

19  
И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 60 - 71

М.М.Карлинер

УСТОЙЧИВОСТЬ ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ СГУСТКА  
ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ  
ВИДА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Новосибирск

1971

# УСТОЙЧИВОСТЬ ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ СГУСТКА ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВИДА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

М.М. Карлинер

## А Н Н О Т А Ц И Я

Получены условия фазовой устойчивости с учетом нелинейности синхротронных колебаний в квазилинейном приближении. В этом приближении для немонотонной функции распределения частиц по частотам возможно возникновение фазовой неустойчивости при "благоприятной" по известным критериям /1/ настройке резонатора. Рассмотрены примеры.

$$H = H_0(\gamma) + \tilde{H}(\gamma, z) = H_0(\gamma) - e \int E(x, \gamma) dx, \quad (2)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial H}{\partial z} = \Omega_0(\gamma) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}, \quad \dot{z} = - \frac{\partial H}{\partial \gamma} \quad (3)$$

$$x = \sqrt{\frac{2z}{m\Omega_0}} \sin \varphi, \quad p = \sqrt{2m\Omega_0 z} \cos \varphi \quad (4)$$

До сих пор существовало представление о том, что разброс в сгустке по частотам синхротронных колебаний вносит лишь дополнительное затухание (затухание Ландау) и этим улучшает фазовую устойчивость [1-4].

Более тщательное исследование показывает, что при определенных условиях разброс синхротронной частоты от импульса может вызвать фазовую неустойчивость в тех случаях, когда её не должно быть согласно известным критериям [1].

Уравнения фазовых колебаний при наличии ускоряющего напряжения  $V \sin q \omega_0 t$  и возмущения в виде продольного электрического поля  $\mathcal{E}(x, t)$  могут быть приведены к каноническому виду с гамильтонианом:

$$H(x, p, t) = H_0(x, p) + \tilde{H}(x, t) = \frac{p^2}{2M} - \frac{eV}{2\pi q} \cos \frac{qx}{R} - e \int \mathcal{E}(x, t) dx, \quad (1)$$

где  $x$  - линейная продольная координата в системе покоя равновесной частицы,  $p$  - канонически сопряженный с  $x$  импульс.

$M = \frac{1}{R^2 \omega_0 \frac{d\omega}{dE}}$  - эквивалентная "масса" синхротронного движения,  $\omega_0$  - угловая частота обращения равновесной частицы. В переменных "действие-угол" гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$H = H_0(\mathcal{Y}) + \tilde{H}(x, t) = H_0(\mathcal{Y}) - e \int \mathcal{E}(x, t) dx, \quad (2)$$

причем  $x = x(\psi, \mathcal{Y})$ , а уравнения движения имеют вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{Y}} = \Omega_e(\mathcal{Y}) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathcal{Y}}, \quad \dot{\mathcal{Y}} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi}. \quad (3)$$

Здесь  $\Omega_e(\mathcal{Y})$  - угловая частота невозмущенных колебаний. Отметим, что для линейной системы  $x$  и  $p$  связаны с  $\psi$  и  $\mathcal{Y}$  соотношениями

$$x = \sqrt{\frac{2\mathcal{Y}}{M\Omega_e}} \sin \psi, \quad p = \sqrt{2M\Omega_e \mathcal{Y}} \cos \psi. \quad (4)$$

В нашем случае возмущающее поле создается самим пучком, который можно рассматривать как линейный ток

$$i(\ell, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(t) e^{jm(\omega_0 t - \frac{\ell}{R})} \quad (5)$$

где  $\ell$  - продольная координата в лабораторной системе,  $I_m(t)$  - комплексные амплитуды гармоник.

Подвергнув (5) преобразованию Лапласа, получим

$$i(\ell, s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(s - jm\omega_0) e^{-j\frac{m\ell}{R}} \quad (6)$$

Напряженность электрического поля, действующего на частицы, может быть выражена через импеданс внешней системы

$$\mathcal{E}(\ell, s) = -\frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z(s) \cdot I_m(s - jm\omega_0) e^{-j\frac{m\ell}{R}} \quad (7)$$

Совершая обратное преобразование Лапласа, имеем

$$\mathcal{E}(\ell, t) = -\frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(\omega_0 t - \frac{\ell}{R})} \mathcal{L}^{-1}\{Z(s + jm\omega_0) I_m(s)\} \quad (8)$$

Перейдем в систему покоя равновесной частицы с помощью преобразования  $\ell = x + \omega_0 R t$ . Тогда получим

$$\mathcal{E}(x, t) = -\frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{mx}{R}} \mathcal{L}^{-1}\{Z(s + jm\omega_0) I_m(s)\} \quad (9)$$

Для вычисления комплексных амплитуд  $I_m(t)$  необходимо воспользоваться функцией распределения  $f(x, p, t)$ , полагая

$$f(x, p, t) = f_0(x, p) + \tilde{f}(x, p, t), \quad (10)$$

где  $f_0(x, p)$  - равновесное распределение,  $\tilde{f}(x, p, t)$  - возмущение. Возмущение линейной плотности заряда может быть выражено через  $\tilde{f}(x, p, t)$ :

$$\rho(x, t) = eN \int \tilde{f}(x, p, t) dp, \quad (11)$$

где  $N$  - число частиц в сгустке. Так как  $\rho(x, t)$  - функция, периодическая по  $x$ , то

$$\rho(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m(t) e^{j\frac{mx}{R}}, \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} \rho_m(t) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{+\pi R} \rho(x, t) e^{-j\frac{mx}{R}} dx = \\ &= \frac{eN}{2\pi R} \iint \tilde{f}(x, p, t) e^{-j\frac{mx}{R}} dx dp. \end{aligned} \quad (13)$$

Можно показать, что  $I_m(t) = \beta \cdot c \cdot \rho_{-m}(t)$ ; в дальнейшем положим  $\beta \approx 1$ .

Итак

$$I_m(t) = \frac{ecN}{2\pi R} \iint \tilde{f}(x, p, t) e^{j\frac{mx}{R}} dx dp. \quad (14)$$

Переходя к переменным  $\psi, \tilde{y}$  и учитывая, что  $dx dp = d\psi d\tilde{y}$ , получим

$$I_m(t) = \frac{ecN}{2\pi R} \iint \tilde{f}(\psi, \tilde{y}, t) e^{j\frac{m\psi}{R}} d\psi d\tilde{y}. \quad (15)$$

Кинетическое уравнение для  $\tilde{f}(\psi, \tilde{y}, t)$  в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \Omega_e \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \cdot \frac{d f_0}{d \tilde{y}} \quad (16)$$

Подвергнув это уравнение преобразованию Лапласа, будем иметь

$$s \cdot F - \tilde{f}_0(\psi, \gamma) + \Omega_e \frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau}, \quad (17)$$

где

$$F(\psi, \gamma, s) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\psi, \gamma, t) e^{-st} dt; \tilde{f}_0(\psi, \gamma) = \tilde{f}(\psi, \gamma, 0). \quad (18)$$

Периодическое по  $\psi$  решение уравнения (17) с учетом (9) имеет вид

$$F(\psi, \gamma, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\gamma, s) e^{jn\psi}, \quad (19)$$

причем

$$F_n(\gamma, s) = \frac{\tilde{f}_{0n}}{s + jn\Omega_e} - \frac{en}{2\pi} \frac{d\gamma}{d\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mn} \frac{\tilde{z}(s + jm\omega_0)}{m} I_m(s), \quad (20)$$

$$\tilde{f}_{0n} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}_0(\psi, \gamma) e^{-jn\psi} d\psi, \quad A_{mn} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j(\frac{m\kappa}{R} + n\psi)} d\psi. \quad (21)$$

Знак  $\sum$  означает суммирование по всем  $m$ , кроме  $m=0$ .

Подвергая преобразованию Лапласа (14) и заменяя индекс  $m$  на  $k$ , получим

$$I_k(s) = \frac{ecN}{2\pi R} \iint F(\psi, \gamma, s) e^{j\frac{k\psi}{R}} d\psi d\gamma. \quad (22)$$

Подставляя сюда  $F(\psi, \gamma, s)$  из (19) и (20), найдем систему линейных уравнений для комплексных амплитуд гармоник тока пучка

$$I_k(s) + eI_{cp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{z}(s + jm\omega_0)}{m} I_m(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{n A_{mn} A_{kn}^* \frac{d\gamma}{d\tau}}{s + jn\Omega_e} d\gamma = \quad (23)$$

$$= 2\pi I_{cp} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{\tilde{f}_{0n} A_{kn}^*}{s + jn\Omega_e} d\gamma,$$

где  $I_{cp} = \frac{ecN}{2\pi R}$  — средний ток пучка, а  $k = \pm 1, 2, 3, \dots$

Устойчивость решений полученной системы определяется расположением нулей детерминанта системы в плоскости комплексной переменной  $s$ . Однако, анализ устойчивости в общем виде затруднителен. Поэтому мы введем следующие упрощающие предположения, позволяющие довести исследование до конца:

1. Так как знаменатели в (23) имеют резонансный характер, то ясно, что колебания могут происходить лишь с частотой, близкой к  $n\Omega_e$ ; благодаря этому в суммах по  $n$  можно сохранить лишь два члена ( $\pm n$ ).

2. Предположим, что амплитуда колебаний частиц в сгустке мала, так что их можно считать приближенно синусоидальными согласно (4).

3. Сумму по  $m$  оборвем на членах с  $m = \pm m_0$ , так чтобы

$$\frac{m_0}{R} \sqrt{\frac{2\gamma}{M\Omega_e}} \ll 1.$$

Тогда

$$A_{mn} A_{kn}^* \cong \frac{(mk)^n}{(n!)^2} \left( \frac{\gamma}{2R^2 M\Omega_e} \right)^n. \quad (24)$$

Подставляя в (23) и оставляя в сумме по  $n$  лишь два члена, приведем систему к виду

$$I_n(s) - \frac{2jeI_{cp} \cdot k^n}{[(n-1)!]^2} \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{n-1} I_m(s) \cdot Z(s+jm\omega_0) \int \left(\frac{y}{2R^2M\Omega_e}\right)^n \frac{\Omega_e \frac{df_0}{dy}}{s^2+n^2\Omega_e^2} dy =$$

$$= 2\pi I_{cp} \int A_{kn}^* \left[ \frac{\tilde{f}_{0,n}}{s+jn\Omega_e} + \frac{\tilde{f}_{0,-n}}{s-jn\Omega_e} \right] dy \quad (25)$$

Умножим левую и правую часть (25) на  $k^{n-1} \cdot Z(s+jk\omega_0)$  и сложим все уравнения по  $k$  от  $-m_0$  до  $+m_0$ , обозначив

$$V_n(s) = \sum_{m=-m_0}^{m_0} m^{n-1} I_m(s) \cdot Z(s+jm\omega_0) \quad (26)$$

Тогда система уравнений сводится к одному уравнению для  $V_n(s)$ , из которого находим

$$V_n(s) = \frac{2\pi I_{cp} \sum_{k=-m_0}^{m_0} k^{n-1} Z(s+jk\omega_0) \int A_{kn}^* \left[ \frac{\tilde{f}_{0,n}}{s+jn\Omega_e} + \frac{\tilde{f}_{0,-n}}{s-jn\Omega_e} \right] dy}{1 - \frac{2jeI_{cp}}{[(n-1)!]^2} \sum_{k=-m_0}^{m_0} k^{2n-1} Z(s+jk\omega_0) \int \left(\frac{y}{2R^2M\Omega_e}\right)^n \frac{\Omega_e \frac{df_0}{dy}}{s^2+n^2\Omega_e^2} dy} \quad (27)$$

Устойчивость этого решения определяется расположением нулей знаменателя /5/.

Дисперсионное уравнение получим, приравняв знаменатель нулю. Исследование устойчивости путем решения этого уравнения возможно, по-видимому, лишь в простейших случаях. Можно, однако, получить условие устойчивости с помощью критерия Найквиста, не требующего решения дисперсионного уравнения. Обоснование применения критерия Найквиста к уравнениям подобного типа приведено в /6,7/.

Введем обозначения

$$K_n(s) = eI_{cp} \cdot G_n(s) \sum_{k=-m_0}^{m_0} k^{2n-1} \cdot Z(s+jk\omega_0), \quad (28)$$

$$G_n(s) = \frac{2j}{[(n-1)!]^2} \int \left(\frac{y}{2R^2M\Omega_e}\right)^n \frac{\Omega_e \frac{df_0}{dy}}{s^2+n^2\Omega_e^2} dy \quad (29)$$

Функция  $K_n(s)$  определена для значений  $s$  с положительной вещественной частью и в некоторых ограничениях, налагаемых на

$\frac{df_0}{dy}$  /7/, аналитична в правой полуплоскости. Прямая  $s = j\Omega + \sigma$  ( $\sigma > 0$ ) при  $\sigma = const$  преобразуется в плоскости  $K_n(s)$  в некоторый контур, называемый диаграммой Найквиста при  $\sigma \rightarrow +0$ . Согласно критерию Найквиста знаменатель (27) не имеет нулей в правой полуплоскости, если диаграмма Найквиста не охватывает точку  $K_n = 1$ . Диаграмма Найквиста определяется соотношением

$$K_n(j\Omega) = eI_{cp} \lim_{\sigma \rightarrow +0} G_n(j\Omega + \sigma) \sum_{k=-m_0}^{m_0} k^{2n-1} \cdot Z(j\Omega + jk\omega_0) \quad (30)$$

Для  $G_n(j\Omega + \sigma)$  можно получить с точностью до малых высшего порядка

$$G_n(j\Omega + \sigma) = \frac{2Q_c}{[(n-1)!]^2 \Omega_e} \int \left(\frac{y}{2R^2M\Omega_e}\right)^n \frac{\frac{df_0}{dy}}{1+jnQ_c(x_0-x_e)} dy, \quad (31)$$

где

$$\chi_0 = \frac{2\left(\frac{\Omega}{n} - \Omega_0\right)}{\Omega_0}, \quad \chi_e = \frac{2(\Omega_e - \Omega_0)}{\Omega_0}, \quad Q_c = \frac{\Omega_0}{2\delta}, \quad (32)$$

$\Omega_0$  - синхротронная частота малых колебаний.

Зависимость синхротронной частоты от амплитуды при не очень большой амплитуде приближенно может быть записана в виде

$$\Omega_e^2 \cong \Omega_0^2 \left(1 - \alpha \frac{a^2}{4R^2}\right), \quad (33)$$

где  $a^2$  - квадрат амплитуды колебаний

$$a^2 = \frac{2\gamma}{M\Omega_e}. \quad (34)$$

Отсюда получаем

$$\chi_e \cong -\alpha \frac{\gamma}{2R^2 M \Omega_e}. \quad (35)$$

Отметим, что функция распределения  $f_0(\gamma)$  может быть преобразована к переменной  $\chi_e$ .

Тогда разброс по частотам может быть охарактеризован относительной шириной функции распределения  $\delta \cong \frac{2\alpha\Omega_e}{\Omega_0}$ .

Произведем в (31) замену переменной

$$u = -\frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{\gamma}{2R^2 M \Omega_e} \quad (36)$$

одновременно переходя к новой функции распределения  $W(u)$  так, чтобы

$$2\pi f_0(\gamma) \cdot d\gamma = W(u) du. \quad (37)$$

Если при этом потребовать, чтобы  $W(u) > 0$ , то

$$f_0\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} W(u) \cdot \left|\frac{du}{d\gamma}\right| = \frac{\alpha}{2\pi\delta} \cdot \frac{W(u)}{2R^2 |M| \Omega_e}. \quad (38)$$

Для определенности в дальнейшем будем предполагать энергию частиц выше критической, т.е.  $M < 0$ ,  $\gamma < 0$ .

Тогда

$$G_n(j\Omega + \sigma) = \frac{\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{n-1} \cdot Q_c}{2\pi\Omega_0^2 R^2 |M| [(n-1)!]^2} \int_{-\infty}^0 \frac{(-u)^n \frac{dW}{du}}{1 + j \cdot n \cdot \delta \cdot Q_c (u_0 - u)} du. \quad (39)$$

При  $M > 0$ ,  $\gamma > 0$  (39) меняет знак на обратный.

Если обозначить

$$A_n(u_0) = Q_c \cdot \delta \cdot n \int_{-\infty}^0 \frac{(-u)^n \frac{dW}{du}}{1 + n^2 \delta^2 Q_c^2 (u_0 - u)^2}, \quad (40)$$

$$B_n(u_0) = -Q_c \cdot \delta \cdot n \int_{-\infty}^0 \frac{(-u)^n \cdot n \cdot \delta \cdot Q_c \cdot (u_0 - u) \frac{dW}{du}}{1 + n^2 \delta^2 Q_c^2 (u_0 - u)^2} du, \quad (41)$$

то

$$G_n(j\Omega + \sigma) = \frac{\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{2\pi\Omega_0^2 R^2 |M| \cdot n \cdot [(n-1)!]^2} (A_n + j B_n) \quad (42)$$

Заметим, что выражения (40), (41) для  $A_n$ ,  $B_n$  (при  $\sigma > 0$ ) формально учитывают радиационное затухание синхротронных колебаний (величина  $Q_c$  - добротность этих колебаний). При малом затухании можно перейти к пределу  $Q_c \rightarrow \infty$ , пренебрегая затуханием. Тогда выражения (40) и (41) упрощаются

$$A_n(u_0) = \pi (-u_0)^n \cdot \frac{dW}{du} \Big|_{u=u_0}, \quad (43)$$

$$B_n(u_0) = \int_{-\infty}^0 \frac{(-u)^n \frac{dW}{du}}{u - u_0} du. \quad (44)$$

Здесь имеется в виду главное значение интеграла.

Подставляя (42) в (30), получим

$$K_n(j\Omega) = \frac{e I_{cp} \left(\frac{\delta}{2e}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{2\gamma \Omega_0^2 R^2 |M| \cdot n [(n-1)!]^2} (A_n + jB_n) \cdot \sum_{k=-m_0}^{m_0} k^{2n-1} \cdot \sum (j\Omega + jk\omega_0). \quad (45)$$

В импеданс системы  $Z$ , как видно из (45), входит частота  $\Omega$ . Однако, так как  $\Omega \cong n\Omega_0$ , а  $\Omega_0 \ll \omega_0$ , то в выражении для  $Z$  можно с хорошей точностью положить  $\Omega = n\Omega_0$ . Обозначим

$$Z(jk\omega_0 + jn\Omega_0) = R_{kn}^+ + jX_{kn}^+ \quad (46)$$

$$Z(-jk\omega_0 + jn\Omega_0) = Z^*(jk\omega_0 - jn\Omega_0) = R_{kn}^- - jX_{kn}^-$$

где  $R_{kn}^+, X_{kn}^+, R_{kn}^-, X_{kn}^-$  — активная и реактивная части сопротивления внешней системы на частотах соответственно  $k\omega_0 \pm n\Omega_0$ .

Приравнивая мнимую часть  $K_n$  нулю, получим уравнение, позволяющее найти  $u_0$ :

$$A_n \sum_{k=1}^{m_0} k^{2n-1} (X_{kn}^+ + X_{kn}^-) + B_n \sum_{k=1}^{m_0} k^{2n-1} (R_{kn}^+ - R_{kn}^-) = 0 \quad (47)$$

Система устойчива, если при  $u_0$ , найденном из (47), выполняется неравенство  $\text{Re } K(u_0) < 1$  или (подставляя  $\Omega_0^2 = \frac{eV_0}{2\gamma R^2/M}$ )

$$\frac{I_{cp} \left(\frac{\delta}{2e}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{V \cdot q \cdot n \cdot [(n-1)!]^2} \sum_{k=1}^{m_0} k^{2n-1} \left\{ A_n (R_{kn}^+ - R_{kn}^-) - B_n (X_{kn}^+ + X_{kn}^-) \right\} < 1. \quad (48)$$

Если  $\sum_{k=1}^{m_0} k^{2n-1} (R_{kn}^+ - R_{kn}^-) \neq 0$ , то из (47) и (48) можно получить неравенство, выражающее условие устойчивости в следующем виде:

$$\frac{I_{cp} \left(\frac{\delta}{2e}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\delta}}{V \cdot q \cdot n \cdot [(n-1)!]^2} \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{A_n} \sum_{k=1}^{m_0} k^{2n-1} (R_{kn}^+ - R_{kn}^-) < 1. \quad (49)$$

Если левая часть (49) отрицательна, то система устойчива при любом токе  $I_{cp}$ ; знак левой части определяется знаками  $A_n$  и суммы сопротивлений внешней системы. При  $n=1$  неравенство (49) по форме совпадает с условием устойчивости, полученным ранее в /1/ в предположении, что частота синхротронных колебаний не зависит от амплитуды. Имеется, однако, различие, состоящее в том, что в /1/  $A$  — положительная по смыслу величина, равная значению функции распределения при  $x_e = x_0$ . Здесь же  $A_n$  выражается через производную функции распределения и может менять знак. Следует подчеркнуть, что причиной указанного различия является учет зависимости частоты  $\Omega_e$  от амплитуды синхротронных колебаний.

При существенно положительной величине  $A_n$  абсолютная устойчивость определяется лишь свойствами внешней системы. Путем настройки, например, ускоряющего резонатора или специального пассивного резонатора можно добиться устойчивости при сколь угодно большом токе пучка. Если же  $A_n$  — знакопеременная величина, то абсолютная устойчивость будет зависеть также от свойств пучка.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим некоторые примеры.

1. Гауссовское распределение плотности заряда в сгустке. При этом нормированная к единице функция распределения имеет вид

$$W(u) = \begin{cases} e^u & \text{при } -\infty < u \leq 0 \\ 0 & \text{при } u > 0. \end{cases} \quad (50)$$

Рассмотрим устойчивость колебаний с  $n=1$ .

Если  $\sum_k (R_k^+ - R_k^-) \neq 0$ , то уравнение (47) может быть записано в виде



$$-\frac{B}{A} = \frac{\sum_{k=1}^{m_0} k(X_k^+ + X_k^-)}{\sum_{k=1}^{m_0} k(R_k^+ - R_k^-)} = \Delta \quad (51)$$

причем  $\Delta$  - величина, не зависящая в нашем приближении от  $u_0$ .

В данном случае

$$A(u_0) = \begin{cases} -\pi u_0 e^{u_0} & \text{при } -\infty < u_0 < 0 \\ 0 & \text{при } u_0 > 0 \end{cases} \quad (52)$$

$$B(u_0) = -1 - u_0 e^{u_0} \text{Ei}_1(-u_0); \quad (53)$$

где

$$\text{Ei}_1(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^z dz}{z} = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \quad \text{при } x > 0$$

- интегральная показательная функция [8].

Левая часть (51) равна при  $u_0 < 0$

$$-\frac{B}{A} = \text{Ei}_1(-u_0) - \frac{e^{-u_0}}{u_0}; \quad (54)$$

$$-\infty < -\frac{B}{A} < \infty \quad \text{при } -\infty < u_0 < 0$$

Графики  $A$ ,  $B$  и  $-\frac{B}{A}$  представлены схематически на рис.1, диаграмма  $A + jB$  - на рис.2.

Как следует из графика рис.1, уравнение (51) при любом имеет единственное решение, причем всегда  $A > 0$ . В этом случае условие (49) и полученное в [1] практически совпадают.

2. Рассмотрим теперь распределение вида

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-u_0)^2}{2}} & \text{при } -\infty < u \leq 0 \\ 0 & \text{при } u > 0, \end{cases} \quad (55)$$

причем  $u_0 < 0$  и  $|u_0| \gg 1$ , т.е. сдвиг распределения много больше его ширины.

Тогда

$$A(u_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} u_0 (u_0 - u_0) e^{-\frac{(u_0 - u_0)^2}{2}} \quad \text{при } u_0 < 0, \quad (56)$$

$$B(u_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{u_0^2}{2}} - u_0 \int_{-\infty}^{|u_0|} \frac{z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{u_0 - u_0 - z} \right]. \quad (57)$$

Графики  $A$ ,  $B$  и  $-\frac{B}{A}$  представлены схематически на рис.3, а диаграмма  $A + jB$  на рис.4.

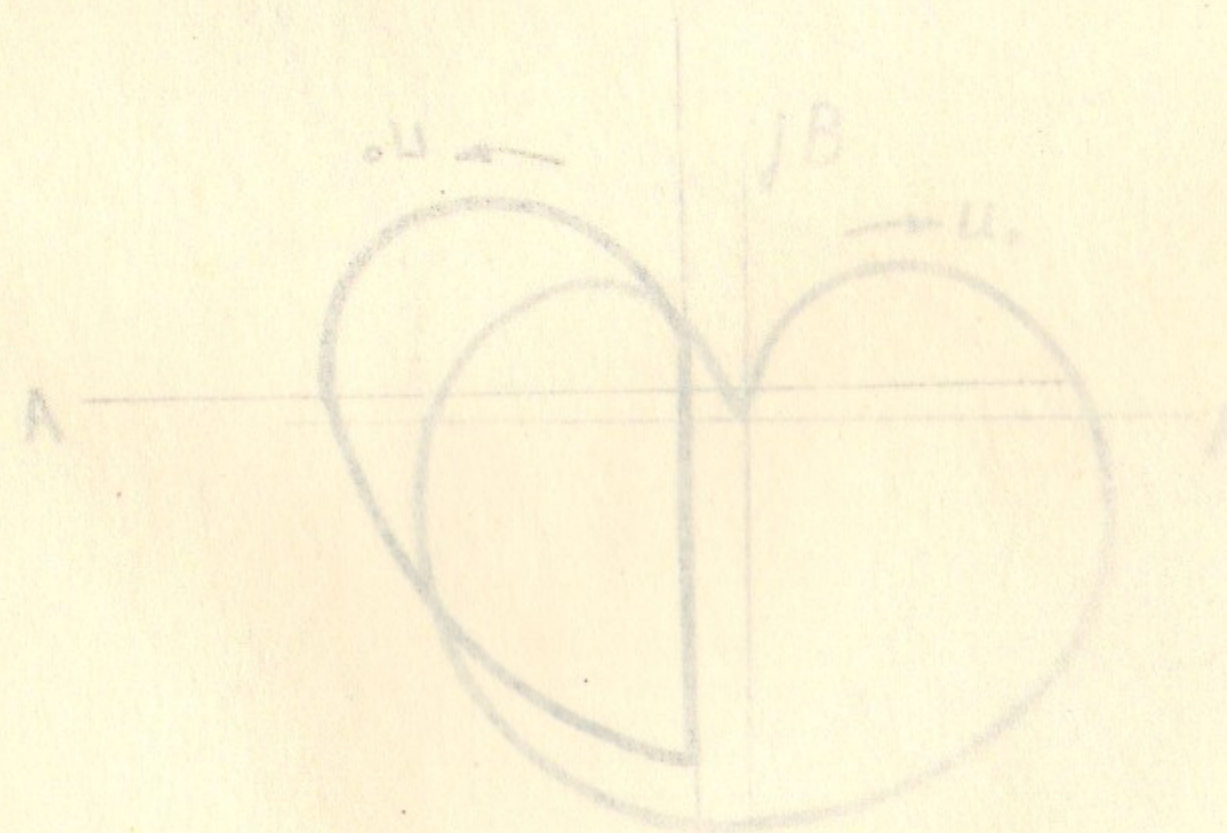
В этом случае уравнение (51) при любом  $\Delta$  имеет два решения, причем знаки  $A$  для этих решений противоположны. Поэтому при функции распределения вида (55) система всегда потенциально неустойчива, т.е. возбуждается при токе пучка больше некоторого порога. Отметим, что распределение вида (55) может возникать при инжекции, когда время радиационного затухания больше времени раскогеренирования.

3. Наконец, рассмотрим качественно распределение, отличающееся от (50) спадом около нуля (рис.5). Такое распределение может возникнуть например, после толчка, возбуждающего колебания всего сгустка, если время затухания значительно больше времени раскогеренирования. Графики  $A$ ,  $B$  и  $-\frac{B}{A}$  для такого распределения схематически представлены на рис.6, а диаграмма  $A + jB$  - на рис.7. Нетрудно видеть, что такая система также потенциально неустойчива при любой настройке внешней системы.

Итак, приведенный выше анализ показывает, что разброс по частотам синхротронных колебаний в сочетании с неблагоприятным видом функции распределения может приводить к неустойчивости даже при правильной по критериям /1/ настройке внешней системы.

Л и т е р а т у р а

1. М.М.Карлинер, А.Н.Скринский, И.А.Шехтман. ЖТФ, 38, 1945 (1968).
2. А.Н.Лебедев, Атомная энергия, 25, 100 (1968).
3. М.М.Карлинер, препринт ИЯФ 45-70 (1970), Новосибирск.
4. F. Amman, LNF-69/12 (1969), Frascati
5. Л.Д.Лавдау. ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
6. O. Penrose, Phys. Fluids, 3, 258 (1960)
7. T.H. Stix, "The theory of plasma waves", Mc-Graw-Hill, N.-Y.
8. И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., ГИТТЛ, 1948.



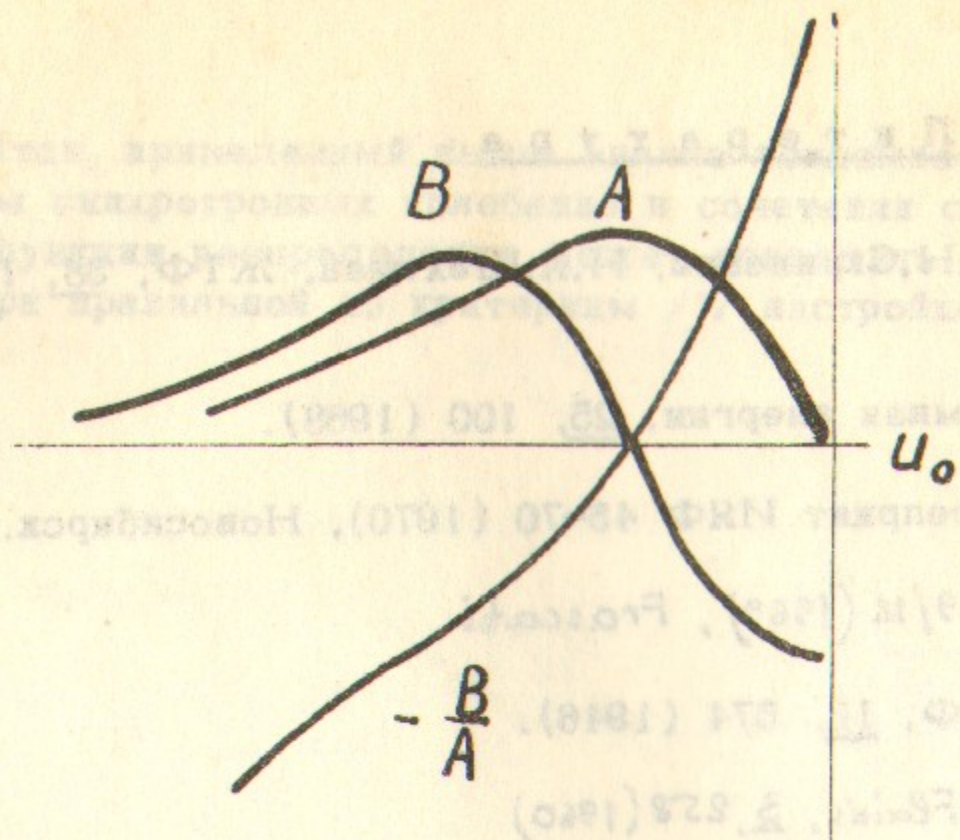


Рис. 1

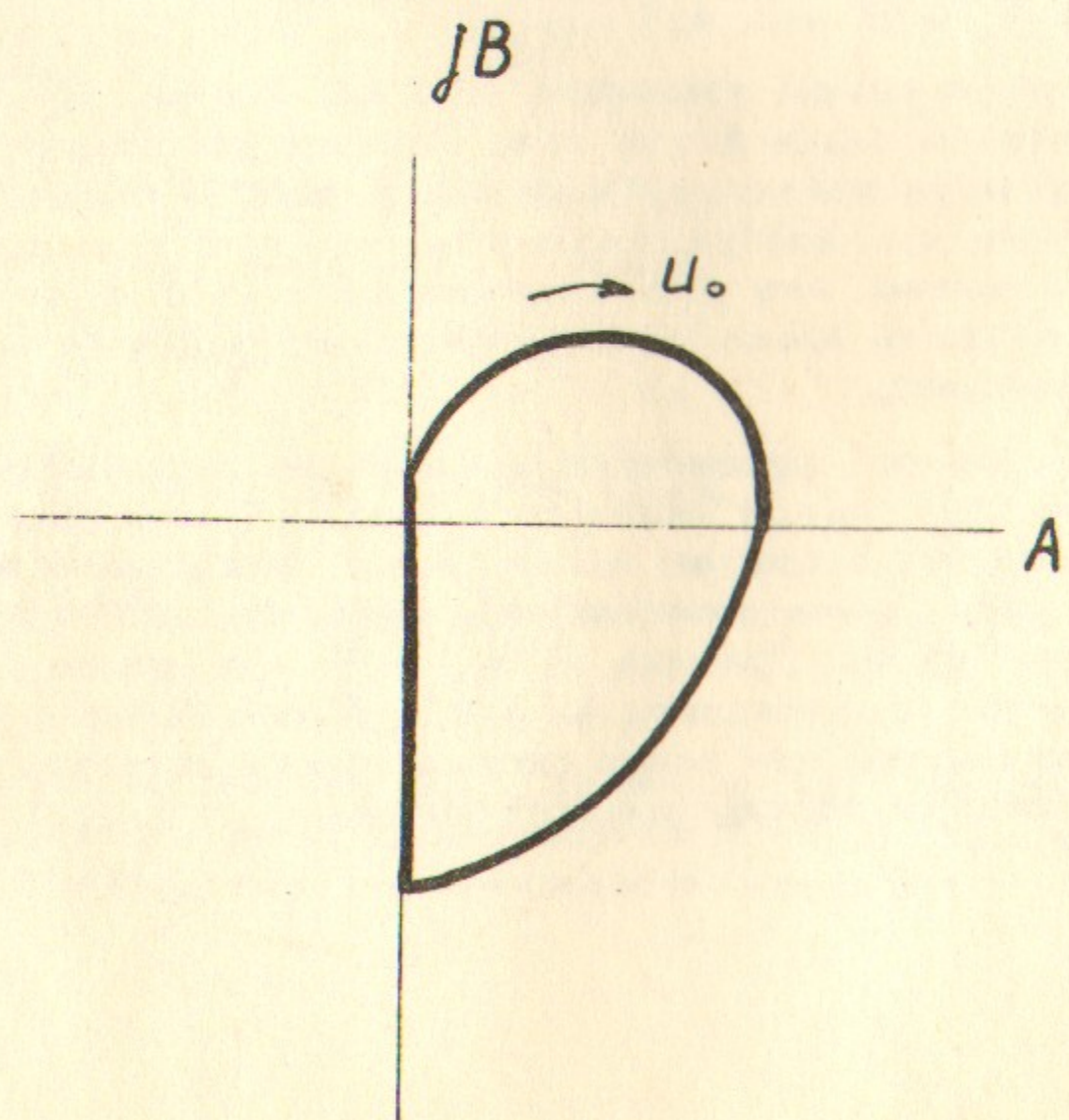


Рис. 2.

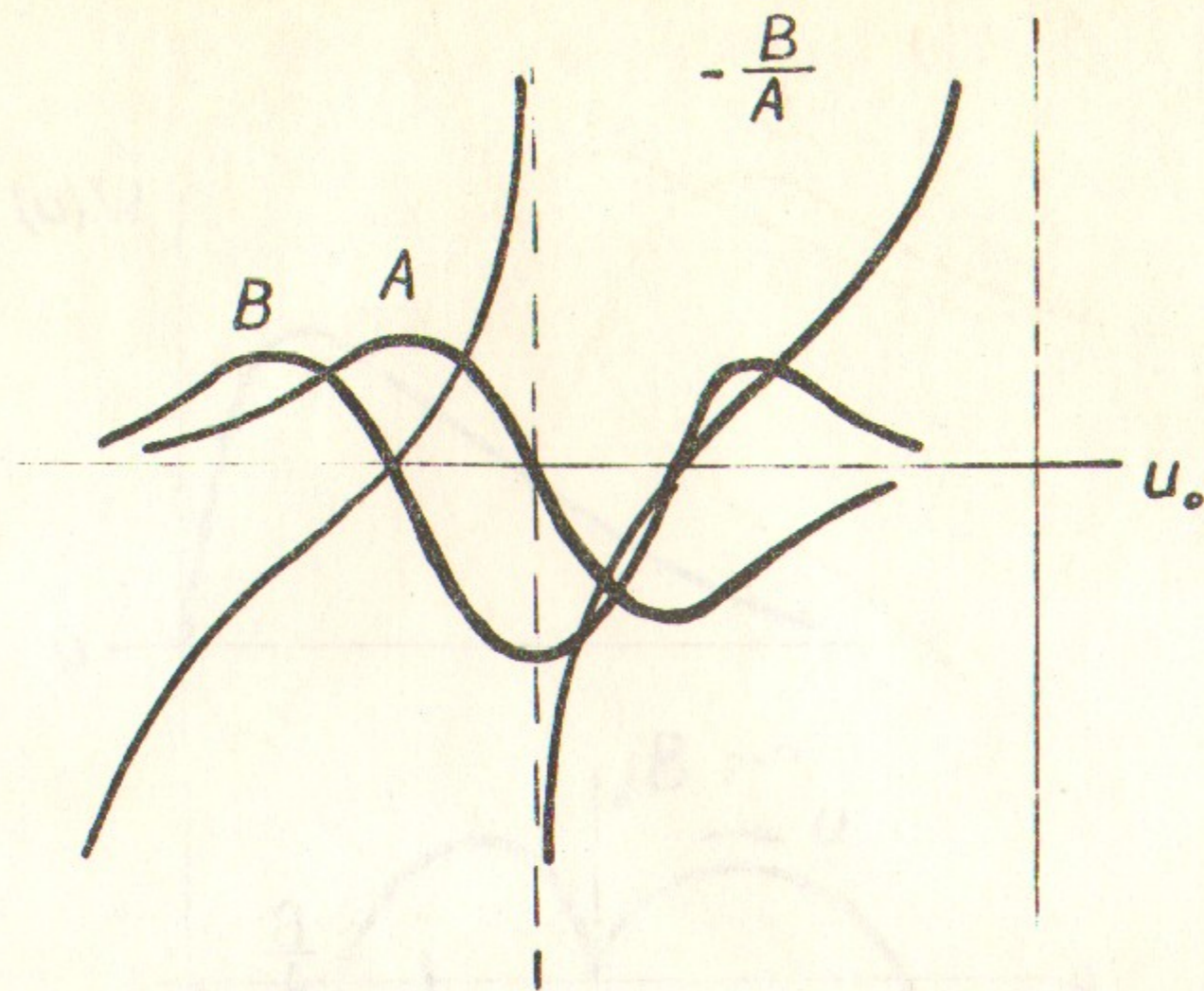


Рис. 3

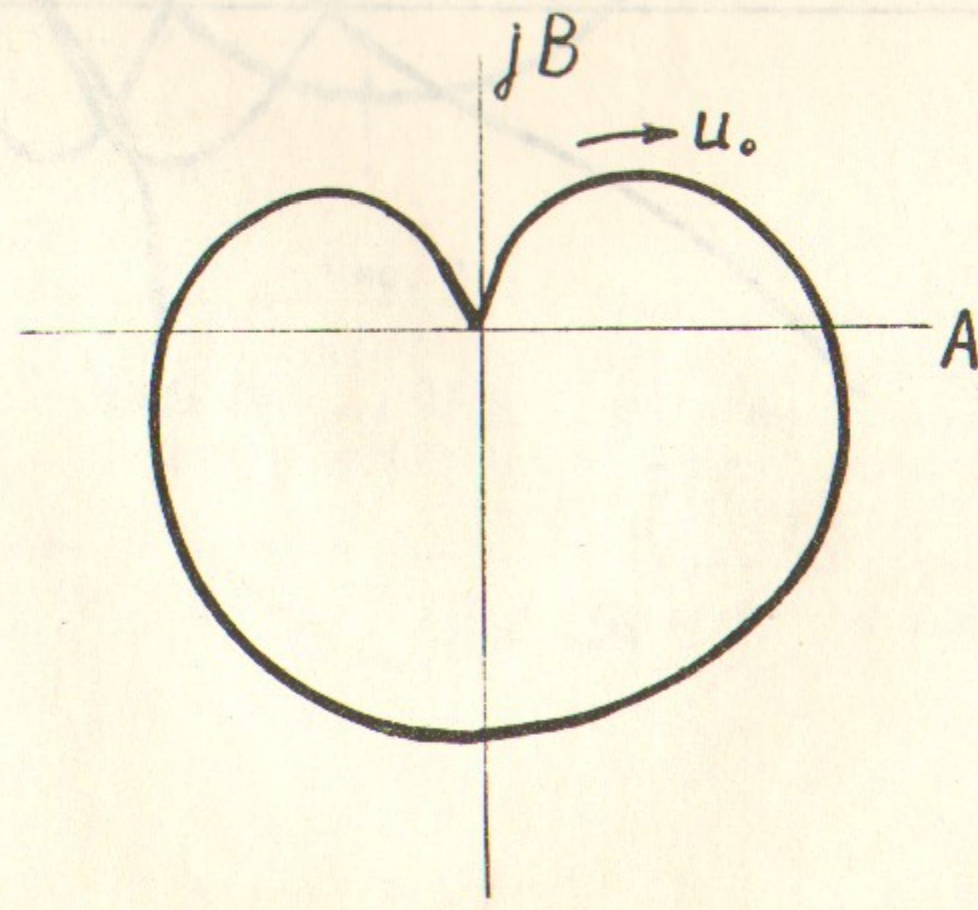


Рис. 4

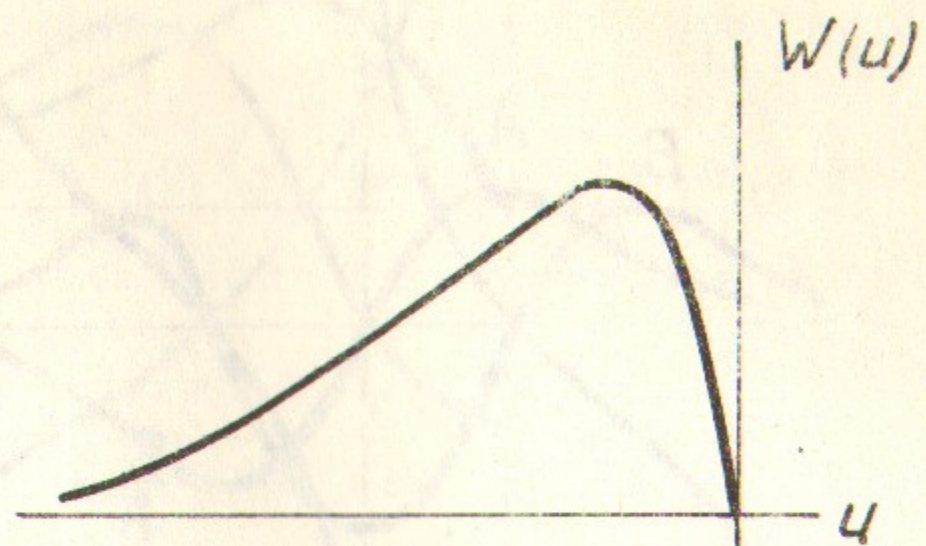


Рис. 5

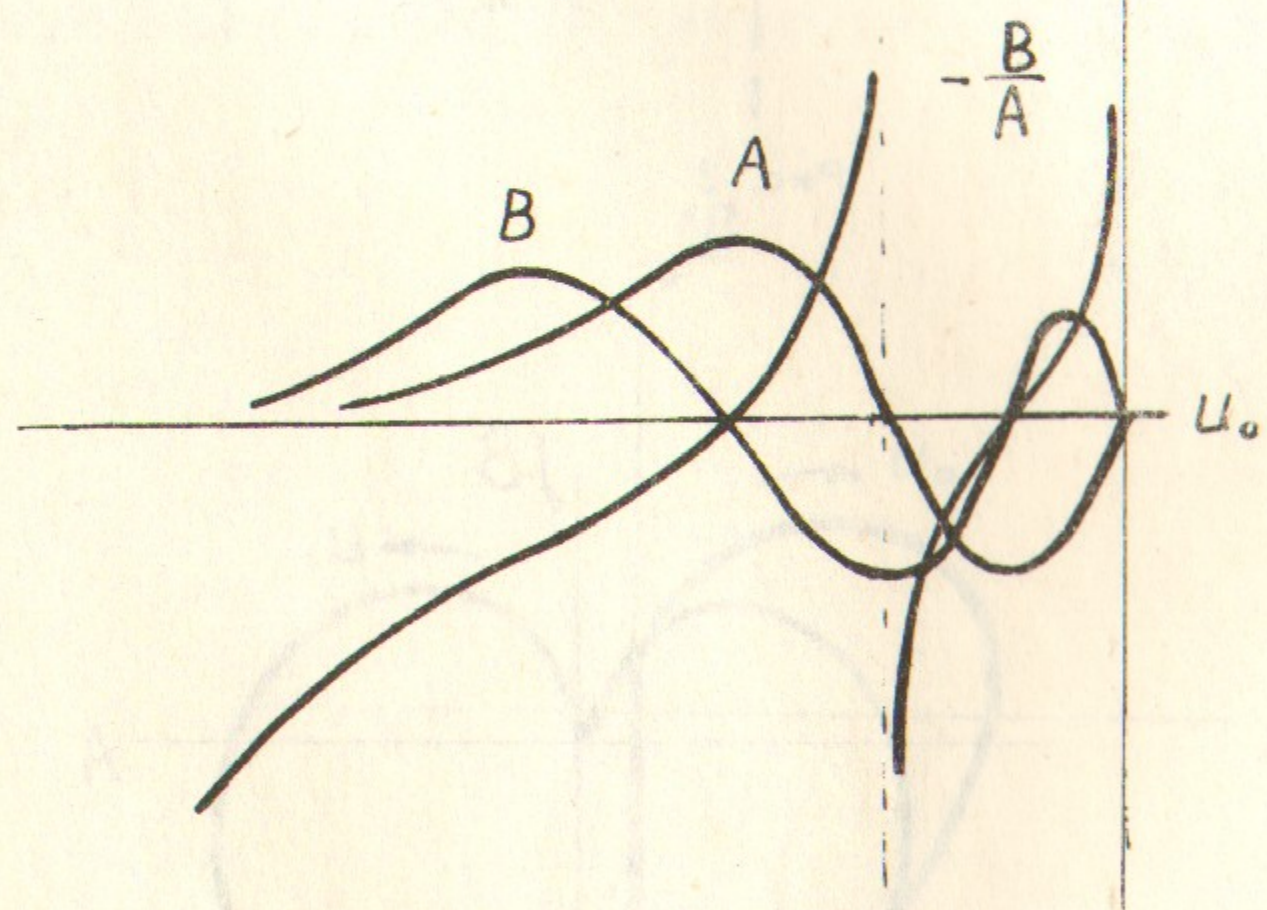


Рис. 6

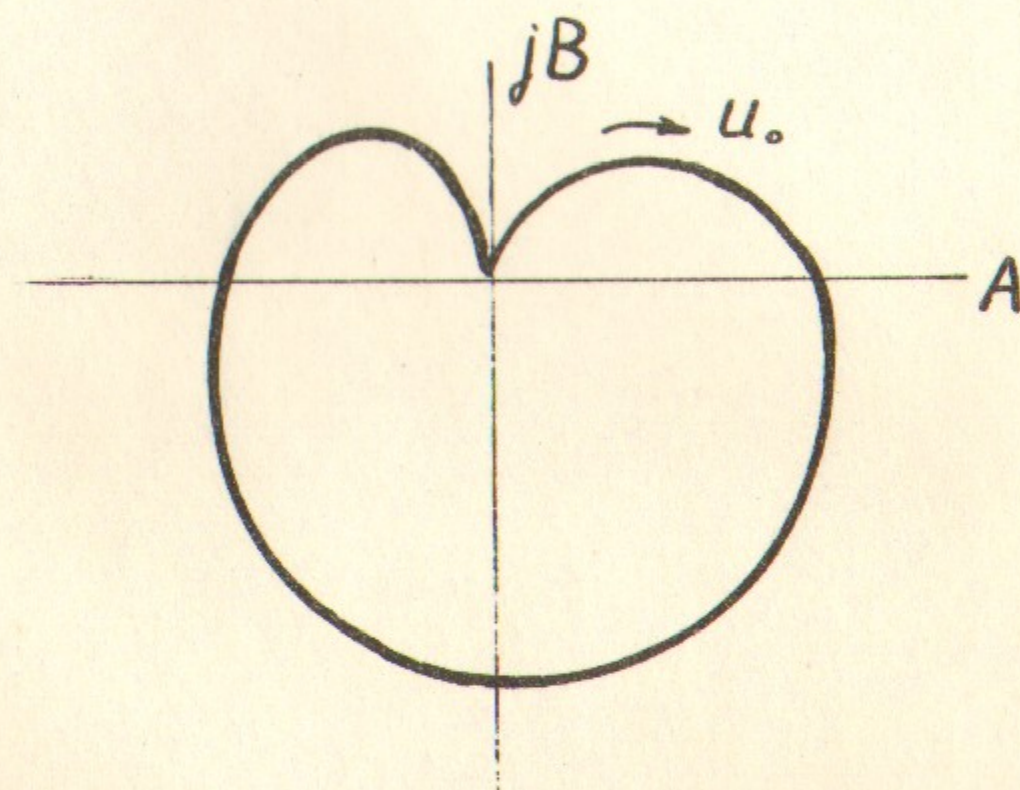
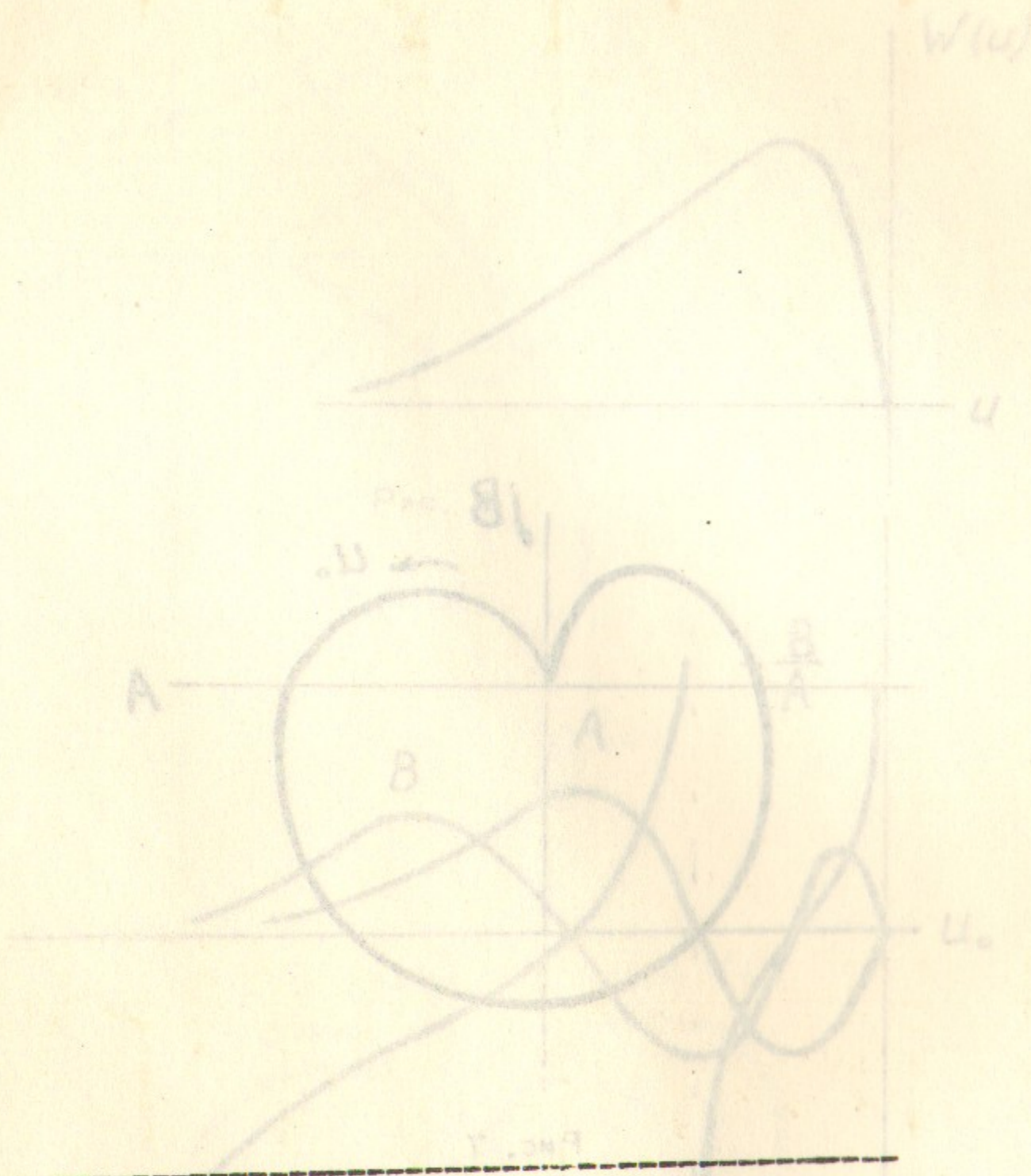


Рис. 7

Одобрено в печать в ИРФ СО АН СССР  
 10.10.1978 г. № 10. ПРИБЛИЖИТ  
 10.10.1978 г. № 10. ПРИБЛИЖИТ  
 10.10.1978 г. № 10. ПРИБЛИЖИТ  
 10.10.1978 г. № 10. ПРИБЛИЖИТ



Ответственный за выпуск КАРЛИНЕР М.М.  
 Подписано к печати 14. IX. 1972 МНОС617  
 Усл. 1,0 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.  
 Заказ № 60. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР.