрим, в каком смысле сохраняются результаты статистического описания для узких пакетов.

Расщепляя четверные корреляции через парные по правилу:

$$\langle a_1^* a_2^* a_3 a_4 \rangle = n_L(k_1) n_L(k_2) \left[\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\delta(\vec{k}_2-\vec{k}_4) + \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_4)\delta(\vec{k}_2-\vec{k}_3) \right]$$

$$\langle a_1^* b_2^* a_3 b_4 \rangle = \sigma_{k_1}^* \sigma_{k_3} \delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\delta(\vec{k}_3+\vec{k}_4) + n_L(k_1) n_S(k_2) \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\delta(\vec{k}_2-\vec{k}_4)$$

$$\langle a_1^* b_2 a_3 a_4 \rangle = n_L(k_1)\sigma(k_2) \left[\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\delta(\vec{k}_2+\vec{k}_4) + \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_4)\delta(\vec{k}_2+\vec{k}_3) \right]$$

приходим к системе уравнений

$$\frac{1}{2}\frac{dn_L(k)}{dt} + (\gamma_k + \bar{\gamma}_k) n_L(k) + \operatorname{Im} P_k^* \sigma_k = 0 \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dn_s(k)}{dt} + (\Gamma_k + \bar{\Gamma}_k)\, n_s(k) + \operatorname{Im} P_k^* \sigma_k = 0$$

$$\left[\frac{d}{dt} + (\gamma_k + \Gamma_k + \bar{\gamma}_k + \bar{\Gamma}_k) + i(\tilde{\omega}_k + \tilde{\Omega}_k - \omega_0)\right]\sigma_k =$$

$$= -iP_k\,(n_L(k) + n_s(k))$$

Здесь P_k -самосогласованная накачка

$$P_k = V_k + \int S_{kk'}\sigma_{k'}\, d\vec{k}'$$

$\tilde{\omega}_k$ и $\tilde{\Omega}_k$ -перенормированная за счет взаимодействия частота

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\int \tilde{T}_{kk'}\, n_L(k')\, d\vec{k}' + \operatorname{Re}\int T_{kk'}\, n_s(k')\, d\vec{k}'$$

$$\tilde{\Omega}_k = \Omega_k + \operatorname{Re}\int T_{kk'}\, n_L(k')\, dk'$$

$\bar{\gamma}_k$ и $\bar{\Gamma}_k$ -описывают нелинейное затухание

$$\bar{\gamma}_k = -\operatorname{Im}\int T_{kk'}\, n_s(k')\, d\vec{k}' \quad \bar{\Gamma}_k = -\operatorname{Im}\int T_{kk'}\, n_L(k')\, d\vec{k}'$$

Отметим, что такая процедура расщепления корреляций эквивалентна редуцированию точного гамильтониана $H_{int}^{(4)}$ до вида, диагонального по парам волн

$$\tilde{H}_{int} = \int \Big\{ \big[T_{kk'} a_k a_k^* b_{k'}^* b_{k'} + S_{kk'} a_k^* b_{-k}^* a_{k'} b_{-k'} \big] + \tilde{T}_{kk'} a_k^* a_k a_{k'}^* a_{k'} \Big\}\, dk\, dk' \tag{18}$$

Здесь

$$T_{kk'} \equiv T_{kk'kk'} = -\frac{\Gamma^2}{2C_s}\left\{\frac{1+\cos\alpha}{1-\beta(1-2\cos\alpha)+\frac{i\gamma_+}{\Omega}} + \frac{1-\cos\alpha}{1+\beta(1-2\cos\alpha)-\frac{i\gamma_-}{\Omega}}\right\}$$

$$S_{kk'} \equiv T_{k,-k,k',-k'} = -\frac{\Gamma^2}{2C_s}\frac{1+\cos\alpha}{1+\beta(1+2\cos\alpha)-i\frac{\gamma_+}{\Omega}}$$

$$\tilde{T}_{kk'} \equiv \tilde{T}_{kk'kk'} = -\frac{2\Gamma^2}{C_s} \tag{19}$$

$$\gamma_{\pm} = \gamma(\vec{k}\pm\vec{k}') \qquad \beta = \frac{3}{2}\frac{k r_D}{\sqrt{\frac{m}{M}}}$$

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{k}\vec{k}')}{kk'} \qquad |k| = |k'|$$

Отметим, что при вычислении $S_{kk'}$ мы отбросили члены, связанные с ленгмюровским биением с $k=0$, $\omega=\omega_0$. Они описывают обратное влияние возбужденных волн на поле накачки. Для того, чтобы учесть его, необходимо выписать дополнительное уравнение, связывающее внешнее поле с полем внутри плазмы. Мы этого делать не будем, считая, что $E(t)$, определяющее V_{oe} в соответствии с (9) является амплитудой внутреннего поля в плазме.

