

5-37 — 12
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

И Я Ф 52 - 71

В.Зауткин, В.Захаров, В.Львов,
С.Мушер, С.Старобинец

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
СПИНОВЫХ ВОЛН ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ
НАКАЧКЕ В КУБИЧЕСКИХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Новосибирск

1971

В.Зауткин, В.Захаров, В.Львов,

С.Мушер, С.Старобинец

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
СПИНОВЫХ ВОЛН ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ НАКАЧКЕ
В КУБИЧЕСКИХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе теоретически, экспериментально и с помощью ЭВМ рассмотрена проблема поведения спиновых волн за порогом параметрического возбуждения на примере параллельной накачки в иттриевом гранате (YIG). Показано, что нелинейная стационарная теория параметрического возбуждения волн, развитая в работе В.Захарова, В.Львова, С.Старобинца / 1 /, находится в хорошем качественном и количественном согласии с экспериментом. Сравнение теории с экспериментом проводилось для абсолютной величины вещественной и мнимой части стационарной нелинейной восприимчивости χ' и χ'' , знака χ' , зависимости χ' и χ'' от уровня мощности в образцах YIG различной формы в разных магнитных полях.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____

Введение

Хорошо известным способом возбуждения спиновых волн в ферромагнетиках является параметрическое возбуждение, в том числе параллельная накачка, при которой спиновые волны возбуждаются переменным магнитным полем, поляризованным вдоль намагниченности кристалла /2,3,4/. Условия возбуждения, как правило, выполняются сразу для большого числа волн; взаимодействие между этими волнами влияет на нелинейную стадию возбуждения и определяет установившееся стационарное состояние. Последовательное описание этого состояния представляет собой задачу многих тел.

Общая теория параметрического возбуждения волн в нелинейных средах с дисперсией развита в работе В.Захарова, В.Львова, С.Старобинца /1/. Теория построена для сред, допускающих описание в рамках классического гамильтонова формализма, и базируется на упрощении гамильтониана системы волн до вида

$$\mathcal{H} = \sum_{\kappa} (\omega_{\kappa} + \sum_{\kappa'} T_{\kappa\kappa'} a_{\kappa} a_{\kappa'}^*) a_{\kappa} a_{\kappa'}^* + \quad (1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \{ (\hbar V_{\kappa} + \sum_{\kappa'} S_{\kappa\kappa'} a_{\kappa} a_{-\kappa'}^*) a_{\kappa} a_{-\kappa}^* + \text{c.c.} \}$$

Здесь ω_{κ} - закон дисперсии волн; a_{κ} - их комплексные амплитуды; V_{κ} - коэффициент связи волн с однородным полем накачки $h(t) = h \exp(i\omega_p t)$; коэффициент $T_{\kappa\kappa'}$ описывает нелинейный сдвиг частоты, коэффициент $S_{\kappa\kappa'}$ нелинейное параметрическое взаимодействие волн друг с другом.

Этот выбор гамильтониана соответствует замене точной задачи о взаимодействии волн задачей самосогласованного взаимодействия пар волн с равными и противоположными волновыми векторами. Кроме упрощения гамильтониана в /1/ сделаны следующие приближения:

1. Затухание вводится феноменологически как дополнительный член в канонические уравнения для амплитуд волн

$$\frac{\partial a_{\kappa}}{\partial t} + \gamma a_{\kappa} = -i \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta a_{\kappa}^*} \quad (2)$$

2. Нелинейное затухание отсутствует.

3. Среда предполагается неограниченной и однородной, в том числе отсутствуют случайные неоднородности и тепловые флуктуации.

Теорию, основанную на этих приближениях, будем называть S -моделью; она позволяет детально описать поведение волн в стационарном состоянии.

Основным свойством параметрических волн в S -модели является жесткая корреляция суммы фаз $\Psi_{\kappa} = \Psi_{\kappa} + \Psi_{-\kappa}$ внутри каждой возбужденной пары, при этом

$$\langle a_{\kappa} a_{-\kappa} e^{i\omega_{\kappa} t} \rangle = \langle a_{\kappa} a_{\kappa}^* \rangle e^{i\Psi_{\kappa}} e^{i\Psi_{-\kappa}} \quad (3)$$

Как видно из гамильтониана (1), это означает, что помимо внешней накачки hV_{κ} в системе действует самостоятельная внутренняя накачка $\sum_{\kappa'} S_{\kappa\kappa'} n_{\kappa'} e^{i\Psi_{\kappa'}}$, которая складывается с внешней таким образом, что для возбуждения пар приход энергии от полной накачки

$$P_{\kappa} = hV_{\kappa} + \sum_{\kappa'} S_{\kappa\kappa'} n_{\kappa'} e^{i\Psi_{\kappa'}} \quad (4)$$

в точности компенсирует их затухание, т.е.

$$|P_{\kappa}| = \gamma_{\kappa} \quad (5)$$

Как показано в /1/, в стационарном состоянии параметрические волны расположены на поверхности, определяемой в κ -пространстве условием:

$$\tilde{\omega}_{\kappa} \equiv \omega_{\kappa} - \omega_p/2 + 2 \sum_{\kappa'} T_{\kappa\kappa'} n_{\kappa'} = 0 \quad (6)$$

Распределение пар на этой поверхности существенным образом зависит от структуры коэффициентов: $V_{\kappa}, S_{\kappa\kappa}'$.

В настоящей работе теоретически и экспериментально изучена конкретная ситуация, возникающая за порогом параллельной накачки в изотропных (или слабоанизотропных кубических) ферромагнетиках. В пренебрежении полем анизотропии коэффициент связи с накачкой

$$V_{\kappa} = - \frac{g \omega_M}{2 \omega_p} \sin^2 \theta_{\kappa} e^{2i\Psi_{\kappa}} \quad (7)$$

Здесь g - гиромагнитное отношение, $\omega_M \equiv 4\pi g M_0$, $\theta_{\kappa}, \Psi_{\kappa}$ - соответственно полярный и азимутальный углы спиновой волны /3/. Коэффициенты гамильтониана $S_{\kappa\kappa}'$, описывающие взаимодействие параметрических спиновых волн (ПСВ) между собой в зависимости от конкретных параметров ферромагнетика (намагниченности M_0 , частоты накачки ω_p , формы образца и т.д.) вычислены в Приложении.

В § 1 выражения для коэффициентов $S_{\kappa\kappa}'$ используются для вычисления нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' и структуры распределения спиновых волн в κ -пространстве. Оказывается, что для изотропных (или кубических слабоанизотропных) ферромагнетиков на поверхности (6) в κ -пространстве вплоть до весьма больших превышений (~ 10 дБ) возбуждена только линия с $\theta_1 = \pi/2$. Такая простая структура позволяет получить точные (в рамках S -модели) выражения (25), (26) для нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' .

При превышениях над порогом ≈ 10 дБ возбуждаются новые группы спиновых волн с $\theta = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ и т.д.

В этих случаях в § 2 для численного моделирования поведения ПСВ и вычисления необходимых коэффициентов гамильтониана использовалась ЭВМ^x.

В § 3 приведены результаты экспериментального исследования поведения ПСВ за порогом параллельной накачки в качествен-

x) Вычисления были проделаны на БЭСМ-6 Вычислительного центра СО АН СССР.

ных монокристаллах YIG . Кристаллы YIG имеют высокую "добротность" ($\gamma/\omega \sim 10^{-4}$), содержат минимальное количество примесей и дефектов и обладают слабой кристаллографической анизотропией. Эти свойства делают их почти идеальным объектом для проверки S -модели. Предметом проверки были предсказания S -модели о поведении стационарных нелинейных восприимчивостей χ' и χ'' . Результаты их экспериментального изучения, обсужденные в § 4, подтверждают основные качественные выводы S -модели, в частности, то, что при не слишком больших превышениях над порогом (до ~ 8 дБ для YIG), волны в k -пространстве распределены вблизи линии $\theta_k = \pi/2$, $\tilde{\omega}_k = 0$. Обнаружено хорошее количественное согласие теоретических и экспериментальных величин χ' и χ'' для образцов различной формы.

