8

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 12 - 72

Ю.Б.Румер, Б.Г.Конопельченко

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ИСТОЧНИКОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Новосибирск

1972

Ю.Б.Румер, Б.Г.Конопельченко

ПОЛЕВАЯ ТЕОРИЯ ИСТОЧНИКОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

АННОТАЦИЯ

Предлагается полевая теория источников гравитационного поля, в которой известная из геометрической теории вложений римановых пространств система уравнений Гаусса-Кодацци-Риччи /ГКР/ приобретает физический смысл.

1

Как показано в геометрической теории вложений условия вложимости n -мерного риманова пространства V_n в псевдоэвклидово пространство E_{n+p} ($0 < p \leq \frac{n(n-1)}{2}$) имеют вид [1]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(g) = e_A\left(\overset{(A)}{H}_{\alpha\gamma}\overset{(A)}{H}_{\beta\delta} - \overset{(A)}{H}_{\alpha\delta}\overset{(A)}{H}_{\beta\gamma}\right) = e_A \begin{vmatrix} \overset{(A)}{H}_{\alpha\gamma} & \overset{(A)}{H}_{\beta\gamma} \\ \overset{(A)}{H}_{\alpha\delta} & \overset{(A)}{H}_{\beta\delta} \end{vmatrix}, \qquad \text{/Гаусс/} \quad (1)$$

$$\nabla_\gamma \overset{(A)}{H}_{\sigma\tau} - \nabla_\tau \overset{(A)}{H}_{\sigma\gamma} + e_B\left(\overset{(A,B)}{T}_\gamma \overset{(B)}{H}_{\sigma\tau} - \overset{(A,B)}{T}_\tau \overset{(B)}{H}_{\sigma\gamma}\right) = 0 \qquad \text{/Кодацци/} \quad (2)$$

$$\nabla_\gamma \overset{(A,B)}{T}_\tau - \nabla_\tau \overset{(A,B)}{T}_\gamma + e_C\left(\overset{(A,C)}{T}_\gamma \overset{(C,B)}{T}_\tau - \overset{(A,C)}{T}_\tau \overset{(C,B)}{T}_\gamma\right) + g^{\sigma\varsigma}\left(\overset{(A)}{H}_{\sigma\tau}\overset{(B)}{H}_{\varsigma\gamma} - \overset{(A)}{H}_{\sigma\gamma}\overset{(B)}{H}_{\varsigma\tau}\right) = 0 \qquad \text{/Риччи/} \quad (3)$$

где ∇_γ обозначает ковариантное дифференцирование; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, n$; A, B, C = 1, ..., p ; $e_A = \pm 1$ и по повторяющимся индексам B, C производится суммирование от 1 до p. $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ ($\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta} = \overset{(A)}{H}_{\beta\alpha}$) и $\overset{(A,B)}{T}_\gamma$ ($\overset{(A,B)}{T}_\gamma = -\overset{(B,A)}{T}_\gamma$) суть тензоры и векторы в пространстве V_n . Уравнения Кодацци и Риччи обеспечивают выполнимость условия Бианки

$$\nabla_\varsigma R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\varsigma\gamma} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\varsigma} = 0 \qquad (4)$$

Отметим, что формула Гаусса имеет кроме геометрической еще и алгебраическую интерпретацию. Действительно компоненты тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства класса p представимы в виде квадратичной комбинации компонент p тензоров $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$, что накладывает на компоненты тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определенные алгебраические соотношения [2] .

Однако наибольший интерес представляет возможность физической интерпретации уравнений ГКР. Оказывается, что появляющиеся в теории вложений тензорные и векторные величины $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(\beta)}{T}_{\gamma}$ дают возможность построить полевую теорию источников гравитационного поля. В связи с этим мы хотим подчеркнуть некоторую аналогию с ситуацией, возникающей при рассмотрении электрон-позитронного и электромагнитного полей. Совокупность уравнений Максвелла и Дирака в спинорной форме имеет вид:

$$\Box A^{\alpha\dot\beta} = \xi^{\alpha}\xi^{\dot\beta} + \eta^{\alpha}\eta^{\dot\beta} \qquad \text{/Максвелл/} \qquad (5)$$

$$(\partial^{\alpha\dot\beta} - A^{\alpha\dot\beta})\eta_{\dot\beta} - m\xi^{\alpha} = 0 \qquad \text{/Дирак/} \qquad (6)$$

$$(\partial_{\dot\beta\alpha} - A_{\dot\beta\alpha})\xi^{\alpha} - m\eta_{\dot\beta} = 0$$

где спинорные индексы пробегают значения α ,= 1, 2 ; $\dot\beta$ = 1, 2.

Эти уравнения можно рассматривать как полевую теорию источников электромагнитного поля. Ток $j^{\alpha\dot\beta} = \xi^{\alpha}\xi^{\dot\beta} + \eta^{\alpha}\eta^{\dot\beta}$ является эрмитовой формой, составленной из спиноров ξ и η , описывающих источники электромагнитного поля. Дивергенция тока обращается в нуль, с одной стороны, в силу структуры уравнений Максвелла, с другой – в силу уравнений Дирака. Уравнения Максвелла-Дирака, однако, не обладают универсальностью в том смысле, что в них в качестве источников электромагнитного поля фигурируют только электроны и позитроны, а другие формы заряженной материи, также создающие электромагнитное поле, не учитываются.

В излагаемой теории источники гравитационного поля описываются тензорными и векторными полями $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(\alpha\beta)}{T}_{\gamma}$. Компоненты тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, являющиеся аналогом тока, суть квадратичные формы, составленные из полей $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$.

Уравнения Гаусса, как дифференциальные уравнения второго порядка относительно компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ являются аналогами уравнений Максвелла, а уравнения Кодацци и Риччи, описывающие движение источников гравитационного поля – аналогами уравнений Дирака. Аналог массы суть векторные поля $\overset{(\alpha\beta)}{T}_{\gamma}$, которые в отличие от массы m (взятой из опыта константы) являются наряду с $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ полевыми величинами и

определяются из уравнений ГКР. Поскольку тензор $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в нашем случае не может тождественно обращаться в нуль (пространство не должно быть эвклидовым), по крайней мере, один из миноров второго порядка матрицы $\langle\alpha|\overset{(A)}{H}|\beta\rangle$ не обращается тождественно в нуль. Мы будем поэтому рассматривать лишь тензоры $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$, обладающие этим свойством.

Тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет уравнениям Бианки, с одной стороны, в силу структуры уравнений Гаусса, а с другой – в силу уравнений Кодацци и Риччи. Таким образом, в излагаемой теории геометрические величины $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(A\beta)}{T}_{\gamma}$ интерпретируются как физические поля, описывающие источники гравитационного поля.

В отличие от уравнений Максвелла-Дирака уравнения ГКР обладают универсальностью в том смысле, что они описывают все без исключения источники гравитационного поля.

В теории тяготения геометрический тензор $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ в силу уравнений Эйнштейна получает физический смысл тензора энергии-импульса источников гравитационного поля. В излагаемой теории физический смысл получают поля $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(A\beta)}{T}_{\gamma}$ и, следовательно, выражающиеся через них компоненты тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ квадратично строится из полей $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} = e_A g_{\lambda\rho} \overset{(A)}{H}_{\alpha\beta} \overset{(A)}{H}_{\lambda\rho} - e_A g_{\sigma\tau} \overset{(A)}{H}_{\alpha\sigma} \overset{(A)}{H}_{\tau\beta} - \qquad (7)$$

$$- \frac{1}{2} e_A g_{\alpha\beta} \left(g_{\mu\sigma} g_{\lambda\rho} \overset{(A)}{H}_{\mu\sigma} \overset{(A)}{H}_{\lambda\rho} - g_{\mu\sigma} g_{\lambda\tau} \overset{(A)}{H}_{\mu\lambda} \overset{(A)}{H}_{\tau\sigma} \right).$$

Ковариантная расходимость этого тензора обращается в нуль в силу уравнений ГКР. Мы видим, что уравнения и величины, фигурирующие в теории тяготения получаются в результате свертывания соответствующих уравнений излагаемой теории. Таким образом, уравнения ГКР более детально описывают источники гравитационного поля, чем уравнения Эйнштейна. Отметим, что совокупность решений уравнений (1-3(шире, чем совокупность решений уравнений Эйнштейна. Последние выделяются из первых условиями (не -

равенствами), наложенными на компоненты тензора $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$.

II

В качестве иллюстрации мы рассмотрим сферически-симмет - ричные решения уравнений ГКР в 4-х мерном пространстве.

Отличные от нуля компоненты полей $g_{\alpha\beta}$, $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$ запишем следующим образом

$$g_{\alpha\beta}(r)=\begin{pmatrix}(1-e^{\nu(r)})n_s n_t-\delta_{st} & 0\\ 0 & e^{\mu(r)}\end{pmatrix} \qquad (8)$$

$$\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}(r)=\begin{pmatrix}\overset{(A)}{c}(r)n_s n_t-\overset{(A)}{d}(r)\delta_{st} & 0\\ 0 & \overset{(A)}{f}(r)\end{pmatrix} \qquad (9)$$

$$\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}(r)=(0,\,0,\,0,\,\overset{(A,B)}{T}_{4}(r)), \qquad (10)$$

где α, β, γ = 1,2,3,4 ; s, t = 1,2,3 ; A, B = 1, ..., p ;

$n_s=\frac{x_s}{r}$, $r=\sqrt{x_s x_s}$

После длинных выкладок уравнения ГКР принимают вид (см. приложение II).

$$\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)+\frac{1}{2r}\nu'=e_A\overset{(A)}{c}\overset{(A)}{d},$$

$$\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)=e_A\overset{(A)}{d}\overset{(A)}{d},$$

$$-\frac{1}{2}\mu''e^{\mu}-\frac{1}{4}\mu'^2e^{\mu}+\frac{1}{2}\mu'\frac{1}{r}e^{\mu-\nu}+\frac{1}{4}\mu'\nu'e^{\mu}=e_A\overset{(A)}{c}\overset{(A)}{f},$$

$$\frac{1}{2}\mu'\frac{1}{r}e^{\mu-\nu}=e_A\overset{(A)}{d}\overset{(A)}{f} \qquad (11)$$

$$\overset{(A)}{d}{}'+\frac{1}{r}\overset{(A)}{d}+(\overset{(A)}{c}-\overset{(A)}{d})\frac{1}{r}e^{-\nu}=0$$

$$e_B\overset{(A,B)}{T}_{4}\overset{(B)}{c}=0, \qquad e_B\overset{(A,B)}{T}_{4}\overset{(B)}{d}=0,$$

$$\overset{(A)}{f}{}'+\frac{1}{2}\mu'e^{\mu-\nu}(\overset{(A)}{c}-\overset{(A)}{d})-\frac{1}{2}\mu'\overset{(A)}{f}=0, \qquad (11)$$

$$\overset{(A,B)}{T}_{4}{}'=0$$

где штрих означает дифференцирование по r. Интересно отметить тот факт, что для сферически симметричных пространств векторные поля $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}(r)$ являются постоянными.

Решение этой системы дает сферически симметричную метрику $g_{\alpha\beta}(r)$ пространства класса p, а также поля $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$, $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$ создающие эту метрику.

Для пространства второго класса уравнения ГКР имеют следующий вид:

$$\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)+\frac{1}{2r}\nu'=e_1\overset{(1)}{c}\overset{(1)}{d}+e_2\overset{(2)}{c}\overset{(2)}{d},$$

$$\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)=e_1\overset{(1)}{d}{}^2+e_2\overset{(2)}{d}{}^2 \qquad (12)$$

$$-\frac{1}{2}\mu''e^{\mu}-\frac{1}{4}\mu'^2e^{\mu}+\frac{1}{2}\mu'\frac{1}{r}e^{\mu-\nu}+\frac{1}{4}\mu'\nu'e^{\mu}=e_1\overset{(1)}{c}\overset{(1)}{f}+e_2\overset{(2)}{c}\overset{(2)}{f}$$

$$\frac{1}{2}\mu'\frac{1}{r}e^{\mu-\nu}=e_1\overset{(1)}{d}\overset{(1)}{f}+e_2\overset{(2)}{d}\overset{(2)}{f}$$

$$\overset{(A)}{d}{}' + \frac{1}{r}\overset{(A)}{d} + \left(\overset{(A)}{c} - \overset{(A)}{d}\right)\frac{1}{r}e^{-\nu} = 0 \qquad (A=1,2)$$

$$\overset{(A)}{f}{}' + \frac{1}{2}\mu' e^{\mu-\nu}\left(\overset{(A)}{c} - \overset{(A)}{d}\right) - \frac{1}{2}\mu'\overset{(A)}{f} = 0 \qquad (A=1,2)$$

$$\overset{(1,2)}{T}\,\overset{(2)}{c} = 0, \quad \overset{(2,1)}{T}\,\overset{(1)}{c} = 0, \quad \overset{(1,2)}{T}\,\overset{(2)}{d} = 0, \quad \overset{(2,1)}{T}\,\overset{(1)}{d} = 0, \qquad (13)$$

$$\overset{(1,2)}{T} = -\overset{(2,1)}{T} = const.$$

Эта система имеет два различных решения

1) $T \neq 0$

Тогда $\overset{(1)}{c} = \overset{(2)}{c} = 0$, $\overset{(1)}{d} = \overset{(2)}{d} = 0$

$\mu' = 0$, $\nu = 0$, $\overset{(1)}{f} = \overset{(2)}{f} = const$.

Это решение соответствует эвклидовой метрике.

2) $T = 0$

Получаем систему восьми уравнений для восьми неизвестных функций $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$, $\mu(r)$, $\nu(r)$. Решение этой системы дает сферически симметричную метрику для пространства второго класса.

III

Рассмотрим подробнее случай метрики Шварцшильда, для которой функции $\mu(r)$ и $\nu(r)$ имеют следующий вид

$$\mu(r) = -\nu(r) = -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \qquad (\alpha = 2\varkappa m)$$

Система уравнений ГКР в этом случае является системой уравнений для определения шести неизвестных функций $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$, $(A = 1,2)$. Поскольку на бесконечности пространство Шварцшильда эвклидово, то при $r \to \infty$ функции $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$ должны обращаться в нуль.

Определим сигнатуру e_A $(A = 1,2)$ для пространства Шварцшильда. Как известно [1], [3] пространство Шварцшильда, для которого квадратичная форма ds^2 имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 + \left[\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}}\right)n_s n_t - \delta_{st}\right]dx^s dx^t$$

имеет метрику пространства второго класса. Действительно, если положить (при $r > \alpha$)

$$y^1 = \alpha\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\cos\frac{t}{\alpha}, \quad y^2 = \alpha\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}\sin\frac{t}{\alpha}, \quad y^3 = f(r)$$

$$y^4 = x^1, \quad y^5 = x^2, \quad y^6 = x^3$$

где функция $f(r)$ такова, что

$$\left(\frac{df}{dr}\right)^2 = \frac{1}{r - \alpha}\left(\frac{\alpha^4}{4r^3} + \alpha\right)$$

то ds^2 принимает вид

$$ds^2 = dy^{1\,2} + dy^{2\,2} - dy^{3\,2} - dy^{4\,2} - dy^{5\,2} - dy^{6\,2}$$

Таким образом, сигнатура e_A для пространства Шварцшильда имеет вид $e_1 = 1$, $e_2 = -1$.

Обращаемся к уравнению ГКР для пространства второго класса с сигнатурой $e_1 = 1$, $e_2 = -1$. Введем шесть неизвестных функций $c(r)$, $d(r)$, $f(r)$, $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi_3(r)$ связанных с $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$ и $\overset{(A)}{f}(r)$ следующими формулами

$$\overset{(1)}{c} = c\,sh\,\varphi_1, \quad \overset{(1)}{d} = d\,sh\,\varphi_2, \quad \overset{(1)}{f} = f\,ch\,\varphi_3, \qquad (14)$$

$$\overset{(2)}{c} = c\,ch\,\varphi_1, \quad \overset{(2)}{d} = d\,ch\,\varphi_2, \quad \overset{(2)}{f} = f\,sh\,\varphi_3,$$

Уравнения (12), (13) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{r^3} = d^2, \\
&\frac{\alpha}{r^3}\left(1+\frac{r}{2(r-\alpha)}\right) = cd\, ch(\varphi_2-\varphi_1), \\
&\frac{\alpha}{r^3}\left(1+\frac{r-\alpha}{2r}\right) = cf\, sh(\varphi_1-\varphi_3), \\
&\frac{\alpha}{r^3}\left(\frac{r-\alpha}{2r}\right) = df\, sh(\varphi_2-\varphi_3)
\end{aligned}\right\} \quad \text{/Гаусс/} \qquad (15)$$

$$d' sh\varphi_2 + d\, ch\varphi_2\cdot\varphi_2' + \frac{1}{r} d\, sh\varphi_2 + \frac{r-\alpha}{r^2}(c\, sh\varphi_1 - d\, sh\varphi_2) = 0,$$

/Кодацци/ (15)

$$d' ch\varphi_2 + d\, sh\varphi_2\cdot\varphi_2' + \frac{1}{r} d\, ch\varphi_2 + \frac{r-\alpha}{r^2}(c\, ch\varphi_1 - d\, ch\varphi_2) = 0,$$

$$f' ch\varphi_3 + f\, sh\varphi_3\cdot\varphi_3' + \frac{\alpha}{2}\frac{(r-\alpha)}{r^3}(c\, sh\varphi_1 - d\, sh\varphi_2) - \frac{\alpha}{2r(r-\alpha)} f\, ch\varphi_3 = 0,$$

$$f' sh\varphi_3 + f\, ch\varphi_3\cdot\varphi_3' + \frac{\alpha}{2}\frac{(r-\alpha)}{r^3}(c\cdot ch\varphi_1 - d\, ch\varphi_2) - \frac{\alpha}{2r(r-\alpha)} f\, sh\varphi_3 = 0$$

Обычным путем убеждаемся, что среди четырех уравнения Кодацци только три независимых, которые имеют вид

$$d\cdot\varphi_2' + \frac{r-\alpha}{r^2}\, c\cdot sh(\varphi_1-\varphi_2) = 0, \qquad (16)$$

$$f\cdot\varphi_3' + \frac{\alpha}{2}\frac{(r-\alpha)}{r^3}\left[c\cdot ch(\varphi_1-\varphi_3) - d\, ch(\varphi_2-\varphi_3)\right] = 0$$

(16)

$$f' + \frac{\alpha}{2}\frac{(r-\alpha)}{r^3}\left[c\cdot sh(\varphi_1-\varphi_3) - d\, sh(\varphi_2-\varphi_3)\right] - \frac{\alpha}{2r(r-\alpha)} f = 0$$

Решая последнее из уравнений Кодацци (16) относительно $f(r)$ и принимая во внимание третье и четвертое уравнения Гаусса (15), получаем, учитывая граничные условия

$$f(r) = \frac{\alpha}{2r^2}\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}$$

Таким образом, система уравнений Гаусса–Кодацци сводится к системе пяти уравнений для четырех неизвестных функций $c(r)$, $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi_3(r)$.

$$\begin{aligned}
&c\cdot ch(\varphi_2-\varphi_1) = \sqrt{\frac{\alpha}{r^3}}\,\frac{(3r-2\alpha)}{2(r-\alpha)}, \\
&c\cdot sh(\varphi_1-\varphi_3) = \frac{3r-\alpha}{r^2}\sqrt{\frac{r}{r-\alpha}}, \\
&sh(\varphi_2-\varphi_3) = \sqrt{\frac{r-\alpha}{\alpha}}, \\
&\varphi_2' + \frac{(r-\alpha)}{\sqrt{\alpha r}}\, c\cdot sh(\varphi_1-\varphi_2) = 0, \\
&\varphi_3' + \sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}\left[c\cdot ch(\varphi_1-\varphi_3) - \sqrt{\frac{\alpha}{r^3}}\, ch(\varphi_2-\varphi_3)\right] = 0
\end{aligned} \qquad (17)$$

Решение этой системы имеет вид

$$c^2(r) = -\frac{9}{2}\frac{\alpha}{r^2(r-\alpha)} - \frac{\alpha^2}{4r^2(r-\alpha)^2} - \frac{2\alpha}{r^4}(r-\alpha) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{r^3(r-\alpha)}\sqrt{302\tfrac{1}{2}-289\tfrac{3}{4}\frac{\alpha}{r}+160\frac{\alpha^2}{r^2}-50\frac{\alpha^3}{r^3}+4\frac{\alpha^4}{r^4}-147\tfrac{3}{8}\frac{r}{\alpha}+45\frac{r^2}{\alpha^2}-\frac{17}{8}\frac{r^2}{\alpha(r-\alpha)}}\,,$$

$$\varphi_1(r)=\int_\infty^r dr'\left(\frac{\sqrt{r'(r'-\alpha)}}{r'^2}-\sqrt{\frac{(3r'-\alpha)^2}{r'^4}+\frac{(r'-\alpha)}{r'}C^2(r')}\right)+$$

$$+\int_\infty^r dr'\left(\frac{\frac{(2\alpha-3r')}{r'}-\frac{(3r'-\alpha)\alpha}{4r'(r'-\alpha)}}{\sqrt{(3r'-\alpha)^2+(r'-\alpha)r'^3C^2(r')}}-\frac{C'(r')}{C(r')}\frac{(3r'-\alpha)}{\sqrt{(3r'-\alpha)^2+(r'-\alpha)r'^3C^2(r')}}\right), \tag{18}$$

$$\varphi_2(r)=\int_\infty^r dr'\sqrt{\frac{(3r'-2\alpha)^2}{4r'^4}-\frac{(r'-\alpha)^2}{\alpha r'}C^2(r')}$$

$$\varphi_3(r)=\int_\infty^r dr'\left(\frac{\sqrt{r(r'-\alpha)}}{r'^2}-\sqrt{\frac{(3r'-\alpha)^2}{r'^4}+\frac{(r'-\alpha)}{r'}C^2(r')}\right).$$

По формулам (14) находим $\overset{(A)}{C}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$.

Таким образом найдены поля $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$, создающие гравитационное поле с метрикой Шварцшильда.

Математическое приложение 1

Будем обозначать через $V_n(x_1,\dots,x_n)$ некоторое риманово пространство, а через $E_{n+p}(y_1,\dots,y_{n+p})$ – псевдоевклидово пространство, в которое при помощи формул $y^1=x^1,\dots,$ $y^n=x^n$, $y^{n+1}=y^{n+1}(x_1,\dots,x_n)$ $\dots$, $y^{n+p}=$ $=y^{n+p}(x_1,\dots,x_n),\dots$ влагается пространство $V_n(x)$.

В точке P пространства $E_{n+p}(y)$ можно построить

1/ касательное многообразие, натянутое на n векторов $\vec{e}_\alpha$ с координатами

$$\vec{e}_\alpha=\{e^k_\alpha\}=\left\{\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha}\right\}\qquad \begin{matrix}k=1,\dots,n+p\\ \alpha=1,\dots,n\end{matrix}$$

2/ нормальное многообразие, натянутое на p векторов $\vec{n}_A=$ $=\{n^k_A\}$, образующих ортонормированный базис

$$(\vec{n}_A,\vec{n}_B)=g(A,B)\,,\quad(\vec{n}_A,\vec{e}_\alpha)=0$$

$$(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=g_{\alpha\beta}\,,\qquad(A,B=1,\dots,p).$$

Дифференцируя предыдущие равенства по x^γ, имеем

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\gamma}\vec{e}_\beta+\vec{e}_\alpha\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial x^\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\neq 0,$$

$$\frac{\partial\vec{n}_A}{\partial x^\gamma}\vec{e}_\alpha+\vec{n}_A\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\gamma}=0,$$

$$\frac{\partial\vec{n}_A}{\partial x^\gamma}\vec{n}_B+\vec{n}_A\frac{\partial\vec{n}_B}{\partial x^\gamma}=0\,.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}+\Gamma_{\beta,\alpha\gamma}\neq 0,\quad \Gamma_{A,\beta\gamma}+\Gamma_{\beta,A\gamma}=0,\quad \Gamma_{A,B\gamma}+\Gamma_{B,A\gamma}=0$$

Вводим величины $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ и $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$ следующим образом

$$\Gamma_{A,\beta\gamma}=-\Gamma_{\beta,A\gamma}=\overset{(A)}{H}_{\beta\gamma}=\overset{(A)}{H}_{\gamma\beta} \tag{19}$$

$$\Gamma_{A,B\gamma}=-\Gamma_{B,A\gamma}=\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}=-\overset{(B,A)}{T}_{\gamma}$$

В $n+p$ - мерном эвклидовом пространстве тензор Римана обращается в нуль

$$R_{skem}(y)=\frac{\partial\Gamma_{s,km}}{\partial y^{e}}-\frac{\partial\Gamma_{s,ke}}{\partial y^{m}}+g^{pq}\left(\Gamma_{p,ke}\Gamma_{q,sm}-\Gamma_{p,km}\Gamma_{q,se}\right)$$

$$(s,k,e,m,p,q=1,\dots,n+p) \tag{20}$$

Из (20) имеем

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(y)=\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}}+g^{\sigma\tau}\big(\Gamma_{\sigma,\beta\gamma}\Gamma_{\tau,\alpha\delta}-$$

$$-\Gamma_{\sigma,\beta\delta}\Gamma_{\tau,\alpha\gamma}\big)+e_{A}\left(\Gamma_{A,\beta\gamma}\Gamma_{A,\alpha\delta}-\Gamma_{A,\beta\delta}\Gamma_{A,\alpha\gamma}\right)=0$$

$$(e_{A}=\pm 1\quad,\ \alpha,\beta,\gamma,\delta,\ \sigma,\tau=1,\dots,n)$$

Отсюда учитывая (19)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x)=e_{A}\left(\overset{(A)}{H}_{\alpha\gamma}\overset{(A)}{H}_{\beta\delta}-\overset{(A)}{H}_{\alpha\delta}\overset{(A)}{H}_{\beta\gamma}\right) \quad \text{/Гаусс/} \tag{21}$$

Из (21) получаем

$$R_{\alpha\gamma}=e_{A}\left(g_{\beta\delta}\overset{(A)}{H}_{\alpha\gamma}\overset{(A)}{H}_{\beta\delta}-g_{\beta\delta}\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}\overset{(A)}{H}_{\delta\gamma}\right),$$

$$R=e_{A}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\overset{(A)}{H}_{\alpha\gamma}\overset{(A)}{H}_{\beta\delta}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}\overset{(A)}{H}_{\delta\gamma}\right)$$

Из (20) имеем также

$$R_{A\beta\sigma\tau}(y)=\frac{\partial\Gamma_{A,\beta\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\Gamma_{A,\beta\sigma}}{\partial x^{\tau}}+g^{\gamma\delta}\big(\Gamma_{\gamma,\beta\sigma}\Gamma_{\delta,A\tau}-$$

$$-\Gamma_{\gamma,\beta\tau}\Gamma_{\delta,A\sigma}\big)+e_{B}\left(\Gamma_{B,\beta\sigma}\Gamma_{B,A\tau}-\Gamma_{B,\beta\tau}\Gamma_{B,A\sigma}\right)=0$$

Используя (19) получаем

$$\nabla_{\sigma}\overset{(A)}{H}_{\beta\tau}-\nabla_{\tau}\overset{(A)}{H}_{\beta\sigma}+e_{B}\left(\overset{(A,B)}{T}_{\sigma}\overset{(B)}{H}_{\beta\tau}-\overset{(A,B)}{T}_{\tau}\overset{(B)}{H}_{\beta\sigma}\right)=0 \quad \text{/Кодацци/}$$

Если ввести удлиненную производную

$$\overset{(A,B)}{S}_{\sigma}=\nabla_{\sigma}\delta(A,B)+\overset{(A,B)}{T}_{\sigma}$$

то уравнения Кодацци примут простой вид

$$e_{B}\left(\overset{(A,B)}{S}_{\sigma}\overset{(B)}{H}_{\beta\tau}-\overset{(A,B)}{S}_{\tau}\overset{(B)}{H}_{\beta\sigma}\right)=0$$

Наконец, поскольку

$$R_{AB\sigma\tau}(y)=\frac{\partial\Gamma_{A,B\tau}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\Gamma_{A,B\sigma}}{\partial x^{\tau}}+g^{\gamma\delta}\big(\Gamma_{\gamma,B\sigma}\Gamma_{\delta,A\tau}-$$

$$-\Gamma_{\gamma,B\tau}\Gamma_{\delta,A\sigma}) + e_C\left(\Gamma_{C,B\sigma}\Gamma_{C,A\tau} - \Gamma_{C,B\tau}\Gamma_{C,A\sigma}\right) = 0$$

имеем

$$\nabla_\sigma \overset{(A,B)}{T}_\tau - \nabla_\tau \overset{(A,B)}{T}_\sigma + e_C\left(\overset{(A,C)}{T}_\sigma \overset{(C,B)}{T}_\tau - \overset{(A,C)}{T}_\tau \overset{(C,B)}{T}_\sigma\right) -$$

$$- g^{\gamma\delta}\left(\overset{(A)}{H}_{\sigma\gamma}\overset{(B)}{H}_{\delta\tau} - \overset{(A)}{H}_{\tau\gamma}\overset{(B)}{H}_{\delta\sigma}\right) = 0 .$$

/Риччи/

В удлиненных производных уравнения Риччи имеют вид

$$e_C\left(\overset{(A,C)}{S}_\sigma \overset{(C,B)}{T}_\tau - \overset{(A,C)}{S}_\tau \overset{(C,B)}{T}_\sigma\right) - g^{\gamma\delta}\left(\overset{(A)}{H}_{\sigma\gamma}\overset{(B)}{H}_{\delta\tau} - \overset{(A)}{H}_{\tau\gamma}\overset{(B)}{H}_{\delta\sigma}\right) = 0$$

Приложение II

В сферически симметричном случае уравнения ГКР (1), (2), (3) принимают вид

$$R_{stpq} = e_A\left(\overset{(A)}{H}_{sp}\overset{(A)}{H}_{tq} - \overset{(A)}{H}_{sq}\overset{(A)}{H}_{tp}\right)$$

$$R_{s4p4} = e_A \overset{(A)}{H}_{sp}\overset{(A)}{H}_{44} \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \overset{(A)}{H}_{ps}}{\partial x^t} - \frac{\partial \overset{(A)}{H}_{pt}}{\partial x^s} + \Gamma^q_{ps}\overset{(A)}{H}_{qt} - \Gamma^q_{pt}\overset{(A)}{H}_{qs} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{(A)}{H}_{ps}}{\partial x^4} + e_C \overset{(A,C)}{T}_4 \overset{(C)}{H}_{ps} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \overset{(A)}{H}_{44}}{\partial x^p} + \Gamma^r_{44}\overset{(A)}{H}_{rp} - \Gamma^4_{4p}\overset{(A)}{H}_{44} = 0 ,$$

$$g^{rq}\left(\overset{(A)}{H}_{rs}\overset{(B)}{H}_{qp} - \overset{(A)}{H}_{rp}\overset{(B)}{H}_{qs}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overset{(A,B)}{T}_4}{\partial x^p} = 0$$

где p, s, t, r, q = 1, 2, 3.

Для символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma^s_{44} = \frac{1}{2}\mu' e^{\mu-\nu} n_s$$

$$\Gamma^4_{4s} = \frac{1}{2}\mu' n_s$$

$$\Gamma^t_{rs} = n_t\left[\frac{1-e^{\nu}}{r}\left(\delta_{rs} - n_r n_s\right) + \frac{1}{2}\nu' n_r n_s\right]$$

После несложных, но громоздких выкладок получаем выражения для компонент тензора Римана.

$$R_{stpq} = \left(\frac{1}{r^2}\left(e^{-\nu}-1\right) + \frac{1}{2r}\nu'\right)\left(\delta_{sq} n_t n_p + \delta_{tp} n_s n_q -\right.$$

$$\left. - \delta_{sp} n_t n_q - \delta_{tq} n_s n_p\right) + \frac{1}{r^2}\left(e^{-\nu}-1\right)\left(\delta_{sp}\delta_{tq} - \delta_{sq}\delta_{tp}\right) ,$$

$$R_{s4p4} = \left(-\frac12\mu'' e^{\mu} - \frac14\mu'^2 e^{\mu} + \frac12\mu'\frac1r e^{\mu-\nu} + \frac14\mu'\nu' e^{\mu}\right)n_s n_p - \frac12\mu'\frac1r e^{\mu-\nu}\delta_{sp}.$$

Далее, нетрудно показать, что уравнения (22) принимают вид

$$\left(\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)+\frac{1}{2r}\nu'\right)(\delta_{sq}n_t n_p+\delta_{tp}n_s n_q-\delta_{sp}n_t n_q-\delta_{tq}n_s n_p)+\frac{1}{r^2}(e^{-\nu}-1)(\delta_{sp}\delta_{tq}-\delta_{sq}\delta_{tp}) =$$

$$= e_A \overset{(A)}{c}\overset{(A)}{d}(\delta_{sq}n_t n_p+\delta_{tp}n_s n_q-\delta_{sp}n_t n_q-\delta_{tq}n_s n_p) + e_A\overset{(A)}{d}\overset{(A)}{d}(\delta_{sp}\delta_{tq}-\delta_{sq}\delta_{tp}),$$

$$\left[-\frac12\mu'' e^\mu-\frac14\mu'^2 e^\mu+\frac12\mu'\frac1r e^{\mu-\nu}+\frac14\mu'\nu' e^\mu\right]n_s n_p - \frac12\mu'\frac1r e^{\mu-\nu}\delta_{sp} = e_A\overset{(A)}{c}\overset{(A)}{f}n_s n_p - e_A\overset{(A)}{d}\overset{(A)}{f}\delta_{sp}$$

$$\left[\overset{(A)}{c}\frac1r+\overset{(A)}{d}{}'+(\overset{(A)}{d}-\overset{(A)}{c})\frac{(1-e^{-\nu})}{r}\right](n_s\delta_{pt}-n_t\delta_{ps})=0$$

$$\epsilon_B \overset{(A,B)}{T}(\overset{(B)}{c}n_p n_s - \overset{(B)}{d}\delta_{ps})=0$$

$$\left(\overset{(A)}{f}{}' + \frac12\mu' e^{\mu-\nu}(\overset{(A)}{c}-\overset{(A)}{d}) - \frac12\mu'\overset{(A)}{f}\right)n_p=0$$

$$\frac{\partial \overset{(A,B)}{T}}{\partial r}\, n_p = 0$$

В результате очевидных упрощений получаем уравнения (11).

Приложение III

Рассмотрим подробнее решение системы уравнений (17).

Подставляем в последние два уравнения выражение для $c(r)$ из первых двух и, учитывая, что $th\,x = \sqrt{1-\frac{1}{ch^2 x}}$ и $cth\,x = \sqrt{1+\frac{1}{sh^2 x}}$, получаем

$$\varphi_2' - \sqrt{\frac{(3r-2\alpha)^2}{4r^4} - \frac{(r-\alpha)^2}{\alpha r}c^2(r)} = 0 \qquad (23)$$

$$\varphi_3' + \sqrt{\frac{(3r-\alpha)^2}{r^4}+\frac{(r-\alpha)}{r}c^2(r)} - \frac{\sqrt{r(r-\alpha)}}{r^2}=0$$

Дифференцируя третье уравнение (17) по r имеем

$$ch(\varphi_2-\varphi_3)(\varphi_2'-\varphi_3') = \frac{1}{2\sqrt{(r-\alpha)\alpha}}$$

что эквивалентно

$$\varphi_2'-\varphi_3' = \frac12\frac{1}{\sqrt{r(r-\alpha)}}. \qquad (24)$$

Далее, вычитая из первого уравнения (23) второе и сравнивая с (24), получаем

$$\sqrt{\frac{(3r-\alpha)^2}{r^4}+\frac{(r-\alpha)}{r}c^2(r)} + \sqrt{\frac{(3r-2\alpha)^2}{4r^4}-\frac{(r-\alpha)^2}{\alpha r}c^2(r)} =$$

$$= \frac{\sqrt{r(r-\alpha)}}{r^2} - \frac12\frac{1}{\sqrt{r(r-\alpha)}}$$

Решая это уравнение относительно $c^2(z)$ получаем выражение для $c^2(z)$, приведенное в (18). Подставляя значения $c^2(z)$ в (23), получаем $\varphi_2(z)$ и $\varphi_3(z)$. Значение $\varphi_1(z)$ можно получить, например, из второго уравнения (17).

Литература

[1] Л.П.Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948.

[2] М.Ш.Якупов, ДАН, 180, № 5, 1096 (1968).

[3] Y. Rosen, Rev, Mod. Phys., 37, 204 (1965).

Abstract

A field theory of sources of gravitation is proposed in which the system of equations (Gauss, Codazzi, Ricci (1-3)) of the embeding theory of Riemann spaces gets a physical meaning.

We note that in these equations the tensors $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ are represented as a quadratic form of a set of p new tensors $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ where $A=1,\dots,p$ and $0 < p \leq \frac{n(n-1)}{2}$. The set of tensors $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ and vectors $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$ satisfy a system of covariant differential equations of the first order. As a consequence of these equations the Bianchi identity (4) is fulfilled.

The situation is very similar to that of the joint Maxwell-Dirac equations (5-6) where $A^{\alpha\beta}$ is the spintensor of electromagnetic field. Two spinors ξ, η describe the electron-positron field which appears as a source of electromagnetic field. The constant mass m plays the role of the set of vectors $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$ in (1-3).

To illustrate the theory we consider the spherically-symmetric solutions of the equations (1-3) in the four-dimensional space. Putting (8-10) in (1-3) we obtain finally (11) - a system of equations which determines eight functions of r : $\mu(r)$, $\nu(r)$, $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$ $(A=1,2)$.

It is interesting to note that in the case of spherically-symmetric solutions the vectors $\overset{(A,B)}{T}_{\gamma}$

are constants.

In the case of Schwarzschild metric the functions $\mu(r)$ and $\nu(r)$ have the form: $\mu(r) = -\nu(r) = -\ln(1-\frac{\alpha}{r})$ one can show that in this case the metric is the metric of the second class, i.e. only two tensors $\overset{(A)}{H}_{\alpha\beta}$ (A=1,2) appear in (1-3). In this case the equations can be solved and the expressions for six functions $\overset{(A)}{c}(r)$, $\overset{(A)}{d}(r)$, $\overset{(A)}{f}(r)$ are found (see (8)).

Ответственный за выпуск Б.Г.Конопельченко
Подписано к печати 23.2.72. МН 10164
Усл. 1,0 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ № 12 . ПРЕПРИНТ
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.