Отметим, что из уравнений (17) следует

$$\left[\frac{d}{2dt} + (\gamma_k + \bar{\gamma}_k + \Gamma_k + \bar{\Gamma}_k)\right]\left(|\sigma_k|^2 - n_L(k)n_s(k)\right) = 0 \tag{20}$$

Это означает, что $|\sigma_k|$ релаксирует к $\sqrt{n_L n_S}$ за время порядка $\frac{1}{\gamma+\Gamma}$. Это позволяет в дальнейшем ограничится рассмотрением класса решений с $|\sigma_k|^2 = n_L(k)\, n_S(k)$, то-есть таких решений, в которых установилась жесткая фазовая корреляция между волнами в паре.

§ 4. Стационарные состояния и их устойчивость в рамках диагонального гамильтониана

1. Стационарные состояния системы волн, описываемой уравнениями (17) сосредоточены в k пространстве в узком слое вблизи поверхности (1). Это позволяет заменить все коэффициенты в (17) кроме $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\Omega}$ их значениями на этой поверхности. Уравнения (17) в стационарном случае является системой линейных уравнений с коэффициентами $(\gamma+\bar{\gamma})$, $\Gamma+\bar{\Gamma}$, P_k и $\tilde{\omega}_k+\tilde{\Omega}_k$. при каждом направлении $\vec{k}$ они имеют ненулевое решение лишь при одной (или двух) значениях ($\tilde{\omega}_k+\tilde{\Omega}_k$):

$$(\tilde{\omega}_k+\tilde{\Omega}_k-\omega_0)^2 = (\gamma_k+\Gamma_k+\bar{\gamma}_k+\bar{\Gamma}_k)^2\left[\frac{|P_k|^2}{(\gamma_k+\bar{\gamma}_k)(\Gamma_k+\bar{\Gamma}_k)}-1\right] \qquad (21)$$

Таким образом, задавая произвольно амплитуды волн n_k в каждом направлении k, можно из (17) определить фазы пар φ_k, а из (21) определить вид поверхности, на которой $n_k \neq 0$. Этот произвол в определении стационарных решений (17) устраняются требованием их устойчивости.

2. Условие внешней устойчивости, то-есть устойчивости по отношению к рождению новых пар однозначно определяет поверхность (21). Действительно, используя уравнения (7) с затуханием γ_k, Γ_k и диагональным гамильтонианом (18) для пары волн возмущения a_q, b_{-q}, получим для инкремента ν_q

$$a_q \sim e^{(\nu_q - i\omega_1)t} \qquad b_{-q} \sim e^{(\nu_q - i\omega_2)t}$$

уравнение

$$\left[\nu_q+\gamma_k+\bar{\gamma}_k+i(\tilde{\omega}_q-\omega_1)\right]\left[\nu_q+\Gamma_k+\bar{\Gamma}_k-i(\Omega_q-\omega_2)\right]=|P_k|^2 \tag{22}$$

в котором волновой вектор стационара $\vec{k}\parallel\vec{q}$. Максимальный по q (при $k\parallel q$) инкремент $\nu_k=\max\nu_q$ соответствует $\tilde{\omega}_q-\omega_1=\tilde{\Omega}_q-\omega_2=0$, $\omega_1+\omega_2=\omega_0$, то-есть лежит на поверхности $\tilde{\omega}_q+\tilde{\Omega}_q=\omega_0$, расположенной по середине между поверхностями (21) и определяется из уравнения

$$\nu_k^2+\nu_k\left(\gamma_k+\gamma_k+\bar{\gamma}_k+\bar{\Gamma}_k\right)+(\gamma_k+\bar{\gamma}_k)(\Gamma_k+\bar{\Gamma}_k)-|P_k|^2=0$$

Следовательно, условие внешней устойчивости имеет вид

$$|P_k|^2\leq(\gamma_k+\bar{\gamma}_k)(\Gamma_k+\bar{\Gamma}_k) \tag{23}$$

Для тех направлений k, где $n_k\neq 0$ в (23) стоит знак равенства и это условие эквивалентно тому, что поверхности (21) сливаются в одну:

$$\tilde{\omega}_k+\tilde{\Omega}_k=\omega_0 \tag{24}$$

3. Порог рождения второй группы пар. Распределение пар по поверхности (23) также определяется условием внешней устойчивости (23) по отношению к рождению новых пар на этой же поверхности. Покажем, что при не слишком больших превышениях над порогом возбуждены только две пары

Из (17), (20) и (24) получим

$$n_L(k_0)=n_L(-k_0)=\sqrt{\frac{\Gamma}{\gamma}}\,\frac{\sqrt{V_{k_0}^2-\gamma\Gamma}}{|S|} \tag{25}$$

$$n_S(k_0)=n_S(-k_0)=\sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma}}\,\frac{\sqrt{V^2-\gamma\Gamma}}{|S|}$$

$$\varphi_{k_0}=\varphi_{-k_0}+\pi\,,\quad V_{k_0}\sin\varphi_{-k_0}=\sqrt{\gamma\Gamma}\qquad S=S_{k_0k_0}$$

предположив, что возбуждены только две пары $\pm k_0$. Используя (25) вычислим $|P_k|^2$ по (17) и приравнивая его к $\gamma_k\Gamma_k$ найдем амплитуды u_L, u_S (или превышение V_{k_0}), соответствующее по (23) порогу рождения второй группы пар с некоторым углом между k и k_0:

$$\frac{V_{k_0}^2}{\gamma\Gamma}=1+S'^2\frac{(V_{k_0}^2-V_k^2)}{\left[SV_k-S'_{k_0k}V_{k_0}\right]^2}\qquad S'_{kk'}=\frac{S'_{kk'}-S_{k,-k'}}{2}\quad(26)$$

При этом мы предполагали, что

$$\beta=\frac{3}{2}\frac{kr_0}{\sqrt{\frac{m}{M}}}<\frac{1}{3}$$

так, что распадные процессы (16) запрещены и нелинейное затухание γ, Γ отсутствует. Ниже мы будем расматривать именно этот случай, при $\beta>$ 1/3 поведение параметрически возбужденных волн будет существенно иным.

Подставляя в (26) $S_{kk'}$ из (19) получим

$$\frac{V_{k_0}^2}{\gamma\Gamma}=1+\frac{1}{4\beta^4}\,\frac{\left[(1+\beta)^2-4\beta^2x\right]}{4x(1-x)}\qquad x=\cos^2\alpha$$

При $\beta<\frac{1}{3}$ минимум этого выражения находится вблизи x =1/2, что соответствует рождению пар с $\alpha\simeq 45^0$, а порог рождения

$$\frac{V_{k_0}}{\sqrt{\Gamma\gamma}}\simeq\frac{1+2\beta-\beta^2}{2\beta^2}\gtrsim 7$$

Однако, при таких превышениях уже нарушается условие слабой нелинейности

$$S' N_L(K_o) < \frac{3}{2}\omega_p (K r_D)^2 \quad ,\text{или} \quad \frac{W}{nT} < (K r_D)^2 \tag{27}$$

Действительно, записывая

$$\frac{V_{K_o}}{\sqrt{\gamma\Gamma'}} \simeq \frac{S'\sqrt{N_L N_S'}}{\sqrt{\Gamma\gamma}} = \frac{S' N_L}{\Gamma} = \frac{S' N_L}{\frac{3}{2}\omega_p (K r_D)^2}\frac{\Omega}{\Gamma}\beta$$

получаем из (27)

$$\frac{V}{V_c} < \frac{\Omega\beta}{\Gamma} < 10 \tag{28}$$

4. Условие внутренней устойчивости, то-есть устойчивости по отношению вариации амплитуд и фаз возбужденных волн можно получить, линеаризуя уравнения (17) на фоне решения (25):

$$S'\left[(S \pm T)(\Gamma + \gamma) + \Gamma\tilde{T}(1 \pm 2)\right] > 0 \tag{29}$$

Здесь $T = T_{K_o K_o}$, $\tilde{T} = \tilde{T}_{K_o K_o} = \tilde{T}_{K_o, -K_o}$

Подставляя $S, T, \tilde{T}$ из (19) легко убедиться, что стационарное состояние (24) практически всегда обладает внутренней устойчивостью.

§ 5. Сильная турбулентность пар ленгмюровских и ионно-звуковых волн

Выше было показано, что единственным устойчивым стационарным состоянием системы в рамках диагонального гамильтониана (18) является такое, в котором возбуждены две пары волн (25). Однако для применимости приближения диагонального гамильтониана необходима случайность фаз, то-есть достаточно широкие в K - пространстве пакеты волн. Решение же (25) представляет совокупность четырех монохроматических волн. Поэтому необходимо выяснить, какой смысл следует придавать результатам предыдущего параграфа.

Отметим, что состояние (25) является также решением уравнений (7) с точным гамильтонианом (13), однако, условия устойчивости (23) и (29), полученные выше являются лишь необходимыми, но не достаточными в рамках точного гамильтониана.

Исследуем устойчивость (25) относительно возмущений более общего вида

$$a_k = \alpha_1 \delta(\vec{k}-\vec{k}_0+\vec{\varkappa}) + \alpha_2 \delta(\vec{k}-\vec{k}_0-\vec{\varkappa}) + \alpha_3 \delta(\vec{k}+\vec{k}_0+\vec{\varkappa}) + \alpha_4 \delta(\vec{k}+\vec{k}_0-\vec{\varkappa})$$

$$b_k = \beta_1 \delta(\vec{k}-\vec{k}_0+\vec{\varkappa}) + \beta_2 \delta(\vec{k}-\vec{k}_0-\vec{\varkappa}) + \beta_3 \delta(\vec{k}+\vec{k}_0+\vec{\varkappa}) + \beta_4 \delta(\vec{k}+\vec{k}_0-\vec{\varkappa}) \qquad (30)$$

где комплексные величины $\alpha_i\ \beta_i \sim e^{\partial t}$. Для достаточно больших $\varkappa > \varkappa_0$ (однако $\varkappa_0 \ll k_0$), инкремент удовлетворяет уравнению (22) и условие внешней устойчивости (23) обеспечивает таким образом ограниченность в k пространстве области положительного инкремента. Поэтому можно упростить задачу, заменяя коэффициенты гамильтониана взаимодействия их предельным по $\varkappa \to 0$ значением и ограничиваясь в разложении в ряд по $\varkappa$ частоты ω_k и Ω_k членами $\sim \varkappa^2$:

$$\omega_{k_0+\varkappa} = \omega_{k_0} + \left(\vec{\varkappa}\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\right) + \frac{1}{2}\omega''\varkappa^2$$

$$\Omega_{k_0+\varkappa} = \Omega_{k_0} + (\vec{\varkappa}\vec{C}_s) + L_s\varkappa^2$$

$$\vec{C}_s \parallel \vec{K}_0 \qquad L_s \varkappa^2 = \frac{1}{2}\,\Omega_{K_0}\frac{\varkappa_\perp^2}{K_0^2}$$

Дисперсионное уравнение для инкремента получается приравниванием нулю определителя восьмого порядка. Для упрощения этой громоздкой задачи рассмотрены случай, когда одно из затуханий γ много больше другого. Пренебрегая инкрементом неустойчивости по сравнению с γ получим дисперсионное уравнение

$$\left[\nu^2+(\vec{\varkappa}\vec{C}_s)^2+(L_s\varkappa^2)^2\right]^2+2\alpha\nu\left[\nu^2+(\vec{C}_s\vec{\varkappa})^2+(L_s\varkappa^2)^2\right]$$

$$-2\delta L_s\varkappa^2\left[\nu^2+(L_s\varkappa^2)^2-(\vec{C}_s\vec{\varkappa})^2\right]-4(\vec{C}_s\vec{\varkappa}\,L_s\varkappa^2)^2=0 \qquad (31)$$

$$\alpha=4\Gamma\left(\frac{S|b|}{V}\right)^2\le 4\Gamma \qquad \delta\equiv\alpha\frac{S|b|}{V_c}$$

При этом мы пренебрегли дисперсией ленгмюровских волн, налагая несущественное ограничение на $\varkappa$

$$\omega''\varkappa^2 \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma}}\,S|b| \qquad (32)$$

Из (31) следует, что ν зависит от угла между $\vec{\varkappa}$ и K_0 гораздо сильнее чем от $|\varkappa|$. Поэтому $\nu_\varkappa>0$ только в узком слое вблизи сферы. При $L\varkappa^2\le\delta$ максимальный по углу инкремент достигается на плоскости $(\vec{C}_s\vec{\varkappa})=0$ и определяется из уравнения

$$\nu^2+2\alpha\nu+L\varkappa^2(L\varkappa^2-2\delta)=0$$

Максимальный инкремент достигается в точке $L\varkappa^2=\delta$ и при превышениях под порогом $\gtrsim 1$, $\nu_{max}\sim S n_L$. В этой области $\varkappa$ (точнее, при $L\varkappa^2<2\delta$) инкремент ν положителен в слое между поверхностями $L\varkappa^2=\pm(\vec{C}_s\vec{\varkappa})$.

