

16

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**И Я Ф 22 - 72**

**В.Е.Захаров**

**КОЛЛАПС ЛЭНГМЮРОВСКИХ ВОЛН**

**Новосибирск**

**1972**

В.Е.Захаров

## КОЛЛАПС ЛЭНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

### А Н Н О Т А Ц И Я

В работе показано, что произвольная лэнгмюровская турбулентность достаточно большой интенсивности ( $\frac{W}{nT} > (k\lambda_d)^2$ ) неустойчива. Неустойчивость приводит к развитию сильно нелинейных явлений - образованию в плазме областей пониженной плотности - "каверн", "схлопывающихся" за конечное время. Схлопывание (коллапс) каверн оказывается эффективным механизмом диссипации энергии длинноволновых лэнгмюровских колебаний, и играет важную роль в кинетике лэнгмюровской турбулентности. Рассмотрена также задача о нелинейной стадии развития неустойчивости монохроматической лэнгмюровской волны.

## Введение

Для кинетики ленгмюровской турбулентности характерна тенденция к "конденсации" волн в  $K$ -пространстве. Основные нелинейные процессы — индупированное рассеяние на электронах и ионах, распад ленгмюровских волн с образованием ионного звука, четырехплазменное рассеяние — не меняет числа ленгмюровских квантов и лишь уменьшают их волновые вектора. В результате энергия ленгмюровских колебаний сосредотачивается в длинноволновой части спектра, в которых линейное затухание (столкновительное и затухание Ландау) мало. Возникает вопрос о механизме диссипации этой энергии. В настоящей работе показано, что таким механизмом может служить своеобразная трехмерная самофокусировка ленгмюровских волн, приводящая к появлению локальных особенностей их амплитуды.

При этом в плазме возникают области пониженной плотности — каверны, служащие резонаторами для ленгмюровских волн. Каверны за конечное время "схлопываются" до размера, на котором происходит пересечение траекторий электронов и диссипация энергии колебаний.

Это явление — коллапс ленгмюровских волн — можно рассматривать как нелинейную стадию развития неустойчивости холодного ленгмюровского газа, открытой А.А.Веденовым и Л.И.Рудиковым<sup>1,2</sup> (см. также<sup>3</sup>).

В отличие от линейных механизмов диссипации коллапс ленгмюровских волн имеет порог по амплитуде, зависящей от формы спектрального распределения колебаний. Коллапс сопровождается развитием сильной турбулентности плазмы.

Для изучения сильно нелинейных процессов типа коллапса нельзя пользоваться приближением случайных фаз и кинетическими уравнениями для волн. С другой стороны, динамическое описание плазмы системой кинетических уравнений является слишком сложным.

В настоящей работе предлагается упрощенное динамическое описание плазмы, основанное на усреднении по "быстрому времени"

Соответствующие уравнения выведены в § 1. В § 2 в рамках этих уравнений решена задача о неустойчивости монохроматической ленгмюровской волны конечной амплитуды и найдены достаточные условия неустойчивости турбулентных спектров. Собственно коллапс-

развитие каверн и их схлопывание - изучается в § 3. В § 4 рассмотрена задача о нелинейной стадии развития неустойчивости монохроматической лэнгмюровской волны, в § 5 - кинетика четырехплазменных процессов в плазме в присутствии коллапса.

### § 1. Основные уравнения

Рассмотрим длинноволновые колебания плазмы ( $k\lambda_d \ll 1$ ). В плазме существует два типа движений - быстрые лэнгмюровские колебания с частотой  $\omega \approx \omega_p$  и медленные движения плазмы как целого. Будем предполагать, что в медленных движениях плазма квазинейтральна. Тогда можно положить для плотности ионов

$$n_i = n_0 + \delta n \quad \delta n/n_0 \ll 1$$

и для плотности электронов

$$n_e = n_0 + \delta n + \delta n_e \quad \delta n_e/n_0 \ll 1$$

Здесь  $\delta n_e$  - вариация плотности электронов в лэнгмюровских колебаниях. Для лэнгмюровских колебаний воспользуемся линеаризованной системой гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{v}_e + \operatorname{div} \delta n \vec{v}_e = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + \frac{e}{m} \nabla \varphi_e + \frac{3}{2} \frac{T_e}{m n_0} \nabla \delta n_e = 0$$

Здесь  $\varphi_e$  - высокочастотная часть электростатического потенциала.

Уравнения (1.1) не учитывают электронных нелинейностей, которые начинают играть роль, если характерное время нелинейного процесса  $1/\varepsilon \approx \omega_p (k\lambda_d)^2 \frac{W}{nT}$  (см. (3.6)). В дальнейшем предполагается, что рассматриваются только более быстрые процессы.

Введем медленно-меняющуюся величину  $\psi$  по формуле

$$\varphi_e = \frac{1}{2} (\psi e^{-i\omega_p t} + \psi^* e^{i\omega_p t})$$

Считая  $\delta n$  не зависящим от времени и пренебрегая второй производной от  $\psi$  по  $t$ , получим из (1.1)

$$\Delta (i\psi_t + \frac{3}{2} \omega_p \lambda_d^2 \Delta \psi) = \frac{\omega_p}{2n_0} \operatorname{div} \delta n \nabla \psi \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) описывает лэнгмюровские колебания после усреднения по "быстрому времени"  $1/\omega_p$ , но не предполагает усреднения по фазе или по длине волны. Это уравнение имеет интеграл движения:

$$I_1 = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla \psi|^2 dV \quad (1.3)$$

который с точностью до членов  $(k\lambda_d)^2$  равен энергии лэнгмюровских колебаний  $W$ . Точнее говоря,  $I_1 = 2W_0$ , где  $W_0$  - усредненная энергия электростатического поля. Величину  $N = I_1/\omega_p$  можно трактовать так же, как сохраняющееся число лэнгмюровских квантов.

Для замыкания уравнения (1.2) учтем действие лэнгмюровских колебаний на медленные движения плазмы, как действие высокочастотной силы с потенциалом (см., напр. (4.5'))  $U = \frac{e^2}{4m\omega_p^2} |\nabla \psi|^2$ . Далее заметим, что усредненная плотность электронов (а вместе с ней и плотность ионов) представляет собой бoльцмановское распределение в поле с эффективным потенциалом

$$U_{\text{эфф}} = -e\varphi + U$$

Здесь  $\varphi$  - низкочастотная компонента электростатического потенциала. Таким образом

$$\delta n = n_0 \left[ \exp \frac{e\varphi - U}{T_e} - 1 \right] \quad (1.4)$$

Ионы описываются кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{e}{m} \left( \nabla \varphi, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2) - (1.5) вместе с соотношением

$$\delta n = \int f dv - n_0 \quad (1.6)$$

составляют полную систему. Рассмотрим два способа упрощения полученной системы уравнений. Пусть выполняются неравенства

$$\frac{W}{nT} \ll \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M} \quad \text{и} \quad (k\lambda_d)^2 \ll \frac{m}{M} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\tau} \sim \omega_p (k\lambda_d)^2 \ll kV_{Ti}$$

и характерные скорости медленных движений малы по сравнению с тепловой скоростью ионов. При этом можно считать, что ионы распределены по Больцману в низкочастотном электростатическом поле, так

что  $\delta n = n_0 (e^{-\frac{e\psi}{T_i}} - 1)$ . Сравнивая с (1.4) найдем

$$\delta n = n_0 \left( e^{-\frac{u}{T_i + T_e}} - 1 \right) \approx \frac{n_0 u}{T_i + T_e} \quad (1.7)$$

После подстановки в (1.2) получим уравнение

$$\Delta \left( i\psi_t + \frac{3}{2} \omega_p \lambda_d^2 \Delta \psi \right) + \frac{e^2 q}{4m\omega_p T_e} \operatorname{div} |\nabla \psi|^2 \nabla \psi = 0 \quad (1.8)$$

$$q = \frac{T_e}{T_i + T_e}$$

Рассмотренное приближение можно назвать статическим.

Другой способ упрощения исходной системы состоит в переходе к гидродинамическому описанию ионов. Условие применимости гидродинамики  $\frac{1}{\tau} \gg kV_{Ti}$  противоположно условию применимости статического приближения. Линеаризованное гидродинамическое описание осуществляется волновым уравнением

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \right) \delta n = \frac{1}{16\pi M} \Delta |\nabla \psi|^2 \quad (1.9)$$

$$c_s^2 = \frac{T_e + \frac{3}{2} T_i}{M}$$

замыкающим в этом случае уравнение (1.2).

В длинноволновых ( $(k\lambda_d)^2 \ll \frac{m}{M}$ ) движениях плазмы

условие применимости гидродинамического описания дает

$$\frac{W}{nT} \gg \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}$$

Если  $T_i \ll T_e$ , то для амплитуды

$$\frac{m}{M} \frac{T_i}{T_e} \ll \frac{W}{nT} \ll \frac{m}{M}$$

в уравнении (1.9) можно пренебречь членом  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n$ . При этом мы снова приходим к уравнению (1.8), но теперь

$$q = \frac{T_e}{T_e + \frac{3}{2} T_i} \approx 1$$

## § 2. Неустойчивость монохроматической лэнгмюровской волны

Об устойчивости узких в К-пространстве лэнгмюровских спектров можно в простейших случаях судить по устойчивости монохроматической лэнгмюровской волны с соответствующим К. В частности, об устойчивости интенсивного изотропного спектра можно судить по устойчивости волны с  $K=0$

Стационарной монохроматической волне соответствует решение основной системы уравнений, имеющее вид

$$\psi = \frac{A}{k_0} e^{-i\omega_k t + i(\vec{k}_0 \vec{r})} \quad \delta n = 0$$

$$\omega_k = \frac{3}{2} \omega_p k^2 \lambda_d^2$$

Линеаризуем основную систему на фоне этого решения и положим

$$\delta f \sim e^{i\Omega t + i\vec{x}\vec{r}}; \quad \delta \psi \sim e^{i\omega_k t + i\Omega t + i\vec{x}\vec{r}}$$

$$\delta \psi^* \sim e^{-i\omega_k t + i\Omega t + i\vec{x}\vec{r}}$$

Для  $\Omega$  получаем дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{\omega_p}{4} \frac{W}{n_0^2} G_{\Omega, \alpha} \left[ \frac{(k_0, k_0 + \alpha)^2}{k_0^2 |k_0 + \alpha|^2} \frac{1}{-\Omega + \omega_{k_0 + \alpha} - \omega_{k_0}} + \frac{(k_0, k_0 - \alpha)^2}{k_0^2 |k_0 - \alpha|^2} \frac{1}{\Omega + \omega_{k_0 - \alpha} - \omega_{k_0}} \right] = 0 \quad (2.1)$$

Здесь

$$W = \frac{|A|^2}{8\pi} \quad G_{\Omega, \alpha} = \frac{\delta n_{\Omega, \alpha}}{U_{\Omega, \alpha}} = \frac{1}{M} \frac{L_{\Omega, \alpha}}{1 - \frac{4\pi e^2}{M k_d^2} L_{\Omega, \alpha}}$$

$$L_{\Omega, \alpha} = \int \frac{(x, \frac{\partial f}{\partial v})}{-\Omega + (xv)} dv$$

В гидродинамическом приближении

$$G_{\Omega, \alpha} = \frac{n_0}{M} \frac{\alpha^2}{-\Omega^2 - c_s^2 \alpha^2} \quad (2.2)$$

В статическом приближении

$$G_{\Omega, \alpha} = - \frac{n_0}{T_i + T_e} \quad (2.3)$$

Приведем результаты исследования уравнения (2.1) в разных случаях. Характер неустойчивости существенно зависит от величины  $k_0$ .

Если  $(k_0 \gamma_d)^2 > \frac{1}{3} \frac{m}{M}$  характер неустойчивости зависит также

от соотношения температур электронов и ионов. При  $T_i \ll T_e$  и достаточно малых амплитудах  $(\frac{W}{nT} \ll (\frac{m}{M})^{1/2} k \gamma_d)$  имеет место обычная распадная неустойчивость с возбуждением ионного звука<sup>16</sup>. Волновой вектор возмущения для этой неустойчивости лежит на поверхности

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_0 - \alpha} + \Omega \alpha$$

а инкремент её равен

$$\gamma = \frac{\omega_p}{2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} (\alpha \gamma_d)^{1/2} \frac{|(k_0, k_0 - \alpha)|}{|k_0| |k_0 - \alpha|} \quad (2.4)$$

Инкремент максимален при  $\alpha \simeq 2k_0$ , тогда

$$\gamma \simeq \frac{\omega_p}{2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} (2k \gamma_d)^{1/2} \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2}$$

При достаточно малых формула (2.4) становится неприменимой - если  $\alpha < \alpha_{\text{крит}}$ , где  $\alpha_{\text{крит}} \sim \frac{1}{\gamma_d} \frac{W}{nT} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$  неустойчивость имеет более сложный характер. (См. [7]). При увеличении амплитуды  $\alpha_{\text{крит}} \rightarrow k_0$  и при  $\frac{W}{nT} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} k \gamma_d$  распадная неустойчивость полностью перестраивается. При  $\frac{W}{nT} \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} k \gamma_d$  имеет место модифицированная распадная неустойчивость с инкрементом (при  $\alpha \simeq 2k_0$ ).

$$\gamma \simeq \omega_p \left(\frac{W k^2}{M n_0 \omega_p^2}\right)^{1/3} \quad (2.5)$$

Она развивается вблизи поверхности  $\omega_{k_0 - \alpha} = \omega_{k_0}$

Заметим, что в формулу (2.5) не входит температура плазмы - она применима и при большой плотности энергии ленгмюровских колебаний  $(\frac{W}{nT} \gg 1)$ .

При  $k \gamma_d > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$  модифицированная распадная не -

устойчивость сохраняет свой характер вплоть до амплитуд

$$\frac{W}{nT} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{1}{(k\gamma_d)^2}, \text{ выше которых необходимо учитывать электронную нелинейность. Если } \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} > k\gamma_d > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

то модифицированная распадная неустойчивость имеет место до интенсивностей

$$\frac{W}{nT} \sim \frac{M}{m} (k\gamma_d)^4$$

При  $\frac{M}{m} (k\gamma_d)^4 < \frac{W}{nT} < \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{1}{(k\gamma_d)^2}$

имеет место неустойчивость с инкрементом, по порядку величины задаваемым формулой (2.5), но не локализованная вблизи поверхности

$$\omega_x = \omega_{k_0}$$

; инкремент этой неустойчивости примерно постоянен в обширной области  $x \sim k_0$ . В изотермической плазме

волны малой ( $W/nT < m/M$ ) амплитуды испытывают неустой-

чивость, связанную с индуцированным рассеянием на полях. Макси-

мальный инкремент  $\gamma \sim \omega_p \frac{W}{nT}$  эта неустойчивость имеет при

$x \sim 2k_0$ . При  $W/nT > m/M$  в области малых волновых

чисел возмущения  $x\gamma_d \sim \frac{W}{nT} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$  "открывает-

ся" модифицированная распадная неустойчивость с максимальным ин-

крементом  $\gamma \sim \omega_p \frac{W}{nT}$ . Для этих волн инкремент неустойчи-

вости имеет таким образом, два одинаковых по порядку величины

максимума - при  $x \sim 2k_0$  и  $x\gamma_d \sim \frac{W}{nT} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$ . По мере

увеличения амплитуды второй максимум сближается с первым, и при

$\frac{W}{nT} \sim \frac{1}{k\gamma_d} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$  они сливаются. Начиная с этих ампли-

туд температура ионов не влияет качественно на характер неустойчи-

вости.

Неустойчивость длинных ленгмюровских волн  $(k\gamma_d)^2 < \frac{1}{3} \frac{m}{M}$

качественно слабо зависит от соотношения температур электронов и

ионов. Для волн малой амплитуды ( $\frac{W}{nT} < (k\gamma_d)^2$ ) имеет мес-

то неустойчивость автомодуляционного типа /8/ с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{4} q \omega_p^2 x^2 \gamma_d^2 - \frac{9}{4} \omega_p^2 x^4 \gamma_d^4} \quad (2.6)$$

Формула (2.6) применима в статическом  $\left(\frac{W}{nT} \ll \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}\right)$

$q = \frac{T_e}{T_i + T_e}$  и в гидродинамическом  $(k\gamma_d)^2 > \frac{W}{nT} > \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}$

приближениях и неприменима при  $\frac{W}{nT} \sim \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}$ . Если

$\frac{W}{nT} \gg (k_0 \gamma_d)^2$ , то можно положить  $k_0 = 0$ . В этом

важном случае дисперсионное уравнение приводится к виду

$$-\Omega^2 - \omega_x^2 = \frac{\omega_p}{2} \frac{W}{nT} \omega_x \cos^2 \alpha G(\Omega, x) \quad (2.7)$$

Здесь  $\alpha$  - угол между  $x$  и направлением электрического вектора

в исходном колебании. В статическом приближении  $\frac{W}{nT} < \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}$

имеем

$$\gamma = \omega_p \sqrt{\frac{3}{4} q x^2 \gamma_d^2 \frac{W}{nT} \cos^2 \alpha - \frac{9}{4} x^4 \gamma_d^4} \quad (2.8)$$

Максимальный инкремент:

$$\gamma_{max} = \frac{1}{16} q^2 \omega_p \frac{W}{nT}$$

достигается при

$$\cos^2 \alpha = 1 \quad (x\gamma_d)^2 = \frac{1}{6} \frac{W}{nT}$$

В гидродинамическом пределе  $\left(\frac{W}{nT} \gg \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M}\right)$  урав-

нение (2.7) упрощается до вида

$$(\Omega^2 - c_s^2 x^2) (-\Omega^2 + \frac{9}{4} \omega_p^2 \gamma_d^4 x^4) + \frac{9}{4} \omega_p^4 (x\gamma_d)^4 \frac{m}{M} \frac{W}{nT} \cos^2 \alpha = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) без члена  $\frac{9}{4} \omega_p^2 x^4 \chi_d^4$  было получено ранее Рудаковым и Веденовым /1/. Не учтенный ими член, однако, весьма важен, так как в его отсутствие  $\Omega \sim x$ , и максимальный инкремент неустойчивости оказывается бесконечным (при  $x \rightarrow \infty$ ). При  $\frac{T_e}{T_i} \frac{m}{M} < \frac{W}{nT} < \frac{m}{M}$  неустойчивость снова описывается формулой (2.8). Для воли большой амплитуды уравнение (2.9) принимает вид

$$\Omega^2 \left( -\Omega^2 + \frac{9}{4} \omega_p^2 \chi_d^4 x^4 \right) + \frac{9}{4} \omega_p^4 (2\chi_d)^4 \frac{m}{M} \frac{W}{nT} \cos^2 \alpha = 0 \quad (2.10)$$

при малых  $x$  имеем

$$\delta \approx \omega_p x \chi_d \left( \frac{3}{4} \frac{W}{nT} \frac{m}{M} \cos^2 \alpha \right)^{1/4}$$

Максимальный инкремент

$$\delta_{\max} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \omega_p \left( \frac{m}{M} \frac{W}{nT} \right)^{1/2}$$

достигается при

$$x \chi_d \sim \left( \frac{m}{M} \frac{W}{nT} \right)^{1/2}$$

Уравнения (2.9), (2.10) справедливы при  $\frac{W}{nT} \ll 1$ . В противном случае необходимо учитывать электронные нелинейности.

Рассмотрим теперь произвольное распределение лэнгмюровских волн. Пусть характерное для него волновое число -  $K$ . Это означает, что существуют пространственные области размером  $L \ll \frac{1}{K}$ , внутри которых колебания электронов относительно ионов можно считать однородными. Пусть интенсивность этого колебания  $W$ . Рассмотрим его неустойчивость. Если размер, на котором развивается эта неустойчивость меньше  $L$ , то рассмотренное спектральное распределение окажется неустойчивым. Легко оценить условия неустойчивос-

ти. Пользуясь результатами данного раздела, найдем, что распределение неустойчиво, если

$$(K \chi_d)^2 < \frac{W}{nT} \quad \text{при} \quad \frac{W}{nT} < \frac{m}{M} \quad (2.11)$$

$$(K \chi_d)^2 < \left( \frac{W}{nT} \frac{m}{M} \right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{W}{nT} > \frac{m}{M}$$

В некоторых случаях (см./8/) кинетика лэнгмюровской турбулентности идет таким образом, что в спектре можно выделить две компоненты - интенсивный длинноволновый "кери" и обширное коротковолновое "гадо". В этом случае нужно предполагать, что в формулы (3.9) следует подставлять параметры "керна", так как "гадо" приводит лишь к незначительному изменению эффективной тепловой скорости электронов.

### § 3. Каверны и их схлопывание

Поставим вопрос о нелинейной стадии развития неустойчивости монохроматической волны. Для коротких  $(K \chi_d)^2 > \frac{1}{3} \frac{m}{M}$  волн неустойчивость приведет прежде всего к появлению лэнгмюровских волн с  $\vec{k} \approx -\vec{k}_0$  и постепенному заполнению окрестности сферы  $\omega_k = \omega_{k_0}$ . Неустойчивость длинных монохроматических волн малой  $\left( \frac{W}{nT} < (K \chi_d)^2 \right)$  амплитуды рассмотрена в § 4. В настоящем разделе рассмотрен вопрос о развитии неустойчивости однородного лэнгмюровского колебания. Фактически, в связи с применениями к устойчивости турбулентных спектров следует изучить вопрос о развитии неустойчивости локализованного лэнгмюровского колебания достаточно большой интенсивности. Мы рассмотрим этот вопрос в предположении, что колебание является сферически - симметричным. Тогда вводя величину  $E = \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , получим из (1.2) уравнение

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_p \chi_d^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \chi^2 E = \frac{\omega_p}{2n_0} \delta n E \quad (3.1)$$

с очевидным граничным условием  $E(0) = 0$ . В гидродинамическом пределе (3.1) замыкается уравнением



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n - c_s^2 \Delta_{\eta\eta} \delta n = \frac{1}{16\pi M} \Delta_{\eta\eta} |E|^2 \quad (3.2)$$

$$\Delta_{\eta\eta} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

В статическом пределе имеем

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_p \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 E = \frac{\omega_p}{2n_0} \delta n E$$

$$\delta n = - \frac{1}{16\pi M c_s^2} |E|^2 \quad (3.3)$$

Совершая замену переменных

$$\eta = 3 \sqrt{\frac{qM}{2m}} \eta_d \rho \quad t = \frac{3M}{m} q \frac{t}{\omega_p}$$

$$\delta n = \frac{2}{3q} n_0 \frac{m}{M} V \quad E = 4 \sqrt{\frac{2\pi n_0 T_e m}{qM}} \psi$$

приведем уравнения (3.1) - (3.3) к виду

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \psi = V \psi \quad (3.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_{\rho\rho} \right) V = \Delta_{\rho\rho} |\psi|^2 \quad (3.5)$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \psi + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.6)$$

Исследуем уравнение (3.6). Оно имеет интегралы движения

$$I_1 = \int_0^\infty \rho^2 |\psi|^2 d\rho$$

$$I_2 = \int_0^\infty \left\{ |(\rho\psi)_\rho|^2 + 2|\psi|^2 - \frac{1}{2} \rho^2 |\psi|^4 \right\} d\rho$$

Введем величину

$$A = \int_0^\infty \rho^4 |\psi|^2 d\rho$$

Непосредственно из (3.6) легко получить соотношение

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 6I_2 - 2 \int_0^\infty |(\rho\psi)_\rho|^2 d\rho - 4 \int_0^\infty \rho^2 |\psi|^4 d\rho < 6I_2$$

откуда следует неравенство  $A < 3I_2 t^2 + c_1 t + c_2$

$c_1, c_2$  - константы (3.7)

Если  $I_2 < 0$ , то неравенство в силу положительности  $A$  (3.7)

может быть выполнено лишь для не слишком больших значений  $t$ . Это означает, что решение начальной задачи с  $I_2 < 0$  существует лишь конечное время и должно привести к особенности при некотором  $t = t_0$  (ср./9, 10/). Условие  $I_2 < 0$  означает

$|\psi|^2 e^{\frac{3}{2}t} > e^2$  что по порядку величины совпадает с условием

неустойчивости ( $\frac{W}{nT} > (k\eta_d)^2$ ). Для выяснения характера особенности, возникающей в результате неустойчивости, заметим, что уравнение (3.6) допускает автономную подстановку

$$\psi = e^{i\lambda^2 \int \frac{dt}{f(t)}} \frac{1}{\lambda f(t)} R\left(\frac{\rho}{\lambda f(t)}\right) \quad (3.8)$$

$$f(t) = \mu \sqrt{t_0 - t} \quad \frac{\rho}{\lambda f(t)} = \xi$$

Для  $R(\xi)$  имеем

$$\Delta_{\xi\xi} R - \frac{2}{\xi^2} R + |R|^2 R = i \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \xi R$$

Подстановка  $R = \frac{F}{\xi}$  приводит это уравнение к виду

$$F'' - \frac{2F}{\xi^2} + |F|^2 F = i d \xi F' \quad d = \frac{h}{\lambda^2}$$

Рассмотрим асимптотику  $F$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . При больших  $\xi$  нелинейностью, а также членом  $-\frac{2F}{\xi^2}$  можно пренебречь. Асимптотическое поведение  $F(\xi)$  имеет вид

$$F(\xi) \rightarrow c_1 \xi^{i/2} + c_2 \int_{\xi}^{\infty} e^{i \frac{d}{2} \xi^2} d\xi \quad (3.10)$$

Из (3.9) видно, что интеграл  $I_1$  для автомодельного решения бесконечен при любых  $c_1, c_2$ . Интеграл  $I_2$  конечен, если  $c_2 = 0$ .

В этом случае  $I_2 \equiv 0$ , так как из автомодельной подстановки следует, что  $I_2(t) = f(t) I_2(0) = I_2(0)$ . Требование

$c_2 = 0$  эквивалентно требованию  $\frac{d}{d\xi} (\xi R) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Это условие вместе с условием  $R(0) = 0$  задает задачу на собственные значения  $d$  для уравнения (3.9). Величина

$|c_1|$  может быть выражена через  $d$ . При  $t \rightarrow t_0, \xi \rightarrow \infty$

и  $\psi(\rho)$  во всей области  $\rho$  стремится к своему предельному значению  $\psi \rightarrow c_1 \rho^{i/2 - 2}$ . Из условия  $I_2 = 0$  имеем  $\frac{1}{2} |c_1|^2 = \frac{1}{2} d^2 + 3$ .

Таким образом, развитие особенности можно представить как формирование области пониженной плотности плазмы - каверны. Электроны внутри каверны совершают интенсивные радиальные колебания и выталкиваются из каверны высокочастотным давлением. За конечное время каверна коллапсирует. При приближении к моменту коллапса всюду в каверне, кроме центральной области, устанавливается распределение плотности

$$\delta n = -3 n_0 |c_1|^2 \frac{\chi_0^2}{\chi^2}$$

Эта формула справедлива для  $\chi \gg \chi_0(t)$ , причем  $\chi_0(t)$  - радиус каверны стремится к нулю как  $\sqrt{t_0 - t}$ . В центре каверны плотность остается невозмущенной.

Фактически, однако, уравнение (3.6), а вместе с ним и автомо-

дельное решение, является справедливым лишь для не слишком больших вариаций плотности,  $(\delta n/n_0 < m/M)$ . Кроме того, если  $T_i \ll T_e$ , то полученное решение неприменимо при

$$\delta n/n \approx \frac{W}{nT} \sim \frac{T_i}{T_e} \frac{m}{M} \quad \text{из-за необходимости учи-}$$

тывать затухание Ландау на ионах. Однако, основная причина коллапса - высокочастотное давление, сохраняется и при этих условиях. Из-за сохранения инварианта (1.3) - полного числа ленгмюровских квантов - можно утверждать, что эти области параметров "проходятся" без существенной потери энергии.

При  $\frac{W}{nT} \gg \frac{m}{M}$  для описания коллапса можно пользоваться гидродинамическим приближением. При этом в уравнениях (3.4), (3.5) можно сделать упрощения - положить

$\psi \approx e^{i \int E(t) dt} \Phi(\chi, t)$ , где  $\Phi$  вещественна и пренебречь членом  $\Delta_{\rho\rho} V$ . Полученная система

$$\Delta_{\rho\rho} \Phi - \frac{2}{\rho^2} \Phi - V \Phi = E \Phi \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta_{\rho\rho} |\Phi|^2$$

описывает квазистационарную задачу на собственное значение  $E$  для уравнения Шредингера с потенциалом  $-\frac{2}{\rho^2} - V$ , самосогласованно зависящим от волновой функции  $\Phi$ . Система (3.11) допускает автомодельную подстановку

$$\Phi = \frac{\lambda A^{3/2}}{f^{3/2}} R\left(\frac{\lambda \rho}{f}\right); \quad V = \frac{\lambda^2}{\rho^2} V_0\left(\frac{\lambda \rho}{f}\right) \quad (3.12)$$

$$E = \frac{\lambda^2}{f'^2(t)} \quad f(t) = A(t_0 - t)^{2/3}$$

Для  $R$  и  $V$  имеем

$$\Delta_{\xi\xi} R - \frac{2}{\xi^2} R - V_0 R = R$$

$$\frac{2}{9} \left( \frac{\xi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 V_0 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \xi^2 V_0 \right) = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} R^2$$

$$I_1 = \int \rho^2 |\varphi|^2 d\Omega \quad (3.13)$$

Из автомодельной подстановки (3.12) следует, что интеграл  $I_1 = \int \rho^2 |\varphi|^2 d\Omega$  конечен и сохраняется. Это означает, что каверна представляет собой резонатор, в котором "заперто" лэнгмюровское колебание. Однако связь между волновой функцией колебаний и вариацией плотности теперь иная и ход вариации плотности качественно остается такой-же, как и раньше. Можно сказать, что по достижении вариацией плотности величины  $\delta n \approx -n_0 m/M$  колебание, заключенное в центральной зоне каверны, "отрывается" и коллапсирует независимо от остального мира. Ход плотности вне центральной зоны каверны определяется решением уравнения (3.13), если в нём положить  $R^2 = 0$ . Отсюда имеем  $\delta n \sim \frac{1}{2} \tau^2$ . Размер центральной области уменьшается как  $(t_0 - t)^{1/3}$ . Этот процесс начинается при достижении амплитудой волн в каверне величины  $W/nT \sim m/M$ . Характерный размер центральной зоны при этом  $L \sim \tau \sqrt{m/M}$ . Это позволяет оценить количество энергии, входящей в коллапс

$$\Delta \varepsilon \sim WL^3 \approx nT \tau^3 \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (3.14)$$

При увеличении интенсивности колебаний в центре каверны до величины  $W/nT \sim 1$ , возникает необходимость учитывать электронные нелинейности. Качественно, однако, ситуация не изменится. Каверна будет коллапсировать и дальше - за счёт выталкивания из неё плазмы высокочастотным давлением. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока амплитуда колебаний не возрастет настолько, что произойдет пересечение траекторий, электронов, движущихся к центру. После этого пересечения электроны, упорядоченная скорость которых уже значительно превышает тепловую, покинут каверну и унесут энергию лэнгмюровских колебаний. Опустевшая каверна "захлопнется" сходящейся к центру ударной ионнозвуковой волной.

Энергия электронов, вылетающих из каверны, может быть оценена сверху. Во всяком случае, размер каверны не может быть меньше дебаевского радиуса. Из формулы (3.14) следует, что энергия вылетающих электронов удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \sqrt{\frac{M}{m}} T_e$$

Образование каверн и их коллапс приводит к диссипации лэнгмюровских волн, характеризующейся некоторым декрементом затухания. Для вычисления этого декремента, заметим, что развитие каверн связано с локальным увеличением волнового числа. Поскольку развитие каверн является самым быстрым из всех нелинейных процессов, фактически среднее волновое число будет всегда находиться на границе возбуждения неустойчивости, что даёт

$$(k\tau_d)^2 \sim \frac{W}{nT} \quad \text{при} \quad \frac{W}{nT} < \frac{m}{M}$$

$$(k\tau_d)^2 \sim \left(\frac{W}{nT} \frac{m}{M}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{W}{nT} > \frac{m}{M}$$

Рассмотрим сначала случай  $\frac{W}{nT} \ll \frac{m}{M}$ . Тогда характерное время развития каверны  $\tau_c \sim \tau_p \frac{W}{nT}$ . Полагая, что в данный момент времени одна каверна находится в среднем в области объёмом порядка  $\frac{1}{k^3}$  и считая, что в каверне диссипируется энергия  $\Delta \varepsilon \sim nT \tau_d^3 \sqrt{\frac{m}{M}}$ , найдем эффективный декремент затухания  $\gamma_{\text{эфф}} \sim \omega_p \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{W}{nT}\right)^{3/2}$  для  $\frac{W}{nT} \ll \frac{m}{M}$ . Пусть теперь  $\frac{W}{nT} \gg \frac{m}{M}$

Тогда характерное время развития каверн  $\tau_c \sim \tau_p \left(\frac{W}{nT} \frac{m}{M}\right)^{1/2}$ . При интенсивностях такого порядка вся энергия, попадающая в каверну, диссипируется, так что можно считать, что за время  $\tau_c$  диссипируется энергия, равная по порядку величины полной энергии лэнгмюровских волн. Отсюда имеем оценку

$$\gamma_{\text{эфф}} \sim \omega_p \left(\frac{W}{nT} \frac{m}{M}\right)^{1/2} \quad \text{для} \quad \frac{W}{nT} \gg \frac{m}{M}$$

§ 4. Автомодауляция монохроматической лэнгмюровской волны

Монохроматическая лэнгмюровская волна малой амплитуды

(  $\frac{W}{nT} \ll (k\gamma_d)^2 \ll \frac{m}{M}$  ) неустойчива (см. § 2) относительно возбуждения нарастающей модуляции с характерным размером  $L \sim \gamma_d \left(\frac{W}{nT}\right)^{-1/2}$ . Покажем, что нелинейная эволюция этой неустойчивости приведет к развитию каверн и поглощению энергии волны за счет лэнгмюровского коллапса. Будем исходить из уравнения (1-8). Полагая

$$\psi = e^{i k x - i \omega x t} G$$

$G$  - комплексная огибающая волны, получим

$$i \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \nabla \right) G + \frac{3}{2} \omega_p \gamma_d^2 \Delta G + \frac{e^2 q k_0^2}{4 m \omega_p T e} |G|^2 G = 0 \quad (4.1)$$

переходя в сопутствующую систему отсчета и совершая переход к безразмерным переменным

$$\zeta - v t = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_d \xi \quad t = \tau / \omega_p$$

$$G = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{e^2 q}{4 m \omega_p T e}} E$$

получим для  $E$

$$i E_t + \Delta E + |E|^2 E = 0 \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) имеет интегралы движения

$$I_1 = \int |E|^2 d\zeta \quad ; \quad I_2 = \int \left\{ |v E|^2 - \frac{1}{2} |E|^4 \right\} d\zeta$$

Вводя

$$A = \int \zeta^2 |E|^2 d\zeta$$

Получим из (4.1)

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = 6 I_2 - 4 \int_0^\infty \zeta^2 |E|^4 d\zeta < 6 I_2$$

откуда следует неравенство (3.7). Рассуждая как и в § 3, приходим к выводу, что решение начальной задачи для уравнения (4.1) должно окончиться сингулярностью, если  $I_2 < 0$ . Это означает, что развитие автомодауляции монохроматической волны (для которой  $I_2 = -\infty$ ) приводит к тому, что в областях повышенной интенсивности волны будут возникать движущиеся с групповой скоростью "фокусы", амплитуда в которых за конечное время формально обращается в бесконечность. Вблизи этих фокусов плотность плазмы понижена.

Развитие фокуса во многом напоминает развитие плазменной каверны. Предположим, что огибающая волны вблизи фокуса сферически симметрична и совершим автомодельную подстановку (3.8). В результате получим задачу на собственные значения

$$\Delta_{\xi\xi} R + |R|^2 R - R = i \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \xi R$$

с граничными условиями

$$R'_\xi / \xi = 0 \quad \left( \xi R \right)'_\xi \rightarrow 0 \quad \xi \rightarrow \infty$$

и со свойствами, аналогичными граничной задаче (3.9). Для неё, в частности, справедливо асимптотическое разложение (3.10), тождество  $I_2 = 0$ . Коэффициент  $C_1$  и собственное значение связаны соотношением

$$\frac{1}{2} |C_1|^2 = \frac{1}{\alpha^2} + 1$$

Из автомодельной подстановки следует, что амплитуда ленгмюровской волны вблизи фокуса обращается в бесконечность по закону  $G \sim \frac{1}{\sqrt{t_0 - t}}$ . Фактически уже при  $\frac{|G|^2}{nT} \sim (k\gamma_d)^2$  уравнение (4.2) перестает быть применимым. При этом амплитуда волны в области фокуса достигнет такой величины, что окажется возможным её коллапс — на размере порядка длины волны начнут возникать и схлопываться каверны. Это приведет к нелинейному затуханию энергии волны, которое и ограничит рост амплитуды в фокусе.

Развитие фокусов приведет также к резкому уширению спектра волны.

### § 5. Коллапс и кинетика слабой турбулентности

Условие коллапса ленгмюровских волн ( $\frac{W}{nT} \gg (k\gamma_d)^2$ ) противоположно условию применимости слабой турбулентности ( $\frac{W}{nT} \ll (k\gamma_d)^2$ ). Тем не менее коллапс и слабая турбулентность могут сосуществовать в разных областях спектра.

При этом коллапс, осуществляя самосогласованное затухание длинных волн, оказывает существенное влияние на кинетику слабой турбулентности во всем  $k$ -пространстве.

Уравнения, описывающие слабую турбулентность, можно получить, исходя из системы (1,2), (1,4) — (1,6). Особенно просто это сделать для длинноволновой турбулентности, когда  $k\gamma_d < \frac{1}{3}\sqrt{\nu/m}$  (Такая турбулентность может быть, например, возбуждена электронным пучком если его скорость  $V_n > v_{Te} 3\sqrt{\nu/m}$ ). В первом приближении можно описывать такую турбулентность, исходя из динамического уравнения (1,8). Совершая в нем преобразование Фурье по координатам и переходя к переменной  $\psi_k = \sqrt{\frac{qW_p}{k}} c_k$  получим

$$i \frac{\partial c_k}{\partial t} - \omega_k c_k = \int W_{kk_1, k_2, k_3} c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \times \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (5.1)$$

$$W_{kk_1, k_2, k_3} = -\frac{1}{8} \frac{qW_p}{n_0 T e} \frac{(kk_2)(k_1 k_3) + (kk_3)(k_1 k_2)}{|k| |k_1| |k_2| |k_3|} \quad (5.2)$$

Усредняя уравнение (5.1) по фазам, получаем кинетическое уравнение для величины определенной как

$$n_k \delta(k-k') = \langle c_k c_{k'}^* \rangle$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\pi \int |W_{kk_1, k_2, k_3}|^2 \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \times$$

$$\times \delta_{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}} (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2}) dk_1 dk_2 dk_3 \quad (5.3)$$

(см. / 3 /).

Уравнение (5.3) имеет интегралы движения

$$N = \int n_k dk \quad E = \int \omega_k n_k dk$$

Выражение (5.2) для ядра четырехплазменного уравнения совпадает с вычисленным другим способом ранее Цытовичем и Пикельнером / 11 /.

При необходимости учесть индуцированное рассеяние на токах, это можно сделать уточнив уравнение (5.1). Для этого заметим, что в выражении

$$\delta n_{k, \omega} = G_{k, \omega} u_{k, \omega} =$$

$$= \frac{e^2}{4m\omega_p} \int G_{k, \omega}(k_1, k_2) \psi_{k_1, \omega_1}^* \psi_{k_2, \omega_2} \times$$

$$\times \delta\omega + \omega_1 - \omega_2 \delta\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 d\omega_1 d\omega_2$$

Малость нелинейности, предполагающаяся при переходе к усреднению по фазам, позволяет считать  $\psi_{k, t} \sim \psi_k e^{i\omega_k t}$ . Тогда

$$\delta n_{k, t} = \frac{e^2}{4m\omega_p^2} \int G_{k, \omega} \omega_{k_2} - \omega_{k_1}, \vec{k} \delta\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2) \times$$

$$\times \psi_{k_1, \omega_{k_1}}^* \psi_{k_2, \omega_{k_2}} d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (1.2) и переходя к переменным  $\mathbf{C}_k$ , получим уточнение уравнения (5.1), в котором ядро  $W$  заметно на  $\tilde{W}$ , где

$$\tilde{W}_{kk_1, k_2 k_3} = -\frac{1}{8} \frac{\omega_p}{n_0^2} \frac{1}{k k_1 k_2 k_3} [(\mathbf{k} \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3) \times$$

$$\times G_{k_3 - k_1, \omega_{k_3} - \omega_{k_1}} + (\mathbf{k} \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) G_{k_2 - k_1, \omega_{k_2} - \omega_{k_1}}]$$

Поскольку  $G_1 \approx \frac{n_0}{T_i + T_e}$ , реальные части ядер  $W$  и  $\tilde{W}$  можно считать с хорошей точностью равными. В кинетическом уравнении (5.3) появляется, однако член, описывающий индуцированное рассеяние

$$W_{kk'} = \frac{1}{2m} \tilde{W}_{kk', kk'} = -\frac{1}{8} \frac{\omega_p}{2n_0} \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \times$$

$$\times \frac{1}{2m} G_{\vec{k}_2 - \vec{k}_1, \omega_{k_2} - \omega_{k_1}}$$

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{ind} = 2n_k \int W_{kk'} n_{k'} d\mathbf{k}'$$

Аналогичным образом при  $(k v_d)^2 > \frac{1}{8} \frac{m}{M}$  можно было бы вывести из исходной системы распадные кинетические уравнения.

При  $(k v_d)^2 < \frac{m}{M}$ , индуцированным рассеянием можно пренебречь; если  $\frac{W}{\omega T} \gg \frac{T_i}{T_e} (k v_d)^2$ . Мы рассмотрим именно этот случай, хотя при малых амплитудах воли коллапс играет существенную роль в установлении стационарного спектра.

Усредним уравнение (5.3) по углам в каждом из  $\mathbf{k}$ -пространств и перейдем к переменной  $\omega = k^2$ . Получим

$$\frac{\partial n_\omega}{\partial t} = \sqrt{\omega} \iiint S_{\omega \omega_1, \omega_2 \omega_3} \{ n_{\omega_1} n_{\omega_2} n_{\omega_3} +$$

$$+ n_\omega n_{\omega_2} n_{\omega_3} - n_\omega n_{\omega_1} n_{\omega_2} - n_\omega n_{\omega_1} n_{\omega_3} \} \times$$

$$\times \delta\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (5.5)$$

Интегрирование ведется теперь по области, изображенной на рис. 1. При этом, в области I  $S_{\omega \omega_1, \omega_2 \omega_3} = T_{\omega \omega_1, \omega_2 \omega_3} > 0$ .  
Функция  $T$  вычислена в [11] и является однородной функцией степени  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{В области II} \quad S_{\omega \omega_1, \omega_2 \omega_3} = T_{\omega_1 \omega, \omega_2 \omega_3}$$

В области III  $S\omega\omega_1, \omega_2\omega_3 = T\omega_3\omega_2, \omega\omega_1$

В области IV  $S\omega\omega_1, \omega_2\omega_3 = T\omega_2\omega_3, \omega\omega_1$

При  $\omega_1 \ll \omega$

$$T\omega\omega_1, \omega_2\omega_3 \approx \sqrt{\omega_3} \quad (5.6)$$

Исследуем вопрос о стационарных решениях уравнения (5.5). Для этого приравняем нулю его правую часть. Будем искать стационарные решения в виде  $n_\omega = \omega^x$ . Совершая дробнолинейные преобразования (см. /3,12/)

$$\omega_2 \rightarrow \frac{\omega\omega_3}{\omega_2 + \omega_3 - \omega}; \quad \omega_3 \rightarrow \frac{\omega\omega_2}{\omega_2 + \omega_3 - \omega}$$

В области II

$$\omega_2 \rightarrow \frac{(\omega_2 + \omega_3 - \omega)\omega}{\omega_3}; \quad \omega_3 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_3}$$

В области III и

$$\omega_2 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_2}; \quad \omega_3 \rightarrow \frac{(\omega_2 + \omega_3 - \omega)\omega}{\omega_2}$$

В области IV получим уравнение

$$\iint (I) \frac{T\omega, \omega_2 + \omega_3 - \omega, \omega_2, \omega_3}{\omega_2^x \omega_3^x (\omega_2 + \omega_3 - \omega)^x} \left\{ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_2 + \omega_3 - \omega} \right)^x - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^x - \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right)^x \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_2 + \omega_3 - \omega} \right)^{\frac{7}{2} + 3x} - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^{\frac{7}{2} + 3x} - \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right)^{\frac{7}{2} + 3x} \right\} d\omega_2 d\omega_3 = 0$$

откуда найдем возможные значения  $x$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = -\frac{3}{2}; \quad x_4 = -\frac{7}{6}$$

Первые два распределения  $n_\omega = c$  и  $n_\omega = \frac{1}{\omega}$  являются термодинамическими равновесными и применительно к задаче о турбулентности физического смысла не имеют. Третье решение

$n_\omega \sim \frac{1}{\omega^{3/2}} \sim \frac{1}{k^3}$  имеет смысл колмогоровского спектра, соответствующего постоянству потока интеграла  $\epsilon$  в области больших  $k$ . Это решение, однако, не может осуществиться из-за расходимости интегралов в столкновительном члене на малых  $\omega$ .

Единственным физически реальным решением является последнее:

$n_k \approx \frac{Q^{1/3}}{k^{7/3}} \sim \frac{Q^{1/3}}{\omega^{7/6}}$ , здесь  $Q$  - постоянный поток числа квазичастиц (интеграла  $N$ ) в область малых волновых чисел.

Легко проверить (аналогично тому, как это сделано в /3/), что интегралы в столкновительном члене сходятся для этого решения как в области больших, так и в области малых волновых чисел<sup>x</sup>).

Стационарный спектр  $k^2 n_k \sim \frac{Q^{1/3}}{k^{7/3}}$  предполагает наличие поглощения волн в области малых волновых чисел. Таким механизмом является лэнгмюровский коллапс. Чтобы убедиться в существовании коллапса, перепишем спектр в виде

$$n_k = \frac{W}{4\pi k_0 \omega_p} \left( \frac{k}{k_0} \right)^{-7/3}$$

x) Полученный в статье В.Б.Пикельнера и В.Н.Цытовича /11/ спектр  $2+2x = -2,84$ , является результатом вычислительной ошибки, имеющей место в формуле (2.16) их статьи.

Здесь  $k_0$  - характерное волновое число энергосодержащей области турбулентности.

Рассмотрим величину  $W_k = 4\pi \int_0^k \omega_p k^2 n_k dk$  - имеющую смысл плотности энергии, заключенной внутри сферы с радиусом  $k$ . При  $k \rightarrow 0$ ,  $W_k \sim k^{2/3}$  убывает медленнее, чем  $W_k \sim (k \gamma_0)^2 \omega_p$ , что и указывает на существование коллапса. Границу  $k_s$  "зоны коллапса" можно найти из условия

$$\frac{W_k}{nT} \sim (k_s \gamma_0)^2$$

что даёт

$$(k_s \gamma_0)^2 \sim \frac{1}{k_0 \gamma_0} \left( \frac{W}{nT} \right)^{2/3}$$

при  $k > k_s$  осуществляется слабая турбулентность; при  $k < k_s$  имеет место сильная турбулентность, обусловленная коллапсом.

Если при  $k \approx k_0$  имеет место неустойчивость (например, пучковая) с характерным инкрементом  $\gamma$ , то четырехплазменное рассеяние приводит к ограничению неустойчивости на уровне

$$\frac{W}{nT} \sim k_0 \gamma_0 \left( \frac{\gamma}{\omega_p} \right)^{1/2}$$

Это даёт для границы сильной турбулентности

$$(k_s \gamma_0)^2 \sim (k_0 \gamma_0)^{1/2} \left( \frac{\gamma}{\omega_p} \right)^{3/4}$$

При

$$\gamma/\omega_p \gtrsim (k_0 \gamma_0)^2$$

области слабой турбулентности вообще не существует, характерный размер коллапсирующей каверны имеет порядок  $L \sim \gamma/k_0$ .

Приведенный пример показывает важность учёта явления коллапса в задачах плазменной турбулентности.

В заключение автор благодарит Д.Д.Рютова за полезные обсуждения и А.Г.Литвака за ценные замечания и дискуссию.

## Л и т е р а т у р а

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, т.159, стр.739, 1964 г.
2. A.A. Gordeev, A.A. Vedenov, L.I. Rudakov  
Plasma Physics, vol 9, 719, 1967
3. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, т.51, 688, 1966 г.
4. Т.Ф.Волков. Сб. физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, т.3, Москва, из АН СССР, 1967 г.
5. А.Г.Литвак. Изв.вузов - радиофизика, 9, 675, 1966 г.
6. В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев. ЖТФ, 32, 1291, 1962.
7. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. Препринт ИЯФ № 83-70 ПМТФ (в печати).
8. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, П.З.Чеботаев. Доклад на конференции по теории плазмы 1971 г. Киев, препринт ИЯФ № 65-71, ЖЭТФ (в печати).
9. В.Н.Власов, В.А.Петрищев, В.Н.Талапов. Доклад на 1У Всесоюзной конференции по нелинейной оптике. Кишинев, 1970 г.
10. В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах. ПМТФ (в печати).
11. С.Б.Пикельнер, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, т.55, 977, 1968.
12. В.Е.Захаров, Н.К.Филоненко. ДАН СССР, т.170, № 6, 1292, 1966г.



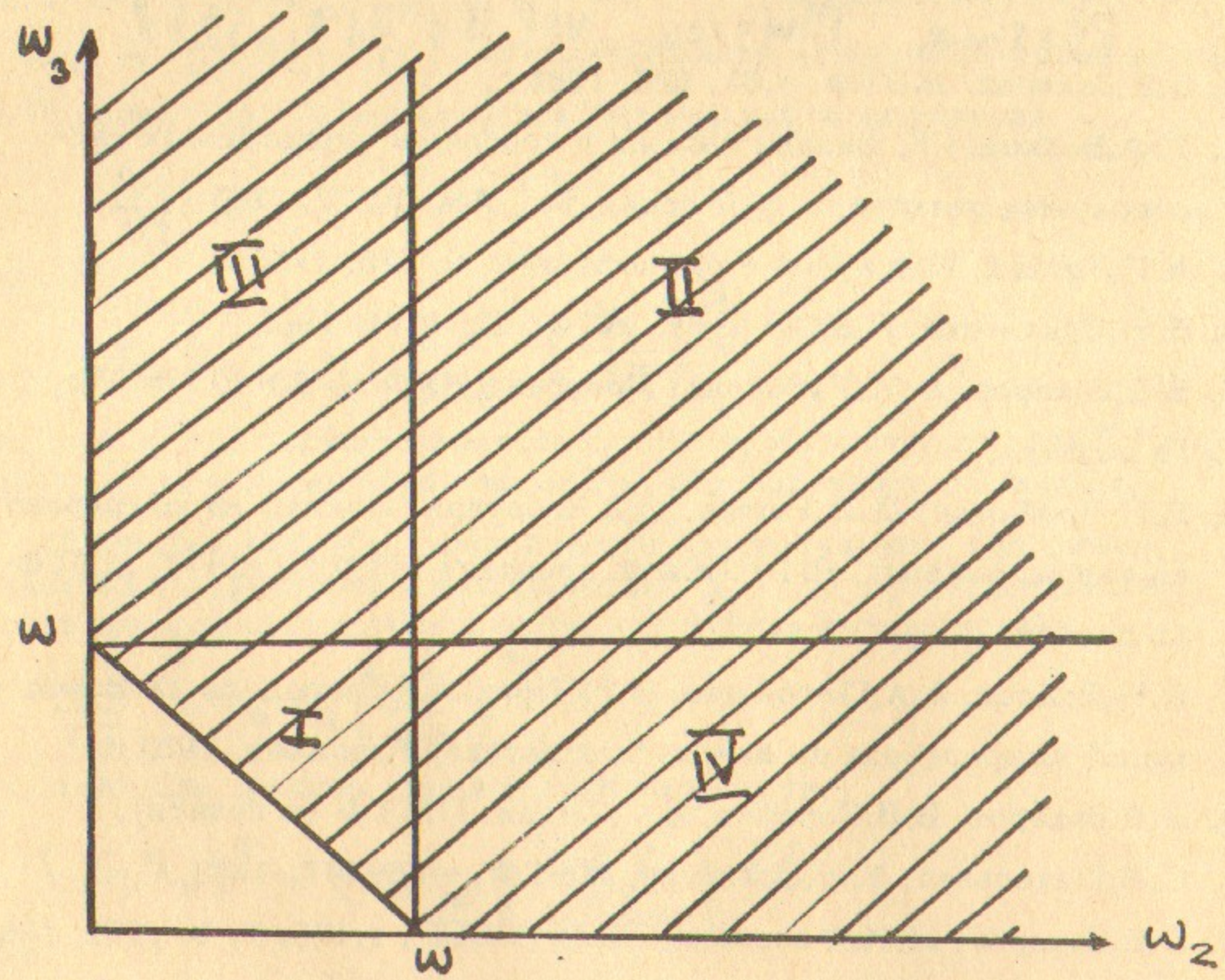


Рис 1

---

Ответственный за выпуск В.Е.Захаров  
Подписано к печати 17/IV-72 г. *ММ 10203*  
Усл. 1,3 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.  
Заказ № 22 . ПРЕПРИНТ

---

Отпечатано на ротаприте в ИЯФ СО АН СССР, нв.