12

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 16 - 72

В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов

О ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНАХ

Новосибирск

1972

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов

О ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНАХ

Новосибирск
1972

В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов

О ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНАХ

Хорошо известно (см., например, /1/) какую роль играют в физике нелинейных волн солитоны – уединенные волны, распространяющиеся без искажения формы. До сих пор в гидродинамике и физике плазмы изучались одномерные солитоны. В настоящей работе мы покажем, что в замагниченной плазме низкого давления вдоль магнитного поля могут распространяться трехмерные солитоны, убывающие по всем направлениям.

Рассмотрим медленные движения неизотермической плазмы ($T_i \ll T_e$), помещенной в однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ с характерными частотами $\omega \lesssim \omega_{Hi}$ (ω_{Hi} – циклотронная ионная частота). Такие движения можно описывать в рамках гидродинамической системы уравнений для плотности n и скорости $\vec{V}$ ионов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{e}{M}\nabla\varphi + [\vec{V}, \vec{\omega}_{Hi}] \qquad (1)$$

$$\Delta\varphi = -4\pi e\left(n - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T_e}}\right)$$

Эта система описывает два типа колебаний – ионно-звуковые и циклотронные, имеющие при $K r_d \ll 1$, $K r_{Hi} \ll 1$ ($r_{Hi} = C_s/\omega_{Hi}$), законы дисперсии:

$$\omega_1(K) = C_s K_z \left(1 - \frac{1}{2}K_\perp^2 r_{Hi}^2 - \frac{1}{2}K^2 r_d^2\right)$$

$$\omega_2(K) = \omega_{Hi}\left(1 + \frac{1}{2}K_\perp^2 r_{Hi}^2\right)$$

Для низкочастотных движений $\omega_1(k) \ll \omega_2(k)$, при этом скорость ионов с большой точностью направлена вдоль магнитного поля. Это позволяет выделить из (1) систему уравнений для δn и V_z, описывающую только ионно-звуковые колебания

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n + n_0 \frac{\partial}{\partial z}(1 + r_{Hi}^2 \Delta_\perp) V_z + \frac{\partial}{\partial z}\delta n V_z = 0$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -C_s^2 \frac{\partial}{\partial z}\left\{(1 + r_d^2 \Delta)\frac{\delta n}{n_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta n^2}{n_0^2}\right\} \tag{2}$$

Групповая скорость ионно-звуковых колебаний направлена вдоль магнитного поля, при этом волны, распространяющиеся в противоположные стороны, взаимодействуют между собой слабо. Это позволяет редуцировать систему (2) до одного уравнения:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + C_s \frac{\partial}{\partial z}\left\{1 + \frac{1}{2}(r_{Hi}^2 + r_d^2)\Delta_\perp + \frac{1}{2} r_d^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\frac{V_z}{C_s}\right\} V_z = 0 \tag{3}$$

описывающего ионно-звуковые волны, распространяющиеся в одном направлении вдоль магнитного поля. Уравнение (3) есть обобщение известного уравнения Кортевега - де - Вриза /1/.

Вводя переменные:

$$\xi_z = r_d^{-1}(z - C_s t), \quad \vec{\xi}_\perp = (r_d^2 + r_{Hi}^2)^{-1/2} \vec{r}_\perp$$

$$\tau = \frac{1}{2}\omega_{pi} t, \quad u = \frac{1}{2}\frac{V_z}{C_s}$$

запишем уравнение (3) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi_z}(\Delta - u)u = 0 \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет интегралы движения:

$$P(\xi_\perp) = \int u \, d\xi_z$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int u^2 d\vec{\xi}$$

$$I_2 = \int \left\{\frac{(\nabla u)^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right\} d\vec{\xi}$$

Рассмотрим стационарные решения уравнения (4) вида $u = u(\xi_z - \lambda t)$, подчиняющиеся уравнению вида

$$\Delta u - (\lambda + u) u = 0 \tag{5}$$

При $\lambda = c^2 > 0$ (5) имеет решения, убывающие экспоненциально при $|\xi| \to \infty$. Простейшее из них - сферически симметричное, подчиняется уравнению:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - (c^2 + u)u = 0$$

Это решение представляет собой трехмерный солитон с поперечным масштабом $(r_{Hi}^2 + r_d^2)^{1/2}$ и продольным масштабом r_d^2. График этого решения $u = u(\xi)$, вычисленный на ЭВМ, приводится на рисунке.

Исследуем вопрос об устойчивости трехмерного солитона. Заметим, что уравнение (5) может быть представлено в виде:

$$\frac{\delta}{\delta u}(I_2 + \lambda I_1)$$

так что все его решения суть стационарные точки функционала I_2 при фиксированном I_1. Из теоремы Ляпунова (см., например, /2/) следует, что солитон устойчив, если он обеспечивает абсолютный минимум функционала I_2. Легко убедиться, что среди значений I_2 на всех стационарных точках наименьшее осуществляется для сферически симметричного солитона. Заметим также, что из неравенства Гельдера следует оценка:

$$\int u^3 d\vec{\xi} \le \left(\int u^2 d\vec{\xi}\right)^{1/2}\left(\int u^4 d\vec{\xi}\right)^{1/2}$$

Для $\int u^4 d\vec{\xi}$ можно воспользоваться интерполяционным неравенством /3/:

$$\int u^4 d\xi \le 2\left(\int u^2 d\xi\right)^{1/2}\left[\int (\nabla u)^2 d\xi\right]^{3/2}$$

Окончательно:

$$I_2 \geq \int \frac{(\nabla u)^2}{2} d\vec{\xi} - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\int u^2 d\vec{\xi}\right)^{3/4}\left(\int (\nabla u)^2 d\vec{\xi}\right)^{3/4} \geq -\frac{1}{24}\left(\int u^2 d\vec{\xi}\right)^3$$

Отсюда следует, что функционал I_2 ограничен снизу и, следовательно, достигает на сферическом солитоне абсолютного минимума. Это и доказывает устойчивость солитона.

Авторы выражают благодарность В.В.Пухначеву за полезные замечания и В.В.Соболеву за вычисления на ЭВМ.

Литература

1. Б.Б.Кадомцев, В.И.Карпман. УФН, 103 , № 2, 193, 1971.
2. Ф.Р.Гантамахер. Лекции по аналитической механике, "Наука", 1966.
3. О.А.Ладыженская, "Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости", Физматгиз, 1961.

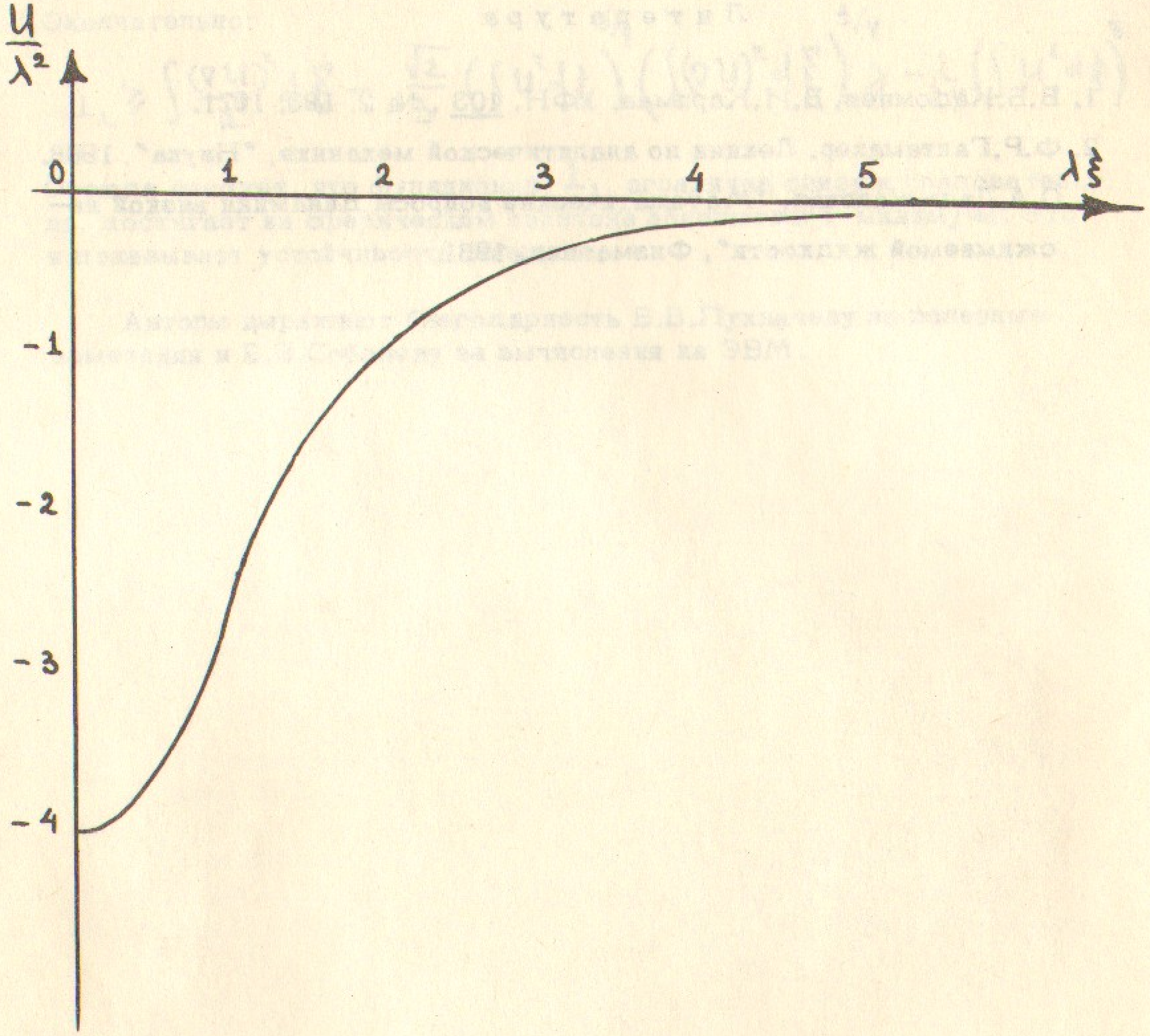

Рис. 1.

Ответственный за выпуск Е.А.Кузнецов
Подписано к печати 2.3.72. МН 10171
Усл. 0,4 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 16. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АНСССР, нв.