Вблизи поверхности сферы (1) область положительного инкремента простирается значительно дальше границы применимости (32) уравнение (31) и ограничивается из-за уменьшения связи с накачкой $V_\varkappa$ при некотором $\varkappa_{max}\ll K_0$, так же, как и в симметричном случае /15/.

На линейной стадии развития неустойчивости шумы нарастают в широкой области K -пространства где $\nu > 0$. Однако, в конечном счете амплитуда шумов велика лишь в узкой области пространства

$$\left(\frac{\varkappa_\perp}{k_0}\right)^2 \leq \left(\frac{\tilde{\varkappa}_\perp}{k_0}\right)^2 \simeq \frac{\nu_{max}}{c_s k_0} \tag{33}$$

$$\frac{\varkappa_\parallel}{k_0} \leq \frac{\tilde{\varkappa}_\parallel}{k_0} \simeq \frac{\nu_{max}}{c_s k_0} \tag{33}$$

Действительно, для пакета ленгмюровских волн достаточно широких по сравнению с (32) характерная разность частот в пакете $\omega'' \tilde{\varkappa}_\perp^2$ велика по сравнению с обратным временем нелинейного взаимодействия $S N_L$ и, следовательно, индивидуальные фазы ленгмюровских волн стохастизируются. Поэтому временную эволюцию такого пакета можно изучать в рамках "диагональных" уравнений (17). В предыдущем параграфе мы показали, что эти уравнения имеют единственное устойчивое стационарное состояние (25) в виде 2х пар монохроматических волн. Поэтому произвольный пакет будет сужаться аналогично тому, как это происходит в симметричной ситуации /15/, вплоть до границы применимости "диагональных" уравнений (17). С другой стороны пакет не может быть много уже, чем $\tilde{\varkappa}_\perp$, потому, что такой пакет будет неустойчив относительно возмущений (30) с $\varkappa \sim \tilde{\varkappa}_\perp$ для которых он будет играть роль монохроматической волны. Условие (34) соответствует области ~~инкремента~~ положительности по $\varkappa_\parallel$ для $\varkappa_\perp \leq \tilde{\varkappa}_\perp$. Возникающая турбулентность характеризуется сильной фазовой корреляцией волн и, следовательно, турбулентность является сильной. Из-за того, что $\tilde{\varkappa}_\perp$, $\varkappa_\parallel \ll K_0$ это турбулентное состояние представляет две пары монохроматических волн, амплитуда и фаза которых медленно промодулирована в продольном и поперечном направлениях с характерным размером $\frac{1}{\varkappa_\parallel}$ и $\frac{1}{\varkappa_\perp}$ соответственно. Картина модуляции является динамической и существенно меняется за время порядка $\frac{1}{\nu}$. По порядку величины средний уровень амплитуды волн совпадает с величиной (25), следующий из диагональных уравнений (17). На фоне этой турбулентности разыгрывается интересное явление – коллапс квазимонохроматических волн. Действительно, в процессе турбулентного движения образуются области с продольным размером $\frac{1}{\varkappa_\parallel}$, перемешивающим поперечный размер $\frac{1}{\varkappa_\perp}$ в $\sqrt{\frac{S n_L}{\Omega}}$ раз и амплитудой в несколько раз большей, чем средний уровень. В этих областях можно пренебречь влиянием затухания и накачки и убедиться в том, что нелинейное взаимодействие к самофокусировке волн, превышает дифракционную расходимость /15/. В результате самофокусировки амплитуда в центре этой нити за конечное время $\sim \frac{1}{S n_L}$ возрастает во много раз, а энергиях волн в этой области пространства быстро диссипируется. Описанный здесь "сбросовый" механизм диссипации является дополнительной причиной не позволяющей среднему уровню турбулентности значительно превосходить (25). Для симметричной ситуации такая сильная турбулентность волн огибающих рассматривалась в работе /15/.

С увеличением амплитуды накачки размер модуляции $1/\varkappa_\parallel$, $\frac{1}{\varkappa_\perp}$ уменьшается и при нарушении условия (27), (28) приближается к длине волны $1/k_0$. При этом сильная турбулентность волн огибающих переходит в сильную турбулентность ленгмюровских волн, рассмотренную в работе /6/.

В заключение оценим энергию, поглощаемую плазмой при параметрическом возбуждении длинных ($\beta < 1/3$) см. (28)) волн. Дифференция по времени гамильтониан (8) взаимодействие с накачкой H_p получаем для энергии, поглощенной за единицу времени

$$Q = 2\omega_0 \, Im \int V_k a_k b_{-k} e^{i\omega_0 t} \, d\vec{k} \simeq 2\omega_0 V |\sigma| \sin\varphi$$

Подставим для оценки Q значения (2,5) σ и $\sin\varphi$ полученные из диагональных уравнений

$$Q = \omega_0 \sqrt{\gamma\Gamma} \, \frac{\sqrt{V^2 - \gamma\Gamma}}{S'} \simeq V_e n_0 T \left(\frac{W_{ex} - W_c}{n_0 T}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} (k r_D)^{1/2} \tag{35}$$

При больших превышениях над порогом определяющую роль играет поглощение энергии в областях коллапса, не учтенное выше.

Как показано в /12/ за время $\frac{1}{\nu}$ происходит слопывание в области с размером $\varkappa_\perp^{-1}$ и при этом в единице объема диссипируется энергия $\frac{\omega_0 \nu}{S \varkappa_\perp^2}$. Эта диссипация должна компенсироваться потоком энергии внешнего поля в систему и для Q имеем

$$Q \simeq \omega_0 \frac{\nu^2}{S} \simeq \omega_0 \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} (k r_d) \left(W_{ex} - W_c\right) \qquad (36)$$

В заключение оценим роль кинетических эффектов, главным из которых является индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на ионах.

Прежде всего отметим, что для параметрически возбужденных волн рассеяние на частицах не вносит вклада в нелинейное взаимодействие так как все они имеют одну и ту же частоту. Поэтому индуцированное рассеяние может лишь привести к потере устойчивости и возбуждению динамической слабой турбулентности. Когда инкремент индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах γ^{nl} превышает γ, возбуждается динамическая турбулентность и результаты § 5 вообще говоря, неприменимы. Используя выражение для γ^{nl}, приведенное в /16/, получим, что это происходит при превышениях

$$\frac{W_{ex} - W_c}{W_c} > \left(\frac{T_e}{T_i} \frac{\gamma}{\Gamma}\right)^2$$

Итак, нелинейное поведение неизотермической плазмы при параметрическом возбуждении в основном описывается гидродинамически. В изотермической плазме кинетические эффекты, по-видимому, играют большую роль.

Нам приятно поблагодарить В.Е.Захарова, по инициативе которого была выполнена эта работа, за многочисленные полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. В.П.Силин . A Survey of phenomena in ionized qases, IAEA Vienna, 1968, стр. 205-237.
2. В.П.Силин. УФН, 104, 677, 1971.
3. И.Е.Андреев, А.Н.Кирий, В.П.Силин. ЖЭТФ, 57, 1024, 1969.
4. В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев. ЖТФ, 32, 1291, 1962.
5. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 51, 1107, 1966.
6. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, в.5, 1972.
7. В.В.Зау[illegible]кин, В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.Л.Мушер, С.С.Старобинец. ЖЭТФ, 62,в.5, 1972.
8. В.В.Пустовалов, В.П.Силин. ЖЭТФ 59, 2215, 1969.
9. E Valeo, F Perkins C.Oberman Phys. Rev.Lett. 28, 340, 1972.
10. D.F. Dubois, M.V.Goldman. Phys. Fluids. 15, 919, 1972.
11. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ЖЭТФ, 59, 1290, 1970.
12. В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах. Письма в ЖЭТФ, 14.
13. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. ПМТФ, № 4, 1972.
14. В.Е.Захаров, В.С.Львов. ЖЭТФ, 60, 2066, 1971.
15. В.С.Львов, А.М.Рубенчик. Препринт ИЯФ 1-72.
16. В.И.Цытович. Теория турбулентной плазмы. Физматгиз,1971.

Ответственный за выпуск РУБЕНЧИК А.М.
Подписано к печати 28.07.1972. МН 10446.
Усл. 1, печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 57

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг