1

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 1 - 72

В.С.Львов, А.М.Рубенчик

ДИНАМИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН, ИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ

Новосибирск

1972

В.С.Львов, А.М.Рубенчик

ДИНАМИЧЕСКИЕ ДОМЕНЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН, ИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается нелинейное поведение пары волн при параметрическом возбуждении. Показано, что её амплитуда и фаза хаотически промодулированы в поперечном направлении. Определен характерный масштаб модуляций, который много больше длины волны и характерная частота, которая по порядку величины совпадает с инкрементом параметрической неустойчивости. Амплитуда модуляций не может существенно превышать амплитуду пары. Глубокие поперечные модуляции пары неустойчивы относительно образования нитей, внутри которых амплитуда весьма велика и ограничивается нелинейным затуханием. В этой области происходит очень быстрая диссипация энергии. Это явление аналогично образованию фокусов при самофокусировке света в диэлектриках и является механизмом, ограничивающим амплитуду модуляций.

При параметрическом возбуждении спиновых волн в ферромагнетиках /1/ их амплитуда часто становится такой, что поведение системы целиком определяется взаимодействием волн между собой. Физические явления, возникающие при этом весьма разнообразны,чем объясняется как интерес к этой проблеме, так и трудности,возникающие при её изучении. В работах /2-4/ изучалась ситуация, когда порог параметрической неустойчивости минимален для пар волн с векторами , заполняющую линию или поверхность в k -пространстве. При этом сумма фаз в паре является динамической переменной, а индивидуальные фазы волн с хорошей точностью хаотизированы. Это позволило упростить гамильтониан взаимодействия до вида,диагонального по парам волн, то-есть существенно упростить проблему /3/. Эффекты, связанные со слабой корреляцией индивидуальных фаз оказалось возможным учесть по теории возмущений /5/.

В настоящей работе изучается ситуация, когда порог возбуждения минимален для единственной пары $\pm k_0$; например при параллельной накачке в одноосных ферромагнетиках с анизотропией типа "легкая плоскость". Принципиальной особенностью задачи является узость возбуждаемых в k-пространстве пакетов волн. С одной стороны это не позволяет пользоваться статистическим описанием,как в /3/, с другой стороны делает возможным упростить точный гамильтониан взаимодействия по другому параметру - узости пакета. Для этого задачу необходимо сформировать на языке волн огибающих,что проделано в §1. На начальной стадии развития параметрической неустойчивости возбуждается монохроматическая стоячая волна $\pm k_0$, являющаяся одним из стационарных решений уравнений (4) для волн огибающих. Такое состояние практически всегда неустойчиво по отношению к процессам взаимодействия волн типа

$$2\omega_{k_0} = \omega_{k_0+\varkappa} + \omega_{k_0-\varkappa}, \quad \omega_{k_0} + \omega_{-k_0} = \omega_{k_0+\varkappa} + \omega_{-k_0-\varkappa}$$

В ряде важных случаев инкремент неустойчивости положителен только для направлений почти перпендикулярных k_0 /6/ и можно показать, что фазы и амплитуды волн огибающих равны между собой даже на нелинейной стадии. Пользуясь этим в §2 произведено дальнейшее упрощение задачи и получены двумерные уравнения (4) для амплитуды и фазы огибающей пары. Естественно ожидать, что в результате развития неустойчивости система перейдет в новое ста – ционарное состояние. Такие состояния излучаются в §3 как правило, это периодическое изменение в пространстве амплитуды и фазы пары, мы их называем доменами.

Исследование, проведенное в §4, дает основания полагать, что все домены неустойчивы, с инкрементом большим, чем у плоской волны. Поэтому запороговое поведение системы носит существенно нестационарный характер. В пятом параграфе рассматривается начальная нелинейная стадия неустойчивости плоской волны, причем особое внимание уделяется случаю, когда инкремент аномально мал. Он интересен тем, нелинейное взаимодействие начинает играть роль при весьма малых амплитудах. Оказалось, что оно не ограничивает рост начального возмущения, а лишь сильно замедляет его. Амплитуда его при этом растет как $\sqrt{t}$. В результате образуется узкий в k пространстве пакет волн с $\varkappa \sim \varkappa_0 \ll k_0$ (см.(6)) и $\Delta \varkappa \sim \varkappa_0$, с характерным временем движения порядка обратного инкремента параметрической неустойчивости. Такое состояние является сильно турбулентным, причем амплитуда пульсаций не может быть слишком велика. Причиной этого является предложенный в §6 механизм ограничения амплитуды, связанный с быстрым "коллапсированием" мощных пульсаций, аналогично тому, как это происходит при самофокусировке света /7/. Средний уровень возбуждения спиновых волн при этом по порядку величины совпадает с тем, который следует из диагонального гамильтониана.

§ 1. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд

Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H = \sum_k \omega_k a_k a_k^* + H_p + H_{int} \qquad (1)$$

где H_p описывает взаимодействие спиновых волн с переменным магнитным полем (накачкой) $h(r,t) = h\exp -i\omega_p t$:

$$H_p = \frac{1}{2}\sum_k \left[h V_k a_k^* a_{-k}^* + k.c. \right]$$

а H_{int} – описывает взаимодействие волн между собой

$$H_{int} = \frac{1}{2}\sum_{12,34} T_{12,34}\, a_1^* a_2^* a_3 a_4\, \Delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)$$

Здесь канонические переменные a_k суть комплексные амплитуды бегущих спиновых волн, связанные преобразованиями типа Гольдштейна – Примакова /8,10/ с намагниченностью M_k ферро – магнетика, ω_k –закон дисперсии волн; матричные элементы $T_{12,34}$ можно вычислить для конкретных моделей ферромагнетика /9/ , /10/.

В уравнения движения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_k\right) a_k = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*}$$

феноменологически введен параметр затухания γ_k. В случае, когда в k –пространстве возбуждены узкие пакеты

$$a_k = \left[A(k - k_0) + B(k + k_0) \right] \exp -i\omega_p t/2$$

Отсюда обычным образом /9/ можно получить уравнение для огибающих $A(r)$, $B(r)$ – фурье компонент $A(\varkappa)$ и $B(\varkappa)$:

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\vec{\nabla}\right) + \frac{1}{2}\hat{L} \right] A = -i\gamma A + hVB^* + \left[\omega_{k_0} - \omega_p/2 + T|A|^2 + 2S|B|^2\right] A \qquad (2)$$

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t}-\vec V\vec\nabla\right)+\frac{\hat L}{2}\right]B=-i\gamma B+hVA^*+\left[\omega_{k_0}-\omega_p/2+T|B|^2+2S|A|^2\right]B$$

где $\vec V=\frac{\partial\omega}{\partial k}$, $\hat L=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}$

$T=T_{k_0k_0k_0k_0}$, $S=T_{k_0,-k_0,k_0,-k_0}$

В консервативной среде без накачки ($\gamma=0$, $hV=0$, $B=0$) уравнение для $A(z)$ применялось ранее в задачах об устойчивости электромагнитных волн в диэлектрике, /7/, плазме и волн на поверхности жидкости /11/. Близкие к (5) уравнения были получены и исследованы в работе /9/

От комплексных переменных A , B удобно перейти к вещественным - амплитуда фаза $A=\tilde A\exp{-i\phi}$, $B=\tilde B\exp{-i\psi}$ и затем, учитывая симметрию задачи к переменным $\sqrt2 A_\pm=\tilde A\pm\tilde B$, $\Phi_\pm=\phi\pm\psi$, для которых

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\gamma\mp hV\sin\Phi_+\right]A_\pm+\vec V\vec\nabla A_\mp-\frac{\partial^2\omega}{2\partial k_\alpha\partial k_\beta}\left[\frac12\left(A_+\frac{\partial^2\Phi_\pm}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+A_-\frac{\partial^2\Phi_\mp}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)+\left(\frac{\partial A_+}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Phi_\pm}{\partial x_\beta}+\frac{\partial A_-}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Phi_\mp}{\partial x_\beta}\right)\right]=0$$

$$-\frac{\partial\Phi_+}{\partial t}+2\omega_k-\omega_p+(2S+T)(A_+^2+A_-^2)+2hV\cos\Phi_+\frac{A_+^2+A_-^2}{A_+^2-A_-^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\left[\frac14\left(\frac{\partial\Phi_+}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Phi_+}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\Phi_-}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\Phi_-}{\partial x_\beta}\right)+\frac{1}{A_+^2-A_-^2}\left(A_-\frac{\partial^2A_-}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-A_+\frac{\partial^2A_+}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\right]=0$$

$$-\frac{\partial\Phi_-}{\partial t}+2(2S-T)A_+A_-+4hV\cos\Phi_+\frac{A_+A_-}{A_+^2-A_-^2}+\frac{\partial^2\omega}{2\partial k_\alpha\partial k_\beta}\left[\frac{\partial\Phi_+}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{2}{A_+^2-A_-^2}\left(A_+\frac{\partial^2A_-}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-A_-\frac{\partial^2A_+}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)\right]=0$$

§ 2. Основная модель

Полученные в предыдущем параграфе уравнения (3), имеют травиальное решение $A=B=A_0/\sqrt2$, $\sin\Phi_+=\gamma/hV$ $\Phi_-=0$, соответствующее возбуждению стоячей спиновой волны, $\pm K_0$. Устойчивость такого решения подробно исследована в /6/. Показано, что плоская волна практически всегда неустойчива относительно нарастания модуляций амплитуд и фаз волн огибающих. Характер развития неустойчивости существенно зависит от параметров гамильтониана (1). За исключением случая $T>0$, $S>0$, который мы в дальнейшем обсуждать не будем, инкремент неустойчивости максимален на поверхности $\vec{\varkappa}\perp\vec V$ и при удалении от нее быстро меняет знак. Это приводит к тому, что наиболее существенные черты нелинейной стадии развития неустойчивости описываются уравнениями однородными в направлении $\partial\omega/\partial\vec{k}=\vec{V}$. В одном важном случае $T>0$, $S<0$ можно произвести дальнейшее упрощение уравнений. При этом уравнения для A_- и Φ_- по-прежнему, имеют тривиальное решение $A_- = \Phi_- = 0$, которое как можно убедиться, исходя из уравнений (3), сохраняет свою устойчивость при существенных движениях в системе A_+, Φ_+. Ограничиваясь для простоты случаем, когда $\omega''>0$ положительно, можно путем изменения масштабов преобразовать уравнения для A_+, Φ_+ к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\gamma-2hV\sin\Phi\right)A^2-\nabla\left(A^2\nabla\Phi\right)=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-2hV\cos\Phi+TA_0^2-FA^2+2\frac{\Delta A}{A}-\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2=0$$

$$F=2S+T$$

[3]

Здесь мы определили ω_{k_0} условием внешней устойчивости

$$\omega_{k_0}-\omega_p/2+TA_0^2/2=0$$

Этим выбирается наиболее устойчивая стоячая волна, для которой, как показано в /6/ область положительного инкремента в K-пространстве ограничена ($\varkappa \ll k_0$). Здес и ниже индексы + у переменных A и Φ опущены. Изучение нелинейной стадии развития неустойчивости плоской стоячей волны в дальнейшем будет проводиться в рамках сформулированных здесь уравнений (4).

§ 3. Стационарные домены

Простейшим вариантом нелинейного поведения системы является её переход к стационарное состояние отличное от плоской стоячей волны $A=const$, $\Phi=const$. Поэтому в этом параграфе мы изучим стационарные решения основных уравнений (4). Как правило, эти решения представляют собой периодические изменения амплитуды $A(r)$ и фазы $\Phi(r)$ и естественно их называть доменами.

Наиболее просто исследовать домены с постоянной фазой $\Phi(r)=\Phi_0$. Из (4)

$$hV\sin\Phi_0=\gamma$$

а для $A(r)$ имеем уравнение

$$\Delta A = A\left[hV\cos\Phi_0-\frac{TA_0^2}{2}+FA^2\right]$$

где A_0 следует понимать как начальную амплитуду пары. Учитывая, что $hV\cos\Phi_0+SA_0^2=0$ запишем его в виде

$$\Delta A=-dU/dA \qquad (5)$$

Для плоских доменов $A(x)$ это уравнение описывает движение нелинейного осцилятора с координатой A в потенциальном поле $U(A)=FA^2(2A_0^2-A^2)/8$, где x играет роль времени. Поведение решения характеризуется "энергией" осцилятора. Наиболее интересен случай $F<0$, так как при этом существуют решения мало отличающиеся от плоской волны. Они реализуются при E близких к $E_{min}=FA_0^2/8$ и представляют собой слабо промодулированную плоскую волну $A(x)=A_0+A_1\cos\varkappa_0 x$, где $\varkappa_0^2=-FA_0^2$. Такие решения ($A_1\ll A_0$) мы будем называть мелкими доменами. С ростом энергии амплитуда и период колебаний растут и при $E=0$

$$A(x)=\sqrt{2}A_0\,\mathrm{ch}^{-1}(x\varkappa_0/\sqrt{2})$$

переходит в уединенную волну, которая является аналогом плоского самофокусированного пучка света в нелинейной среде /7/. При $E>0$ решение восстанавливает свою периодическую структуру, но теперь изменяется в симметричных относительно нуля пределах.

Мелкие домены с переменной фазой

$$\phi(r) = \phi_0 + \phi_1 \cos \vec{\varkappa}\vec{r}, \quad A(r) = A_0 + A_1 \cos \vec{\varkappa}\vec{r}$$

как это следует из (4), имеют размер

$$|\varkappa|^2 = \varkappa_1^2 = -2SA_0^2 \quad \text{и} \quad \gamma\phi_1 = TA_0A_1$$

Подчеркнем то очевидное обстоятельство, что характерные размеры $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ мелких доменов соответствуют тем $\varkappa$, для которых инкремент плоской волны /6/

$$(\nu+\gamma)^2 - \gamma^2 = \frac{1}{2}(\varkappa^2 - \varkappa_0^2)(\varkappa^2 - \varkappa_1^2) \qquad (6)$$

где $\varkappa_0^2 = -(2S+T)A_0^2$.

При изучении очень глубоких доменов с переменной фазой, когда в (4) можно пренебречь затуханием и накачкой, мы вновь приходим к уравнению (5) с потенциалом

$$U = -\frac{FA^4}{8} + \frac{\alpha^2}{2A^2}$$

где α -произвольная постоянная. Существуют также глубокие домены, двигающиеся с постоянной скоростью v, при этом к потенциалу глубоких доменов добавляется член $v^2A^2/8$.

§ 4. Неустойчивость стационарных доменов

1. Рассмотрим устойчивость стационарных доменов $A(r)$, $\phi(r)$ относительно малых возмущений $\delta A = a(r,t)$, $\delta\phi(r,t) = -2b(r,t)/A(r)$. Линеаризуя для этого уравнения (4) на фоне стационарных решений $A(r)$, $\phi(r)$ этих уравнений, получим

$$L_{11}a + L_{12}b = -\frac{\partial a}{\partial t} \qquad (7)$$

$$L_{21}a + L_{22}b = \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma\right)b$$

где операторы L_{ik} имеют вид:

$$L_{11} = (\nabla\phi)\left[\left(\frac{\nabla A}{A}\right) - \nabla\right]$$

$$L_{22} = (\nabla\phi)\left[\left(\frac{\nabla A}{A}\right)\right] + (\Delta\phi)$$

$$L_{12} = \left[\Delta - \left(\frac{\Delta A}{A}\right)\right] + 2hV\cos\phi$$

$$L_{21} = \left[\Delta - \left(\frac{\Delta A}{A}\right)\right] - FA^2$$

2. Исследуем вначале домены с постоянной фазой, для которых $L_{11} = L_{22} = 0$. Предполагая $a, b \sim \exp\nu t$, получим

$$L_{12}L_{21}a = -\nu(2\gamma+\nu)a$$

и задача об устойчивости доменов с $\Phi = const$ сводится к исследованию спектра оператора $L = L_{12} L_{21}$:

$$La = \Gamma a$$

Неустойчивости соответствуют отрицательные значения Γ

$$\nu = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Gamma}$$

Для исследования устойчивости мелких доменов

$$A(x) = A_0 + \varepsilon A_1 \cos \varkappa_0 x + \varepsilon^2 \bar{A}_0 + \varepsilon^2 A_2 \cos 2\varkappa_0 x$$

можно воспользоваться теорией возмущений, представив для этого L, ν и a в виде рядов по малому параметру ε. Поправка первого порядка к инкременту ν равна 0 для всех $\varkappa$, кроме $\varkappa = 2\varkappa_0$, при котором система обладает большим запасом устойчивости. Поправка второго порядка по ε положительна и при $\varkappa^2 - \varkappa_0^2 \ll \varkappa_0^2, \varkappa \neq \varkappa_0$ имеет вид

$$\nu_2(\varkappa) = 3 T A_1^2 \varkappa_1^2$$

Заметим, что в силу трансляционной инвариантности задачи $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial A/\partial x$ являются собственными функциями (7) с собственным значением ноль, то есть $\nu_2(\varkappa_0) = 0$. Специфический вид $\nu_2(\varkappa)$ обусловлен бесконечностью системы и тем, что возмущения с $\varkappa = \varkappa_0$ являются резонансными. Полученный результат показывает, что мелкий домен более неустойчив, чем плоская волна. При дальнейшем отклонении от амплитуды плоской волны "энергия" E характеризующая домен увеличивается, амплитуда решения растет и расстояние между максимумами становится все больше. В таких доменах с большой скважностью имеются значительные области пространства, где амплитуда спиновых волн близка к нулю. Эти области неустойчивы относительно обычного параметрического возбуждения волн с инкрементом $hV - \gamma$.

Рассматривая устойчивость "глубоких" доменов с $E > 0$, заметим, что в операторе

$$L_{12} = \Delta + \frac{F}{2}(A^2 + A_0^2) - TA_0^2 = \frac{1}{A}\,\mathrm{div}\, A^2\, \mathrm{grad}\frac{1}{A} + SA_0^2$$

при больших значениях энергии можно пренебречь SA_0^2 и $-L_{12}$ становится положительно определенным.

В этом случае, аналогично /13/, можно сформулировать вариационный принцип: минимальное значение Γ дается минимумом функционала

$$M = \frac{\langle\psi|L_{21}|\psi\rangle}{\langle\psi|-L_{12}^{-1}|\psi\rangle}$$

Для доказательства неустойчивости достаточно показать, что M может принимать отрицательные значения.

Поскольку $\langle 1|-L_{12}^{-1}|1\rangle \geq 0$, для этого достаточно доказать, что у оператора L_{21} имеются отрицательные собственные значения. Оператор L_{21} – Шредингеровского типа. Производная от A по любому направлению является собственной функцией L_{21} с собственным значением ноль.

Минимальное собственное значение должно быть невырожденным, а дифференцировать можно по разным направлениям. Следовательно, в двумерном случае ноль не может быть минимальным собственным значением.

В одномерном случае $\partial A/\partial x$ не может быть собственной функцией основного состояния так как имеет нули в точках экстремума амплитуды.

Наши рассуждения верны только в том случае, когда функция придающая $\langle 1| L_{21}|1\rangle$ отрицательные значения ортоганальна нулевой функции оператора L_{12}. Для доказательства этого факта заметим, что собственные функции оператора Шредингера с периодическим потенциалом могут быть записаны в виде $\psi = \exp ikz \cdot u_k(z)$

Спектр собственных значений λ_k образует зоны, внутри которых λ_k меняется непрерывно, отделенные друг от друга запрещенными промежутками, причем $k=0$ соответствует границе зоны. Из того, что $\langle L_{21}\rangle$ может быть отрицательным следует существование зоны лежащей ниже нуля. Ясно, что из этой зоны всегда можно выбрать собственное значение собственная функция которого будет ортогональна нулевой функцией L_{21}.

Оценка инкремента легко видна из размерностных соображений. Единственный параметр характеризующий глубокие домены это их максимальная амплитуда.

Поэтому

$$\Gamma \sim |FA^2_{max}|^2 \sim |FE|$$

3. Изучение неустойчивости доменов проведем в случае мелких доменов, когда малый параметр $\varepsilon = A_1/A_0$ позволяет сформулировать теорию возмущений. В нулевом порядке по ε инкремент ν мелких доменов естественно совпадает с инкрементом ν_0 плоской волны (6). Плоская волна наиболее устойчива в случае $T \ll S$, её максимальный инкремент

$$\nu_0^2 + 2\gamma\nu_0 = T^2A_0^4/4$$

при этом много меньше, чем характерный инкремент $S^2A_0^4$ задачи. Именно в этом случае ($T \ll S$) можно надеяться, что домены с переменной фазой будут устойчивыми. Для простоты мы ограничимся также случаем малых превышений $h-\gamma \ll \gamma$. Очевидно, что в противном случае неустойчивость доментов может лишь усугубиться.

В этом приближении задача (7) на собственные значения имеет вид

$$Ma = \nu a$$

где

$$M = -(L_{11} + L_{12}L_{21}/2\gamma)$$

Используя теорию возмущений, имеем для максимального инкремента

$$\nu_{max} = TA_0^2(TA_0^2 + |S|A_1^2)/4\gamma$$

Откуда видно, что поправка ν_2 к инкременту ν_0 имеет тот же знак, то есть мелкий домен более неустойчив чем плоская волна. Отметим также, что в пределах применимости теории возмущений $A_1 \ll A_0$ поправка ν_2 к инкременту может стать больше, чем инкремент ν_0 в нулевом приближении.

Выражение (33) позволяет считать, что инкремент неустойчивости глубоких доменов ($A_1 \sim A_0$) с переменной фазой порядка $S^2A_0^4$, т.е. одного порядка с инкрементом неустойчивости доменов с постоянной фазой.

Таким образом, результаты этого параграфа дают основания полагать, что все стационарные состояния неустойчивы и описание поведения узкого пакета волн за порогом параметрического возбуждения является существенно нестационарной задачей.

§ 5. Начальная нелинейная стадия развития неустойчивости плоской волны

Здесь мы ограничимся случаем малых превышений, когда уравнения (4) упрощаются до вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\phi^2 - \varkappa_1^2\phi\right)A^2 - \nabla(A^2\nabla\phi) = 0 \quad (8)$$

$$2\Delta A/A + \varkappa_0^2(A^2 - A_0^2) + 2\gamma\phi = 0$$

где ϕ отсчитывается от равновесной фазы ϕ_0. При развитии неустойчивости плоской волны в начале возбужден узкий пакет волн в точке $\varkappa^2 = (\varkappa_0^2 + \varkappa_1^2)/2$ соответствующей максимуму инкремента (6) плоской волны.

Нелинейность задачи приводит к тому, что возникают вынужденные "биения" в областях затухания с кратными длинами волн.

На начальной нелинейной стадии можно учитывать только ближайшие гармоники с $\varkappa$ вблизи $0, \pm 2\varkappa$, то-есть искать решение (8) в виде

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1^+ \cos\varkappa x + \varphi_1^- \sin\varkappa x + \varphi_2^+ \cos 2\varkappa x + \varphi_2^- \sin 2\varkappa x$$

$$A(x) = A_0\left[1 + a_0 + a_1^+ \cos\varkappa x + a_1^- \sin\varkappa x + a_2^+ \cos 2\varkappa x + a_2^- \sin 2\varkappa x\right] \qquad (9)$$

где $\varphi_0, \varphi_1^\pm$ и т.д. меняются мало на расстояниях порядка $1/\varkappa$. Для этих функций в приближении $T \ll S$ имеем систему нелинейных уравнений:

$$2\dot a_0 = \varkappa_1^2 \varphi_0$$

$$2\dot a_2^\pm = -3\varkappa_1^2 \varphi_2^\pm$$

$$2\dot a_1^\pm = \frac{1}{2} T A_0^2 \varphi_1^\pm + \varkappa_1 \partial\varphi_1^\mp/\partial x + \varkappa_1^2\left[\varphi_0 a_1^\pm + \frac{1}{2}\left(\varphi_2^\pm a_1^\pm + \varphi_2^\mp a_1^-\right)\right] \qquad (10)$$

$$-2\gamma\varphi_0 = \varkappa_1^2\left[2a_0 + \frac{3}{2} a_1^{+2} + \frac{3}{2} a_1^{-2}\right]$$

$$-2\gamma\varphi_2^+ = \varkappa_1^2\left[-6a_2^+ + \frac{3}{2}\left(a_1^{+2} - a_1^{-2}\right)\right]$$

$$-2\gamma\varphi_2^- = \varkappa_1^2\left[-6a_2^- + 3a_1^+ a_1^-\right]$$

$$-2\gamma\varphi_1^\pm = -TA_0^2 a_1^\pm \pm 2\varkappa_1 \frac{\partial a_1^\mp}{\partial x}$$

Видно, что начальные градиенты функций $a(x), \varphi(x)$ в линейном режиме уменьшаются и далее можно считать a и φ зависящими только от t. Это естественно, так как наш выбор соответствует максимуму линейного инкремента. Экспоненциальный рост в линейном режиме $a, \varphi \sim \exp \nu_m t$, $\nu_m = T^2 A_0^4/\gamma$ происходит до амплитуд $a_1 \sim \sqrt{t}$. Дальнейший рост тормозится нелинейными эффектами и можно показать, что решение (10) выходит на асимптотику

$$a_2^+ \to 0, \quad \varphi_2^+ \to 0 \qquad (11)$$

$$-\frac{3}{2} a_0 = 2a_2^- = a_1^{+2} = a_1^{-2} = \frac{19}{6}\nu_m t$$

Такой медленный рост $a_1 \sim \sqrt{t}$ продолжается до амплитуд a_1 порядка $\sqrt{T/S}$. Далее в (10) нужно учитывать дополнительные члены, которые приводят к увеличению скорости роста, однако соотношения (11) между коэффициентами гармоник остаются верными вплоть до амплитуд порядка 1. При этом уже не происходит компенсация нелинейных членов, приводящая к увеличению ха -

рактерного времени в $(S/T)^{+2}$ раз, которое теперь становится равным $\gamma/S^2A_0^4$. Кроме того, происходит возбуждение гармоник и уширение спектра по $\varkappa$. При $T\sim S$ система приходит от плоской волны к такому состоянию гораздо быстрее, так как амплитуды растут экспоненциально ($\exp S^2A_0^4t/\gamma$) вплоть до $a_1\sim 1$.

Отметим, что уширение спектра в пределах первой гармоники (т.е. в области положительности линейного инкремента при $T\sim S$) препятствует эффективному возбуждению следующих гармоник, так как вынуждающая сила с ростом Δk быстро уменьшается вследствие стохастизации индивидуальных фаз. Это приводит к тому, что ширина возбужденноц области Δk может лишь в несколько раз превосходить ширину области положительности инкремента $\sqrt{\omega''^{-1}SA_0^2}$. Этот результат находится в соответствии с тем, что при $\omega''(\Delta k)^2\gg SA_0^2$, когда фазы стохастированы, применима теория, основанная на диагонализации, которая предсказывает сужение пакета в точку. Таким образом, развитие неустойчивости плоской волны приводит к сильной турбулентности (даже при $T\ll S$) с характерной частотой движения $(SA_0^2)^2/\gamma\simeq W-\gamma$ и характерным масштабом в координатном пространстве $\sqrt{\omega''/SA_0^2}$. На языке волн огибающих можно сказать, что возникает динамическая доменная структура с длиной когерентности порядка размеров доменов, то-есть $A_0\sqrt{\omega''/S}$, которая существенно меняется в пространстве за время $1/(W-\gamma)$.

§ 6. Разрушение волн большой амплитуды

В тех областях доменной структуры, где амплитуда А в процессе турбулентного движения оказалась аномально большой $A\gg A_0$ в уравнениях движения можно пренебречь затуханием и накачкой, так как за характерное время задачи $1/SA^2$ система не успеет существенно обменяться энергией с термостатом и накачкой.

В приближении $\gamma=0$, $W=0$ уравнения (2) описывают нестационарное поведение пары волн в консервативной среде. Поведение одной почти монохроматической волны в нелинейной консер-

вативной среде интенсивно исследовалось экспериментально, теоретически и с помощью ЭВМ в связи с задачами нелинейной оптики /7/. Было установлено явление самофокусировки света /13/, впоследствии показано, что самофокусированный световой пучок неустойчив /12/, в ряде случаев эта неустойчивость приводит к схлопыванию пучка за конечное время /14/.

Ниже мы покажем, что аналогичные явления происходят и в нашем случае пары волн. Непосредственным вычислением можно убедиться, что уравнения (5) (при $\gamma=W=0$) имеют следующие интегралы движения:

Полную энергию системы

$$H=\omega_{k_0}(N_A+N_B)+\vec{P}\vec{V}+I$$

"Число" волн каждого сорта

$$N_A=\int|A|^2dr,\quad N_B=\int|B|^2dr$$

полный импульс системы

$$\vec{P}=\frac{iV}{2}\int\left(A^*\nabla A+B\nabla B^*-\text{к.с.}\right)dr$$

и интеграл I, имеющий вид

$$I=\frac{\omega''}{2}\int\left(|\nabla A|^2+|\nabla B|^2\right)dr+\frac{T}{2}\int\left(|A|^4+|B|^4\right)dr+2S\int|A|^2|B|^2dr \qquad (12)$$

Покажем, что знак этого интеграла во многом определяет эволюцию системы. Естественно ограничится при этом двумерным случаем, т.е. считать A и B не зависящими от z и $\vec{v}$. Рассмотрим для этого вторую производную от существенно положительной величины R:

$$R = \frac{1}{\omega''}\int r_\perp^2 \left(|A|^2 + |B|^2\right) d^2 r > 0 \qquad (13)$$

Непосредственным вычислением с помощью (52) можно показать, что

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2I$$

откуда следует

$$R(t) = 2It^2 + 2\alpha t + \beta$$

где α и β -постоянные интегрирования. Видно, что при $I<0$ за конечное время $R(t)$ становится отрицательным, что противоречит (13). Это означает, что решение уравнений (2) "разрушается" за конечное время, то-есть появляется особенность. Чтобы проиллюстрировать, как это происходит, отметим, что при $A=B$ нестационарные уравнения (2) полностью аналогичны уравнениям, описывающим самофокусировку, которые детально исследованы в целом ряде работ /7/. Показано, что амплитуда волн в точке схлопывания в рамках уравнений(2) за конечное время обращается в бесконечность. В реальности образования особенности не происходит; амплитуда волны ограничивается нелинейным затуханием, которое существенно в ферромагнетиках.

При этом в очень маленькой области вблизи особенности диссипируется заметная доля энергии за время порядка $1/SA^2_{нач}$. С ростом средней амплитуды в доменной структуре резко растет вероятность образования начальных условий с $I<0$. При $\bar{A} \sim A_0$ эффективность описанного здесь "сбросового" механизма диссипации энергии может сравняться с линейной диссипацией. Таким образом "разрушение" волн приводит к тому, что средняя амплитуда не может существенно превышать A_0.

В заключение отметим, что предложенный механизм работает при $T>0$, $F<0$, когда $A \approx B$ и схлопывание происходит симметрично, или при $T<0$, когда может схлопываться из волн в отдельности.

Нам приятно поблагодарить В.Е.Захарова, за интерес к работе и ценные замечания.

Литература

1. R.Damon, Magnetism, A.P., NY, vol 1 p. 553 (1963)
2. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ФОТТ 11, 2947, 1969.
3. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ЖЭТФ 59, 1200, 1970.
4. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.Л.Мушер. ФТТ, 1972 (в печати).
5. В.Е.Захаров, В.С.Львов. ЖЭТФ, 60, 2066, 1971.
6. В.С.Львов. ФТТ, 1971 (в печати).
7. С.А.Ахманов, А.П.Сухоруков, Р.В.Хохлов. УФН, 93, 19, 1967.
8. Э.Шлеман. Переходной рост спиновых волн. Изв. Академии наук, серия физическая, 1964, т.28, № 3.
9. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. Препринт ИЯФ № 227, Новосибирск, 1968.
10. В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ФТТ 11, 1971, 1969.
11. Б.Б.Кадомцев, В.И.Карпман УФН, 103 № 2, 193, 1971.
12. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 53, 1710, 1967.
13. В.И.Таланов. Известие вузов, радиофизика 7, 564. 1964.
14. В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах. Письма в ЖЭТФ, 1971 (в печати).