В § 5 обсуждается влияние нелинейного затухания на поведение ПСВ при параллельной накачке. Показано, что нелинейное затухание не объясняет основных свойств запорогового состояния и, как правило, не играет заметной роли.

Результаты настоящей работы показывают, что S -модель описывает реальную ситуацию за порогом параллельной подкачки в монокристаллах.

§ 1. Теория стационарного состояния

1. Основные уравнения. Рассмотрим ПСВ при параллельной накачке в рамках сформулированной во Введении S -модели, т.е. уравнений движения (2) с гамильтонианом (1). В переменных n_k и ψ_k , определенных формулой (3), получим

$$\frac{1}{2} \frac{dn_k}{dt} = n_k \left\{ -\gamma_k + \text{Im} (P_k^* e^{i\psi_k}) \right\} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi_k}{dt} = \tilde{\omega}_k + \text{Re} (P_k^* e^{i\psi_k}) \quad (9)$$

Здесь нелинейная расстройка $\tilde{\omega}_k$ и полная накачка P_k определены формулами (6) и (4).

В стационарном состоянии, как показано в [1]

$$\tilde{\omega}_k = -\text{Re} (P_k^* e^{i\psi_k}) = 0 \quad (10)$$

$$|P_k| \leq \gamma_k \quad (11)$$

Для тех пар, амплитуда n_k которых не равна нулю, приход энергии от полной накачки в точности компенсирует их затухание, т.е.

$$|P_k| = \gamma_k \quad (12)$$

Изучим свойства стационарного состояния. Согласно (4), (10), (12), имеем

$$hV_k + \sum_{k'} S_{kk'} n_{k'} e^{i\psi_{k'}} + i\gamma_k e^{i\psi_k} = 0 \quad (13)$$

Из аксиальной симметрии задачи ясно, что амплитуда не зависит от азимутального угла φ_k :

$$n_k \equiv n_{\theta_k, \varphi_k} = n_{\theta_k} \quad (14)$$

и фазовый сдвиг между внешней накачкой

$$hV_k = hV_{\theta_k} e^{2i\varphi_k} \quad (15)$$

и фазой ψ_k пар одинаков для всех пар с данным θ_k , т.е.

$$\psi_k \equiv \psi_{\theta_k, \varphi_k} = \psi_{\theta_k} + 2\varphi_k \quad (16)$$

Подставляя (14), (15) и (16) в уравнение (13), получим:

$$hV_0 + \sum_{\theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta'} e^{i\psi_{\theta'}} + i\gamma_0 e^{i\psi_0} = 0 \quad (17)$$

Здесь

$$S_{\theta\theta'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\kappa\kappa'} e^{-2i(\psi_{\kappa} - \psi_{\kappa'})} d(\psi_{\kappa} - \psi_{\kappa'}) \quad (18)$$

и

$$N_{\theta} = \sum_{\psi_{\kappa}} n_{\theta\kappa} \quad (19)$$

В пункте 3 мы покажем, что в широком диапазоне изменения накачки (до 8-12 дБ) единственным устойчивым состоянием является такое, в котором возбуждены только пары с одним $\theta_{\kappa} = \pi/2$

Для них из (17) легко получим:

$$N_1 = \frac{\sqrt{(hV_1)^2 - \gamma^2}}{|S_{11}|} \quad (20)$$

$$\sin \psi_1 = \frac{\gamma}{hV_1} \quad \cos \psi_1 = -\frac{S_{11} N_1}{hV_1}$$

2. Нелинейные восприимчивости. Вычислим удобную для экспериментального определения величину - восприимчивость χ'' , являющуюся отношением мощности, поглощенной системой ПСВ, к мощности накачки $\frac{1}{2} \omega_p h^2$:

$$\chi'' = -\frac{2 \sum_{\kappa} \operatorname{Re}(V_{\kappa} n_{\kappa} e^{-i\psi_{\kappa}})}{h} \quad (21)$$

Аналогичное выражение получается для вещественной части восприимчивости:

$$\chi' = -\frac{2 \sum_{\kappa} \operatorname{Im}(V_{\kappa} n_{\kappa} e^{-i\psi_{\kappa}})}{h} \quad (22)$$

характеризующей изменение резонансной частоты резонатора на качки под влиянием образца.

В аксиально симметричном случае формулы для χ' , χ'' упрощаются, именно:

$$\chi'' = -\frac{2 \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \sin \psi_{\theta}}{h} \quad (23)$$

$$\chi' = -\frac{2 \sum_{\theta} V_{\theta} N_{\theta} \cos \psi_{\theta}}{h} \quad (24)$$

Используя формулы (20), получим отсюда явные выражения для восприимчивости в том важном случае, когда возбуждены только пары с $\theta_{\kappa} = \pi/2$:

$$\chi'' = \frac{2V_1^2}{|S_{11}|} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2} \quad (25)$$

$$\chi' = \frac{2V_1^2}{S_{11}} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} \quad (26)$$

где $\zeta^2 = \frac{h^2}{h_1^2}$ - превышение мощности накачки над порогом. График зависимостей (25), (26) приведен на рис.1 для положительного S_{11} . В общем случае знак χ' совпадает со знаком S_{11}

Используя формулы (4) и (П.10) для V_1 и S_{11} , найдем значение χ'' в максимуме (при $\zeta^2 = 2$):

$$\chi''_m = \frac{1}{8\pi(N_{\neq} - 1 + \sqrt{\omega_p^2/\omega_m^2 + 1})} \quad (27)$$

Отметим, что для изотропных (или слабоанизотропных) ферромагнетиков, вообще говоря, можно было ожидать χ''_m , поскольку взаимодействие ПСВ с накачкой и между собой обусловлено одной и той же диполь-дипольной энергией. То обстоятельство, что χ''_m для ферромагнетиков порядка 10^{-2} , обусловлено, как видно из (27), численным коэффициентом $1/8\pi$.

3. Поэтапное возбуждение ПСВ. Важное свойство стационарного состояния ПСВ заключается в том, что в рамках S -модели не происходит распыливание пакета ПСВ в κ -пространстве, несмотря на то, что амплитуда внешней накачки hV_κ существенно превышает затухание волн γ_κ . Это происходит из-за того, что для ПСВ с $\theta_1 = \pi/2$ полная накачка $|P_1| = \gamma_1$, а для других θ $|P_\theta| < \gamma_\theta$. Убедиться в этом можно непосредственным вычислением P_θ . Подставляя (15), (16), (19) и (20) в (4), получим:

$$P_\kappa \equiv P_{0\kappa}, \quad \varphi_\kappa = P_{0\kappa} e^{2i\varphi_\kappa} \quad (28)$$

$$P_\theta = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{V_1}} \left\{ (S_{01} V_1 - S_{11} V_\theta) N_1 - i \gamma_1 V_\theta \right\}$$

Отсюда можно получить (особенно просто в случае

$S_{11} N_1 \ll \gamma_1$), что

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{|P_\theta|}{\gamma_\theta} \right) \Big|_{\pi/2} = 0 \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{|P_\theta|}{\gamma_\theta} \right) \Big|_{\pi/2} < 0$$

Таким образом, $P_\theta < \gamma_\theta$ для θ , близких к $\pi/2$,

и эти волны не возбуждаются. Вместо распыливания пакета ПСВ при некотором превышении h_2 происходит возбуждение второй группы пар с $\theta_2 - \frac{\pi}{2} \sim 1$, где разложение P_θ в ряд по $\theta - \frac{\pi}{2}$ уже не справедливо. Используя выражение (28) для полной накачки P_θ , получим из условия баланса энергии

$$|P_\theta| = \gamma_\theta \quad \text{порог рождения второй группы пар:}$$

$h_2 = \min\{h_\theta\}$ при $\theta = \theta_2$, где

$$h_\theta^2 = h_1^2 \left(1 + \frac{S_{11}}{\gamma_1^2} \frac{\gamma_\theta^2 V_1^2 - \gamma_1^2 V_\theta^2}{(S_{01} V_1 - S_{11} V_\theta)^2} \right) \quad (29)$$

Подобное выражение получено нами в [1]. При простейших предположениях $\gamma_\theta = \gamma$ и $S_{\theta\theta'} = S$ получаем, что

$h_2/h_1 = 2$ $\theta_2 = 0$. В действительности же для кубических ферромагнетиков реальная функция $S_{\theta\theta'}$ сильно отличается от константы, что приводит к значительному увеличению порога h_2 .

Прежде всего отметим, что коэффициент $S_{\kappa\kappa'}$ обладает свойством симметрии $S_{\kappa\kappa'} = S_{\kappa',\kappa}$, откуда следует $S_{\theta,\theta'} = S_{\pi-\theta,\theta'}$. Кроме того, из (18) следует

$S_{01} = 0$ при $\theta = 0$. Эти свойства коэффициента S_{01} позволяют разложить его в ряд по степеням $\sin^2 \theta$. Если разложение содержит один член $S_{01} = S_{11} \sin^2 \theta$, то, как следует из (29), (15) и (7) $h_\theta = \infty$, и при любой мощности накачки возбуждены только волны с $\theta = \pi/2$.

Если ограничиться двумя членами разложения

$$S_{01} = S_1 \sin^2 \theta + S_2 \sin^4 \theta \quad (30)$$

и подставить (30) в (29), то в предположении $\gamma_\theta = \gamma = \text{const}$ получаем:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \theta_2 \approx 51^\circ$$

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} \approx 1 + 11 \left(\frac{S_1 + S_2}{S_2} \right)^2 \quad (31)$$

Даже, если $S_2 \approx S_1$, порог рождения второй группы пар имеет порядок 6-12 дБ.

В рамках S -модели существует неограниченное число порогов h_1, h_2, \dots и т.д. В действительности, существуют также физические причины, приводящие к некоторому расплыванию распределения ПСВ по θ_k . Одна из них связана с рассеянием ПСВ на магнитных неоднородностях в "плохих" образцах. Другая - с влиянием "собственного шума" /6/, возникающего из-за недиагональных по парам членов гамильтониана взаимодействия волн, не учитываемых в S -модели. Собственный шум приводит к расплыванию на величину $\Delta\theta \sim \frac{SN}{\gamma} \sqrt{\frac{\Gamma}{\omega}}$. Считая $\gamma/\omega \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, получим $\Delta\theta \sim 10^\circ$ при превышении порядка 10 дБ ($SN/\gamma \approx 3$).

§ 2. Численное моделирование поведения ПСВ в YIG

1. Основная модель. При изучении распределения ПСВ в k -пространстве с помощью ЭВМ удобно исходить не из нелинейных стационарных уравнений (17), а из временных уравнений (8), (9), для которых существует регулярная процедура решения методом итерации по времени. Аналогично тому, как это мы делали в § 1, запишем уравнение (8), (9) в виде, учитывающем аксиальную симметрию задачи

$$\frac{1}{2} \frac{dN_\theta}{dt} = N_\theta \left\{ -\gamma + hV_\theta \sin \psi_\theta + \sum_{\theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta'} \sin(\psi_\theta - \psi_{\theta'}) \right\}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi_\theta}{dt} = hV_\theta \cos \psi_\theta + \sum_{\theta'} S_{\theta\theta'} N_{\theta'} \cos(\psi_\theta - \psi_{\theta'})$$

(32)

Здесь мы выписали только уравнение для пар на "резонанс -

ной" поверхности $\tilde{\omega}_k = 0$, определяемой условием внешней устойчивости. Это сделано на том основании, что в стационарном состоянии амплитуда всех прочих пар равна нулю. Поэтому уравнения (32) правильно описывают стационарное состояние, что же касается характера переходного режима, то они его передают лишь качественно. В интервале углов θ от 0 до $\pi/2$ мы ограничились 21 парой: $\theta_j = \pi j / 40$, где $j = 0, 1, 2, \dots, 20$; удвоение числа пар не влияет заметно на результат.

Коэффициенты $S_{\theta\theta'}$ диагонального по парам гамильтониана взаимодействия ПСВ, определяющие решение уравнений (32), зависят от внешнего поля H_0 , намагниченности, формы образца и т.п. Они вычислялись по формулам (П-4) (П-9) и (18) для диска и сферы ($N_z = 0, 1/3, 1$) иттриевого граната для ПСВ с $k = 1,3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, с помощью ЭВМ. На рис. 2 приведена для примера зависимость $S_{\theta\pi/2}$ для образцов YIG различной формы. Знание этой функции достаточно для вычисления порога h_2 рождения второй группы пар и их угла θ_2 (см. (29)). Отметим также, что величина $S_{\pi/2, \pi/2}$, определяющая по формулам (25) и (26) нелинейные восприимчивости χ' и χ'' , задается простой формулой (П10), полученной в Приложении.

2. Результаты численного эксперимента

При решении уравнений (32) использовались следующие начальные условия, моделирующие равновесное распределение магнов: N_θ не зависело от θ и было на много порядков меньше стационарного значения S -модели, фаза $\psi_\theta(0)$ была случайной. На рис. 3 в качестве примера изображены временные зависимости χ' и χ'' для диска YIG ($N_z = 0$) и превышения 3 дБ ($hV = \sqrt{2} \gamma$). Видно, что система ПСВ действительно выходит на стационар, описываемый "S-моделью" (в частности $\chi' = \chi''$ при этом превышении).

Как и следовало ожидать, первоначально широкий пакет по θ в процессе временной эволюции стягивался в точку $\theta = \pi/2$ при превышениях, меньших 5 дБ.

На рис.4, 5, 6 приведены вычисленные зависимости стационарных значений χ' и χ'' от мощности накачки для сферы YIG ($N_z = 1/3$) и дисков ($N_z = 0; 1$) YIG при $\kappa = 1,3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$. Здесь же для сравнения пунктиром приведены соответствующие зависимости χ' и χ'' , полученные в модели одной пары с $\theta = \pi/2$. Стрелкой отмечены пороги рождения второй пары: $h_2/h_1 = 1,90, 1,95$ и $2,40$ для $N_z = 0, 1/3$ и 1 . Угол рождения второй пары θ_2 лежит в пределах $45^\circ \div 55^\circ$, т.е. совпадает количественно с предсказанным аналитически (формула (31)) несмотря на то, что приближенная формула (30) описывает функцию $S_{0\pi/2}$ (рис.2) лишь качественно. На рис.4,5,6 видно, что рождение второй пары особенно сильно влияет на восприимчивость χ' , которая в конкретной ситуации YIG проходит через максимум, в то время, как в модели одной пары монотонно растет. Отметим, что максимум на кривой χ' сразу за порогом рождения второй пары вовсе не является общим свойством "S модели", при других коэффициентах $S_{00'}$ вторая пара может приводить к еще более быстрому росту χ' .

Численный эксперимент показал, что стационарные состояния в виде одной и двух пар можно различить по характеру переходного процесса: а именно, рождение второй пары, при небольшом превышении над её порогом h_2 происходит с некоторой задержкой по времени. Для иллюстрации этого на рис.7 зависимость от времени (в единицах $1/2\tau$) для диска ($N_z = 0$) и $hV = 1,9\tau; 2,2\tau; 2,5\tau$.

Видно, что при $hV = 1,9\tau$ (до порога h_2) происходит колебательный процесс установления стационарного значения χ' за время порядка $1/\nu(h-h_1)$. При $hV = 2,2\tau$ (сразу за порогом $h_2V = 2\tau$) за такое же время устанавливается квазистационарное значение χ' , соответствующее модели одной пары (пунктир на рис.5). Затем аperiodически за большое время $\sim 1/\nu(h-h_2)$ система приходит к стационару, при котором χ' меньше, чем квазистационарное значение. На кривой $hV = 2,5\tau$ рис.7 различие между квазистационарным и стационарным значением χ' становится больше, а времена их

установления отличаются меньше.

Численный эксперимент позволил получить интересную информацию о функции распределения N_θ при различных превышениях над порогом.

На рис.8 приведены эти зависимости для сферы YIG, полученные из решения модифицированных (с учётом собственного шума) уравнений (32). Собственный шум, как уже отмечалось в § 1, приводит к тому, что вместо дискретных пар в κ -пространстве возникают узкие пакеты. Интересно, что амплитуда второй пары может оказаться больше исходной, а её положение θ_2 зависит, вообще говоря, от превышения. На рис.8 функция N_θ при $hV = 4\tau$ имеет уже три максимума. Порог рождения третьей пары $h_3 \approx 3,5\tau$, а $\theta_3 \approx 70^\circ$.

В заключение отметим, что знание функции N_θ может оказаться полезным при постановке и интерпретации новых экспериментов, например, по рассеянию света, нейтронов и звука на параметрических спиновых волнах.

§ 3. Нелинейные восприимчивости χ', χ''

Результаты экспериментов

Наиболее удобным методом экспериментального определения χ', χ'' является измерение реакции электромагнитного резонатора накачки на помещенный в него образец. Изменение добротности резонатора Q определяет мнимую часть восприимчивости.

$$2\pi\chi'' = A \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} \right)$$

а изменение собственной частоты ω - её вещественную часть

$$2\pi\chi' = A \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Здесь Q_0 и ω_0 - нагруженная добротность и собственная частота невозмущенного резонатора

$$A = \frac{\int h^2 d\nu}{\int_{\nu_p} h^2 d\nu}$$

коэффициент "заполнения" резонатора, по порядку величины равный отношению объема образца V_p к объему резонатора V_r .

Измерения проводились в прямоугольном резонаторе типа TE_{102} с $Q_0 = 1800$ на частоте $\omega = 2\pi \cdot 9,40 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$

Использовались методика измерений "на проход" и "на отражение". В режиме "на проход" регистрировалась мощность $P_{\text{вых}}$, проходящая через резонатор. Она связана с χ'' следующим образом

$$\chi'' = \frac{1}{2AQ_0} \left(\sqrt{\frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{вх}}}} - 1 \right) \quad (33)$$

Здесь $P_{\text{вх}}$ - мощность, падающая на резонатор, причём $P_{\text{вх}}$ и $P_{\text{вых}}$ измеряются в единицах пороговой мощности на выходе и входе соответственно. В режиме "на отражение" регистрируется мощность $P_{\text{отр}}$, отраженная от резонатора; она связана с χ'' соотношением:

$$\chi'' = \frac{1}{2\pi AQ_0} \frac{\sqrt{P_{\text{отр}}/P_{\text{вх}}}}{1 - \sqrt{P_{\text{отр}}/P_{\text{вх}}}} \quad (34)$$

справедливым в случае критической связи резонатора с волноводом (отражение от невозмущенного резонатора равно нулю).

Отметим, что поле h в резонаторе, действующее на образец, в обеих методиках определялось по мощности на выходе $P_{\text{вых}}$, так как именно $P_{\text{вых}}$, а не $P_{\text{вх}}$ пропорциональна h^2 . Это позволило автоматически учесть обратное влияние образца на поле h , которое является существенным вблизи порога даже при малом A .

В качестве генератора накачки использовался магнетрон непрерывного действия мощностью ~ 15 Вт, который модулировался прямоугольными импульсами длительностью 300 мксек частотой повторения 25 имп/сек. Частота накачки ω_p в небольших пределах могла изменяться механическим образом с помощью поршня

и микрометрического винта. Таким способом компенсировалась расстройка собственной частоты резонатора и измерялась величина χ' . Погрешность измерения χ' состояла при этом порядка 30-40%.

Следует отметить, что погрешность измерения абсолютной величины χ'' также была порядка 30-40%, что в основном обусловлено неконтролируемым изменением коэффициента заполнения из-за влияния держателя образца, клея и т.п.

На рис.9 изображены типичные экспериментальные зависимости восприимчивостей χ' и χ'' от уровня мощности для сферического образца иттриевого граната, намагниченного вдоль главных кристаллографических направлений /100/, /110/ и /111/. В направлениях /111/ и /110/ наблюдались автомодуляции χ' и χ'' , порог их возникновения отмечен стрелкой. Для этих направлений приведены средние значения восприимчивостей.

При изменении постоянного магнитного поля H в интервале, соответствующем возбуждению коротких спиновых волн $H < H_c$, характер зависимостей $\chi'(H^2)$ и $\chi''(H^2)$ существенно не изменялся. Особенно это относится к восприимчивости $\chi''(H^2)$. Поведение же $\chi'(H^2)$ оказывается более чувствительным к изменению H . Для примера на рис.10,11 приведены зависимости $\chi'(H^2)$ и $\chi''(H^2)$ при других полях H .

Результаты измерений $\chi'(H^2)$ и $\chi''(H^2)$ для диска, намагниченного параллельно и перпендикулярно плоскости, приведены на рис.12,13 и 14. Внешнее поле H выбиралось в зависимости от кристаллографической ориентации и размагничивающего фактора N_d так, чтобы волновой вектор k параметрических спиновых волн с $\theta_k = \pi/2$ был одинаков для всех случаев, изображенных на одном рисунке. А именно, на рис.9 и 12: $H = H_c - 100$ э, $k = 1,3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$; на рис.10,13: $H = H_c - 400$ э, $k = 2,6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$; на рис.11,14: $H = H_c$, $k \approx 0$.

§ 4. Обсуждение экспериментальных результатов

1. Зависимость χ'' от уровня мощности. Из сравнения экспериментальных зависимостей $\chi''(S^2)$ (рис. 9-14) с теоретической зависимостью $\chi''(S^2)$ (рис. 1) видно их качественное согласие. Однако имеется некоторое количественное расхождение: например, в эксперименте максимум $\chi''(S^2)$ достигается обычно при превышении мощности над порогом 5 - 6 дБ, а в "S-модели" - при 3 дБ. Согласно "S-модели" (формула (25))

$$S^2 \chi''(S^2) = 2 \chi''_m (S^2 - 1)^{1/2}$$

Для количественного сравнения этой формулы с экспериментом на рис. 15 теоретические и экспериментальные зависимости $\chi''(S^2)$ изображены в новых координатах $\lg(\chi'' S^2)$ от $\lg(S^2 - 1)$

Видно, что рост поглощенной мощности за порогом $P_{\text{погл.}} \sim \chi'' S^2$ можно приближенно описать эмпирической формулой

$$P_{\text{погл.}} \sim (S^2 - 1)^\beta \quad (35)$$

Коэффициент β для разных образцов и условий опыта (величина ориентации кристалла и т.п.) менялся в пределах от 0,7 до 1. При изменении β соответственно изменялся уровень мощности S^2 , при котором χ'' максимально, а именно из (35)

$$S_m^2 = \frac{1}{1 - \beta}$$

Величины β наиболее близкие к теоретическому значению $\beta_{\text{теор.}} = 0,5$ наблюдаются для ориентации /100/, в которой подавлены низкочастотные автоколебания. Поскольку стационарная S-модель не учитывает автоколебаний, следует соблюдать осторожность при сравнении формулы (25) с экспериментальными результатами, полученными для ориентации /111/ и /110/, где наблюдаются интенсивные автоколебания. В дальнейшем при сравне-

нии теории с экспериментом будут в основном браться результаты, полученные для ориентации /100/.

Различие теоретической зависимости $P_{\text{погл.}}(S^2)$ ($\beta = 0,5$) и экспериментальной ($\beta \approx 0,7$) не является особенно удивительным, если иметь в виду, что реальные кристаллы обычно содержат некоторое количество неоднородностей, дефектов и т.п. Магнитные неоднородности рассеивают параметрические спиновые волны, нарушая жесткие фазовые корреляции внутри каждой пары $\langle a_k a_{-k} e^{i\omega t} \rangle \langle a_k a_{-k}^* \rangle$. Это приводит к ослаблению параметрического взаимодействия спиновых волн и тем самым к более быстрому ($\beta > 0,5$) росту $P_{\text{погл.}}$ при увеличении уровня накачки. Более определенные заключения о влиянии магнитных неоднородностей на поведение ПСВ можно будет сделать после модификации "S-модели" применительно к неоднородным средам.

2. Анизотропия формы χ'' . Максимальное значение $\chi''(S^2)$ определяется формулой (27). Подставляя в неё конкретные значения $\omega_m = 2\pi \cdot 4,9 \cdot 10^9$ гц ($\gamma I G$) и $\omega_p = 2\pi \cdot 9,4 \cdot 10^9$ гц получим, что

$$\chi''_m = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{N_z + 1,18} \quad (36)$$

В таблице 1 приведены экспериментальные и теоретические значения χ''_m для сферы ($N_z = \frac{1}{3}$) и диска, намагниченного параллельно ($N_z = 0$) и перпендикулярно ($N_z = 1$) плоскости.

Подчеркнем, что значения κ , приведенные в таблице, относятся к спиновым волнам с $\theta_k = \pi/2$. При этом собственная частота спиновых волн ω_k и коэффициенты гамильтониана $\mathcal{H}_k, \kappa', \kappa''$, описывающие трехволновые взаимодействия и приводящие, в частности, к нелинейному затуханию, одинаковы внутри каждого столбца. Единственное отличие образцов с разными N_z заключается в коэффициентах гамильтониана, описывающих четырехволновые взаимодействия. Таким образом, наблюдаю-

Таблица 1. Экспериментальные и теоретические значения χ''_m

Образец	Экспер. $\chi''_m \cdot 10^{+3}$			Теория $\chi''_m \cdot 10^3$
	$\kappa \approx 0$	$\kappa = 1,3 \cdot 10^5$	$\kappa = 2,6 \cdot 10^5$	
Сфера	23	23	18	27
Диск \perp	11	15	16	18
Диск \parallel	20	19	17	34

шаяся на эксперименте анизотропия формы χ''_m определенно свидетельствует о том, что четырехволновое взаимодействие ответственно за поведение спиновых волн за порогом.

Из таблицы видно разумное количественное совпадение выводов S -модели с экспериментальными результатами. Особенно следует отметить правильный характер анизотропии формы χ''_m . Из теории следует для диска отношение $\chi''_{\perp} / \chi''_{\parallel} = 0,53$.

Среднее значение этого отношения, полученное из эксперимента, оказывается порядка 0,75. Отметим, что численное сравнение χ''_m для диска и сферы не удастся надежно провести из-за различия коэффициентов заполнения резонатора в обоих случаях, которое неизвестно с достаточной для сравнения степенью точности. Тем не менее абсолютная величина χ''_m для сферы хорошо согласуется с теоретическим значением¹⁾.

1) Дополнительной проверкой правильности S -модели является сравнение её с экспериментальными результатами для других кубических кристаллов. Так для сферы кальций-висмут-ванадиевого граната (CaBiVIG , $4\pi M = 600$ гс) экспериментальное значение $\chi''_m \sim 5 \cdot 10^{-3}$, что согласуется с теоретическим значением $\chi''_m \approx 8 \cdot 10^{-3}$, вычисленным по формуле (27).

Количественное согласие экспериментальных результатов с формулой (27) показывает, что S -модель описывает наиболее существенную часть взаимодействия ПСВ.

3. Вещественная восприимчивость χ' . В отличие от мнимой части восприимчивости χ'' , характеризующей в основном интегральную интенсивность ПСВ, вещественная часть χ' , вообще говоря, является более тонкой характеристикой системы. Она характеризует не только интегральную интенсивность, но и детали распределения Π_{κ} в κ -пространстве, автоколебания и т.п. Это обстоятельство подтверждается экспериментальными данными на рис. 9, 10, 11, показывающими зависимость $\chi'(S^2)$ для кристаллографических направлений $/100/$, $/110/$, $/111/$. Наблюдаемая анизотропия $\chi'(S^2)$ существенно больше, чем $\chi''(S^2)$ что связано с автоколебаниями, существующими в $/110/$ и $/111/$ ориентациях. Интересно, что наименьшее значение χ' наблюдается в направлении $/111/$, где происходят наиболее интенсивные автоколебания. Отсюда следует, что автоколебания, не влияя существенно на величину χ'' , правильно предсказываемую S -моделью, могут уменьшить вещественную восприимчивость χ' в несколько раз. Мы надеемся, что эти особенности поведения при автоколебаниях можно будет объяснить в рамках нестационарной S -модели.

Обсудим теперь поведение χ' в стационарном режиме, который наблюдается для ориентации $/100/$. Прежде всего обратим внимание на то, что для YIG $\chi' > 0$. Это согласуется с положительным знаком коэффициента S_{11} (см. Приложение, формула П10) в полном соответствии с предсказанием S -модели (§ 1).

Абсолютная величина χ' , как видно из рис. 9-11, близка к величине χ'' и превышает χ'' при больших S^2 . Зависимость $\chi'(S^2)$ до превышений 7-10 дБ близка к теоретической (рис. 1, формула (26)), рассчитанной для стационарного состояния в виде одной группы пар с $\theta_{\kappa} = \pi/2$. В частности пересечение кривых $\chi'(S^2)$ и $\chi''(S^2)$ происходит вблизи максимума χ'' .

При дальнейшем увеличении S^2 наблюдается резкое расхождение между экспериментом и теоретической зависимостью (26). При превышениях 7-10 дБ наблюдается максимум, а при больших превышениях спад χ' . Такое поведение χ' полностью коррелирует с результатами численного эксперимента, показанными на рис. 4, 5, 6.

В таблице 2 приведены экспериментальные и теоретические значения величины максимума χ'_m и его положения S_m^2 для образцов YIG разной формы. Здесь же даны отношения χ'_m/χ''_m , экспериментальные значения которых определяются с большей точностью, чем абсолютные величины χ' и χ'' . Все величины приведены для $H = H_c - 100$ э, $k = 1,3 \cdot 10^5$ см⁻¹.

Таблица 2

Образец	$\chi'_m \cdot 10^3$ (эксп.)	$\chi'_m \cdot 10^3$ (теор.)	$\left(\frac{\chi'_m}{\chi''_m}\right)_{\text{эксп.}}$	$\left(\frac{\chi'_m}{\chi''_m}\right)_{\text{теор.}}$	S_m^2 (эксп.)	S_m^2 (теор.)
Сфера	32	40	1,4	1,5	8	6
Диск //	27	50	1,4	1,5	8	6,5
Диск ⊥	22	30	1,5	1,7	12	8

Удовлетворительное согласие между теорией и экспериментом подтверждает предсказание S-модели о поэтапном возбуждении ПСВ. А именно, при превышениях $S^2 < S_m^2$ в YIG возбуждена одна группа ПСВ с $\theta_1 \approx 90^\circ$. Экспериментально обнаруженный максимум на кривой $\chi'(S^2)$ обусловлен рождением второй группы ПСВ с $\theta_2 \approx 50^\circ$.

4. Излучение в поперечный канал. Мы провели прямой эксперимент, свидетельствующий о пороговом возбуждении ПСВ с θ_k .

отличными от 90° . Сфера YIG помещалась в цилиндрический резонатор TE₁₁₂ с двумя вырожденными ортогональными типами колебаний. Один из типов $k_1 // H_0$ использовался для накачки ПСВ, второй тип $k_2 \perp H_0$ служил для приёма сигнала. Развязка между каналами составляла 50-60 дБ. На рис. 16 показана зависимость мощности сигнала в поперечном канале от мощности накачки.

Излучение в поперечный канал возникает из-за нелинейного взаимодействия между ПСВ и однородной прецессией намагниченности, описываемом гамильтонианом:

$$H_{\text{int}} = \sum_k \{ V_{0,k}^* a_{0,k}^* a_{k,-k} + \text{к.с.} \}$$

где $V_{0,k,-k} \sim \sin \theta_k \cos \theta_k$ (см. Приложение, формула (П7)). Отсюда видно, что ПСВ с $\theta_k = \pi/2$ не излу-

чает в поперечный канал. Небольшое излучение, которое наблюдается на рис. 16 до превышений $S^2 < 9$ дБ, связано с недостаточной хорошей развязкой и некоторым расплыванием пакета ПСВ с $\theta_k = \pi/2$. При $S^2 = 9$ дБ сигнал в поперечном канале резко возрастает, что очевидно свидетельствует о возбуждении новой группы ПСВ с θ_k , сильно отличающимся от 90° 1). Величина мощности накачки, при которой возникает это явление, соответствует максимуму χ' .

1) Отметим, что в изотропном ферромагнетике излучение ПСВ в поперечный канал отсутствует по соображениям симметрии. Замеченное нами излучение связано с кубической анизотропией YIG.

§ 5. О роли нелинейного затухания

Оценим роль, которую может играть в ограничении спиновых волн их линейное затухание. Можно выделить две группы механизмов такого затухания - за счёт взаимодействия ПСВ с термостатом магнонов и за счёт взаимодействия ПСВ между собой.

К механизмам первого типа относится предложенный Шлеманом / 4 / разогрев термостата магнонов параметрическими волнами. Предполагалось, что затухание ПСВ

$$\gamma_n = \gamma_0 (1 + \alpha \chi'' S^2) \quad (37)$$

возрастает пропорционально поглощенной мощности $\frac{1}{2} \omega_p h^2 \chi''$. Из условия баланса энергии

$$hV = \gamma_0 (1 + \alpha \chi'' h^2)$$

получаем выражение для χ''

$$\chi'' = \frac{S-1}{\alpha S^2}, \quad (38)$$

которое при соответствующем выборе α ($\alpha \approx 10$) неплохо согласуется с экспериментом. Однако, простая оценка показывает, что $\alpha \ll 1$ для не слишком низких температур.

Будем считать, что затухание ПСВ $\gamma_n = c N_T$, где

c - некоторая константа, N_T - общее число тепловых магнонов. Его можно оценить из соотношения:

$$k \omega_T \gamma_T (N_T - N_T(0)) + \omega_p h^2 \chi'' = 0,$$

где $N_T(0)$ - термодинамически равновесное число магнонов, ω_T - их характерная частота. Отсюда

$$\gamma_n = c N_T(0) \left\{ 1 + \chi'' h^2 \frac{\omega_p}{k \omega_T \gamma_T N_T(0)} \right\}.$$

Сравнивая эту формулу с (32), получим:

$$\alpha = \frac{\omega_p h^2}{k \omega_T \gamma_T N_T(0)} \approx \frac{4\pi \gamma_0^2 \omega_p^3}{\gamma_T \omega_T \omega_M^3} \left(\frac{M_S}{M_S - M_0} \right),$$

где M_S - намагниченность насыщения (при $T = 0$). При комнатной температуре получим $\alpha \sim 10^{-5} - 10^{-7}$, что не согласуется с экспериментом на 6-8 порядков.

Другим механизмом является поглощение тепловым магноном двух параметрических магнонов. Этот механизм приводит к нелинейному затуханию ПСВ с декрементом (см. / 7 /)

$$\gamma_n = \gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0}{\omega_0} \frac{SN}{\omega_p} \right)^2$$

При превышениях под порогом $S-1 \Rightarrow \left(\frac{\gamma_0}{\omega_p} \right)^2$ он приводит к малым (порядка γ/ω) поправкам к S -модели.

Механизмы нелинейного затухания ПСВ за счёт их взаимодействия с тепловыми магнонами являются универсальными в том смысле, что не зависят от положения частоты накачки ω_p в спектре спиновых волн.

В противоположность этому, механизмы затухания ПСВ за счёт их взаимодействия между собой критичны к положению ω_p в спектре. Эти процессы, предложенные в работе Готлиба и Сула / 8 /, обусловлены процессами слияния двух, трех и более параметрических волн и приводит к декременту затухания

$$\gamma_n = \gamma_0 + \sum \eta_{kk'}^{(3)} \rho_{k'} + \sum \eta_{kk'k''}^{(4)} \rho_{k'} \rho_{k''} \approx \gamma^{(0)} + N \eta^{(3)} + \eta^{(4)} N.$$

Каждый член этого ряда отличен от нуля только при магнитном поле, меньшем некоторого характерного H_{3m} , H_{4m} и т.д. По порядку величины

$$\eta^{(3)} \approx \frac{|N_{2 \rightarrow 1}|^2}{\omega_k}, \quad \eta^{(4)} \approx \frac{|N_{3 \rightarrow 1}|^2}{\omega_k} \text{ и т.д.} \quad (39)$$

где V и G - коэффициенты гамильтониана (П4), определяемые формулами (П5), по порядку величины равны

$$V_{2 \rightarrow 1} \sim \sqrt{\frac{g}{M}} \omega_M \quad G_{3 \rightarrow 1} \sim \frac{g}{M} \omega_M$$

Наиболее эффективным является механизм слияния двух параметрических магнонов; для него

$$\chi''_{(3)} = \frac{2|V_k|^2}{\eta(3)} \frac{5-1}{5} \quad (40)$$

Для четырехмагнонного процесса

$$\chi''_{(4)} = \frac{2|V_k|^2}{\sqrt{\eta_0} \eta(4)} \frac{\sqrt{5-1}}{5} \quad (41)$$

Готлиб и Сул / 8 / предположили, что механизм нелинейного затухания является главной причиной ограничения амплитуды ПСВ за порогом. В пользу этой гипотезы говорит то обстоятельство, что величина χ'' , определяемая из формулы (40) совпадает по порядку величины с экспериментальными данными. Кроме того, при поле $H = H_{3m}$, при котором включается механизм слияния двух магнонов, наблюдается скачок восприимчивости $\chi'' / 9$.

Однако эта гипотеза противоречит эксперименту по следующим пунктам:

1. Характер поведения χ'' , определенный из формулы (40), приводит к насыщению при больших ξ , что противоречит эксперименту, в котором наблюдается спад χ'' с ростом ξ .

2. Величина скачка восприимчивости в поле $H = H_{3m}$ равна $\chi''_{(3)} / \chi''_{(4)}$ и, как видно из (40), (41), по порядку величины

$$\chi''_{(3)} / \chi''_{(4)} \approx \sqrt{\frac{\eta}{\omega}} \frac{\omega}{\omega_M} \approx 10^{-2}$$

тогда как реально наблюдаемый скачок составляет десятки процентов.

3. При небольших превышениях ξ^2 скачок χ'' в поле H_{3m} вообще отсутствует.

4. Если причиной ограничения ПСВ является нелинейное затухание, то $\chi'' = 0$ (или $\chi' \ll \chi''$). Эксперимент (см. § 4) дает $\chi' \sim \chi''$.

Все эти экспериментальные факты находят естественное объяснение, если учесть самосогласованное параметрическое взаимодействие пар ПСВ в рамках S -модели.

Из всех механизмов нелинейного затухания ПСВ только слияние двух магнонов может конкурировать с их параметрическим взаимодействием. Поэтому при $H > H_{3m}$, где этот процесс запрещен, нелинейное затухание не играет роли и χ'' определяется целиком S -моделью. При этом $\chi'' \sim |V|^2 / |S|$.

В области $H < H_{3m}$ одновременно играют роль и S -модель, и нелинейное затухание. При этом (как уже отмечалось раньше / 1 /):

$$\chi'' \approx \frac{|V|^2}{\sqrt{S^2 + \eta(3)^2} \sqrt{S^2 + \eta^2} / S}$$

Скачок восприимчивости равен $\frac{1}{\sqrt{S^2 + \eta^2} / S}$, что составляет десятки процентов и по порядку величины совпадают с экспериментом.

В рамках S -модели также естественно объясняется спад χ'' с ростом ξ^2 при $\xi^2 > 2$ (см. формулу (25)) и порядок величины χ' (см. формулу (26)). Что касается отсутствия скачка χ'' при небольших (меньше 6-8 дБ) превышениях над порогом, то этот факт наиболее убедительным образом свидетельствует в пользу S -модели.

Как уже отмечалось в рамках S -модели при $h < h_2$ возбуждены только волны с $\theta = \pi/2$. Для этих волн (см. Приложение, формула (П5), коэффициент, характеризующий слияние двух магнонов, тождественно обращается в нуль.

Таким образом, в кубическом ферромагнетике при мощностях накачки, недостаточных для возбуждения двух (или более) групп волн, нелинейное затухание не играет существенной роли.

Приложение

Запишем выражение для энергии изотропного ферромагнетика в виде / 10 /, / 11 /

$$W = -HM_z(0) + \frac{\omega_{ex}}{2gM_0} \sum_{\kappa} \vec{M}(\kappa) \vec{M}(\kappa)^* (\ell\kappa)^2 + \quad (\text{П1})$$

$$+ \frac{\omega_M}{2gM_0} \left\{ \sum_{\kappa} \frac{\vec{\kappa} \vec{M}(\kappa) \vec{\kappa} \vec{M}(\kappa)^*}{\kappa^2} - [N_x M_x^2(0) + N_y M_y^2(0) + N_z M_z^2(0)] \right\}, \quad (\text{П2})$$

где $\vec{M}(\kappa) = \sum_{\vec{r}} \vec{M}(\vec{r}) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}$

g - гиромагнитное отношение, ω_{ex}/g - обменное поле, $\omega_M = 4\pi g M_0$, $N_x + N_y + N_z = 1$ - размагничивающие факторы.

В выражении П1 перейдем к каноническим переменным a_{κ} , a_{κ}^* по формулам / 7 /

$$M_+(\kappa) = \sqrt{2gM_0} \left\{ a_{\kappa} - \right.$$

$$\left. - \frac{g}{2M_0} \sum_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3} a_{\kappa_1} a_{\kappa_2} a_{\kappa_3}^* \Delta(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa) \right\} \quad (\text{П3})$$

$$M_z(\kappa) = M_0 \Delta(\kappa) - g \sum_{1,2} a_1 a_2^* \Delta(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa)$$

где $M_+ = M_x + iM_y$, $\Delta(\kappa) -$ символ Кроникера: $\Delta(0) = 1$, $a_1 \equiv a_{\kappa_1}$

Энергия ферромагнетика (П1), записанная в канонических переменных, становится функцией Гамильтона :

$$H = \sum_{\kappa} A_{\kappa} a_{\kappa} a_{\kappa}^* + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} (B_{\kappa}^* a_{\kappa} a_{-\kappa} + B_{\kappa} a_{\kappa}^* a_{-\kappa}^*) +$$

$$+ \sum_{1,2,3} \{ V_{1,23}^* a_1^* a_2 a_3 + \text{к.с.} \} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{12,34} W_{12,34} a_1^* a_2^* a_3 a_4 \Delta(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4) + \quad (\text{П4})$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{1,2,3,4} \{ G_{1,234} a_1 a_2^* a_3^* a_4 \Delta(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4) + \text{к.с.} \}$$

где

$$A_{\kappa} = \omega_H - N_z \omega_M + \omega_{ex} (\ell\kappa)^2 + |B_{\kappa}|$$

$$B_{\kappa} = \omega_M \frac{\kappa_+^2}{2\kappa^2} \quad \kappa_+ = \kappa_x + i\kappa_y \quad (\text{П5})$$

$$A_0 = \omega_H - N_z \omega_M + \frac{N_x + N_y}{2} M_0$$

$$B_0 = \frac{\omega_M}{2} (N_y - N_x)$$

$$V_{1,23} = \frac{1}{2} (V_2 + V_3) \quad V_{\kappa} = -\omega_M \sqrt{\frac{g}{2M}} \frac{\kappa_z \kappa_+}{\kappa^2}$$

$$W_{12,34} = E_{12} + E_{34} + \frac{1}{4}(C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24})$$

$$- \frac{1}{4}(D_1 + D_2 + D_3 + D_4)$$

$$E_{\kappa\kappa'} = - \frac{g}{2M} \omega_{ex} l^2 \vec{\kappa} \vec{\kappa}'$$

$$C_{\kappa\kappa'} \equiv C(\kappa - \kappa') \quad C(\kappa) = \frac{g}{M} \omega_M \frac{\kappa_z^2}{\kappa^2}$$

$$C(0) = \frac{g}{M} \omega_M N_z$$

$$D_{\kappa} = \frac{g}{2M} \omega_M \frac{|\kappa_+|^2}{\kappa^2} = \frac{g}{M} |B_{\kappa}|$$

$$G_{1,234} = - \frac{1}{3} \frac{g}{M} (B_2 + B_3 + B_4)$$

Совершим теперь каноническое u, v преобразование, диагонализующее квадратичную часть H :

$$a = u_{\kappa} b_{\kappa} + v_{\kappa} b_{-\kappa}^*$$

где

$$u_{\kappa} = \sqrt{\frac{A_{\kappa} + \omega_{\kappa}}{2\omega_{\kappa}}}, \quad v_{\kappa} = - \frac{B_{\kappa}}{|B_{\kappa}|} \sqrt{\frac{A_{\kappa} - \omega_{\kappa}}{2\omega_{\kappa}}}$$

$$\omega_{\kappa}^2 = A_{\kappa}^2 - |B_{\kappa}|^2$$

в переменных b_{κ} :

$$H = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} b_{\kappa} b_{\kappa}^* +$$

(П6)

$$+ \sum_{1,2,3} \{ \tilde{V}_{1,23}^* b_1^* b_2 b_3 \Delta(\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3) + \frac{1}{3} \tilde{U}_{123}^* b_1 b_2 b_3 \cdot$$

$$\cdot \Delta(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + \text{c.c.} \} + \frac{1}{2} \sum_{1,2,3,4} \tilde{W}_{1,2,3,4}^* b_1^* b_2^* b_3 b_4 \Delta(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4) + \dots$$

где

$$\tilde{V}_{1,23} = \frac{1}{2} \{ (V_2 + V_3) u_1 u_2 u_3 + (V_2^* + V_3^*) v_1^* v_2 v_3 +$$

$$+ (V_1 v_1^* + V_1^* v_1) (u_2 v_3 + v_2 u_3) +$$

$$+ v_1^* (V_2 u_2 v_3 + V_3 u_3 v_2) + u_1 (V_2^* v_2 u_3 + V_3^* v_3 u_2) \}$$

$$\tilde{U}_{123} = \frac{1}{2} \{ V_1 u_1 (v_2 u_3 + v_3 u_2) +$$

$$+ V_2 u_2 (v_3 u_1 + v_1 u_3) + V_3 u_3 (v_1 u_2 + v_2 u_1) \} \quad (\text{П7})$$

Общее выражение для W еще более громоздко. Мы выпишем его в интересующем нас случае:

$$S_W(\kappa, \kappa') \equiv W_{\kappa, -\kappa; \kappa', -\kappa'} =$$

$$= W_1 (u_{\kappa}^2 u_{\kappa'}^2 + v_{\kappa}^2 v_{\kappa'}^{*2}) + 4W_2 u_{\kappa} u_{\kappa'} v_{\kappa} v_{\kappa'}^* -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g}{2M} \left\{ v_{\kappa} u_{\kappa'} (u_{\kappa} u_{\kappa'} [B_{\kappa}^* + 2B_{\kappa'}^*] + \right. \\
& + v_{\kappa} v_{\kappa'} (B_{\kappa'}^* + 2B_{\kappa}^*)) + \\
& + v_{\kappa'} u_{\kappa} [u_{\kappa} u_{\kappa'} (2B_{\kappa} + B_{\kappa'}) + \\
& \left. + (2B_{\kappa'} + B_{\kappa}) v_{\kappa} v_{\kappa'} \right\} \quad (П8)
\end{aligned}$$

где

$$W_1 = \frac{g}{2M} \left\{ \omega_{ex} (l\kappa)^2 - \omega_M \right\}$$

$$W_2 = \frac{g}{2M} \omega_M (N_{\frac{1}{2}} - 1)$$

Отметим, что в (П6) мы не выписали члены четвертого по - рядка типа $1 \rightarrow 3$ и $0 \rightarrow 4$, так как они не описывают взаимо - действие ПСВ друг с другом. Кроме членов типа $2 \rightarrow 2$ в это взаимодействие существенный вклад вносят члены гамильтониана (П6) третьего порядка во втором порядке теории возмущения. Этот вклад удобно учесть, совершив преобразование (П1, 1) ра - боты / 11 / к новым каноническим переменным S_{κ} , которое выбрано так, чтобы результирующий гамильтониан не содержал тройных членов, т.е. имел вид (1). Общее выражение для

$T_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4}$ приведено в / 7 /, нас интересует его частный случай при $\kappa_2 = -\kappa_1, \kappa_4 = -\kappa_3$:

$$S(\kappa_1, \kappa_2) = S_W(\kappa_1, \kappa_2) -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\tilde{U}_{01T}^* \tilde{U}_{02\bar{2}}}{\omega_0 + \omega_p} - 2 \operatorname{Re} \frac{\tilde{V}_{0,1\bar{1}}^* \tilde{V}_{0,2\bar{2}}}{\omega_0 - \omega_p} - \\
& -4 \frac{\tilde{V}_{1,23} \tilde{V}_{2,1\bar{3}}^*}{\omega_3} - 4 \frac{\tilde{V}_{1,2\bar{4}} \tilde{V}_{2,1\bar{4}}^*}{\omega_4} \quad (П9)
\end{aligned}$$

где $\kappa_3 \equiv \kappa_1 - \kappa_2; \kappa_4 \equiv \kappa_1 + \kappa_2$, индекс "2" соответству - ет $-\kappa_2$. $\omega_0^2 = A_0^2 - |B_0|^2$ - частота однородной пре - цессии намагниченности. Второе и третье слагаемое в (П9) обус - ловлено взаимодействием пар с κ_1 и κ_2 через "виртуальную" однородную прецессию, последние два слагаемых - взаимодейст - вие через "виртуальные" спиновые волны с $\kappa = \kappa_1 \pm \kappa_2$.

Выражения (П6), (П8), (П9), (П7) и (18) использова - лись нами для вычисления с помощью ЭВМ коэффициентов $S_{\kappa\kappa'}$ диагонального по парам гамильтониана взаимодействия ПСВ в YIG .

В важном частном случае $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ члены третьего порядка не вносят вклада в $S_{\kappa\kappa'}$ и

$$\begin{aligned}
S(\varphi) = & \frac{g}{2M} \left\{ (\omega_{ex} (l\kappa)^2 - \omega_M) (u^4 + v^4 e^{4i\varphi}) + \right. \\
& + 4 \omega_M u^2 v^2 e^{2i\varphi} (N_{\frac{1}{2}} - 1) + \\
& \left. + \omega_M u |v| [u^2 + 2(u^2 + v^2) e^{2i\varphi} + v^2 e^{4i\varphi}] \right\} \quad (П10)
\end{aligned}$$

где

$$\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$$

$$u^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_p^2 + \omega_M^2}{\omega_p^2}} + 1 \right]$$

$$v^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\omega_p^2 + \omega_M^2}{\omega_p^2}} - 1 \right]$$

Особый интерес представляет

$$S_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\varphi) e^{-2i\varphi} d\varphi$$

которая равна

$$S_{11} = \frac{g}{2M} \left(\frac{\omega_M}{\omega_p} \right)^2 \left\{ \omega_M (N_z - 1) + \sqrt{\omega_p^2 + \omega_M^2} \right\} \quad (\text{П.11})$$

Л и т е р а т у р а

1. В.Захаров, В.Львов, С.Старобинец. ЖЭТФ, 59, 1200, 1970.
2. H. Suhl, *Phys. Chem. Solids* 1, 209, 1957.
3. R. Damon, in *Magnetism*, by ed Rado and Suhl, vol. I, 1963.
4. E. Schlömann, *J. Appl. Phys.*, 33, 1508, 1962.
5. Г.Петраковский, В.Бержанский. Письма в ЖЭТФ, 12, 429, 1970.
6. В.Захаров, В.Львов. Препринт ИЯФ, 69-70, 1970; ЖЭТФ, 60, вып.6, 1971.
7. В.Захаров, В.Львов, С.Старобинец. Препринт ИЯФ, № 227, 1968.
8. P. Gottlieb, H. Suhl, *J. Appl. Phys.*, 33, 4, 1508, 1962.
9. T. S. Hartwick, E. R. Peressini, M. T. Weiss, *J. Appl. Phys.*, 32, 3, 2235, 1961.
10. А.Ахиезер, В.Барьяхтар, С.Пелетинский, *Спиновые волны*, Изд. "Наука", 1967.
11. В.Захаров, В.Львов, С.Старобинец, ФТТ, 11, 2922, 1969 (см. также /7/).



Рис. 1. Теоретическая зависимость фазового сдвига χ от частоты ω для пропорционального возбуждения. Численные значения χ даны в таблице.

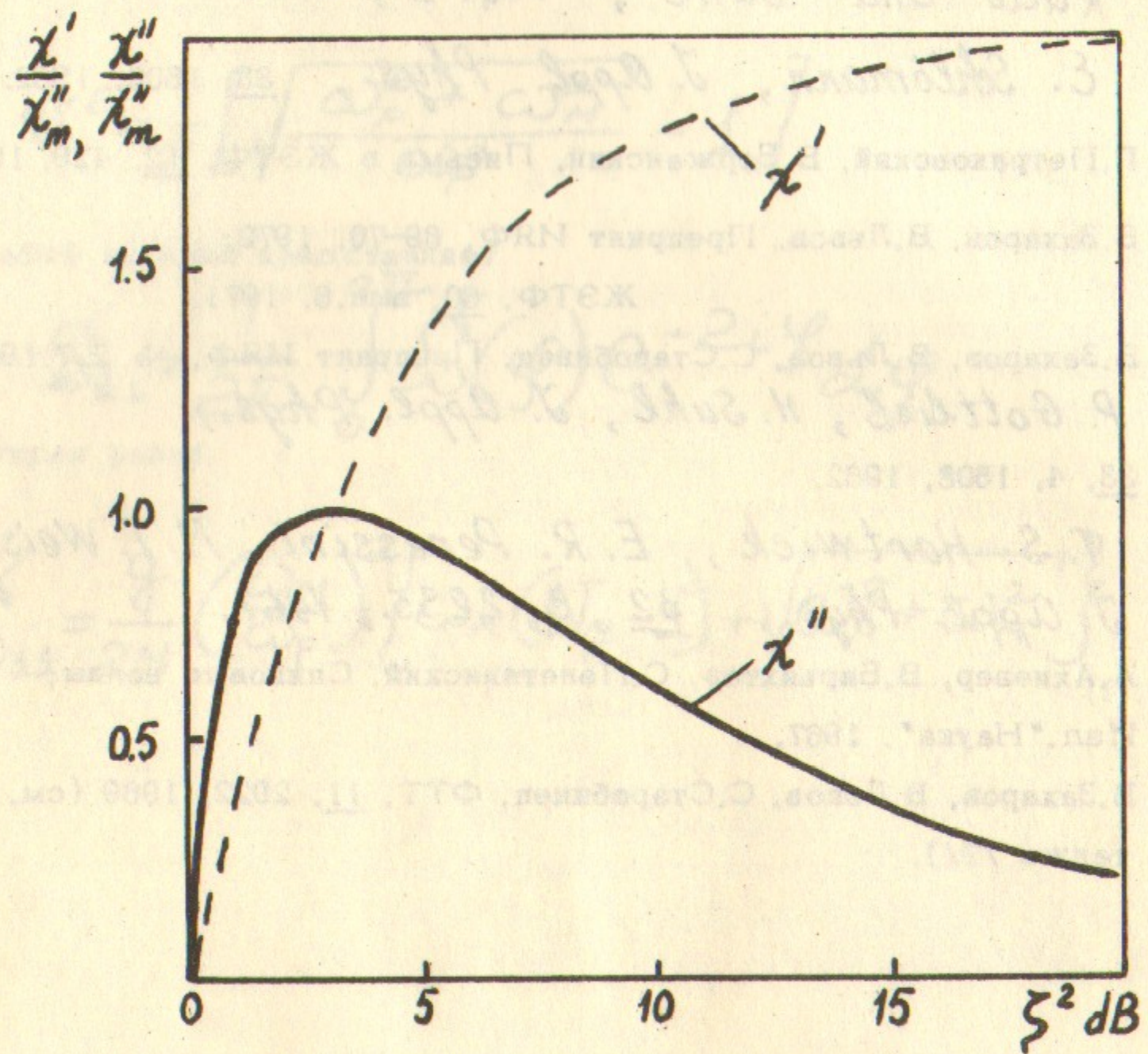


Рис.1. Теоретические зависимости вещественной χ' и мнимой χ'' частей продольной восприимчивости от мощности накачки.

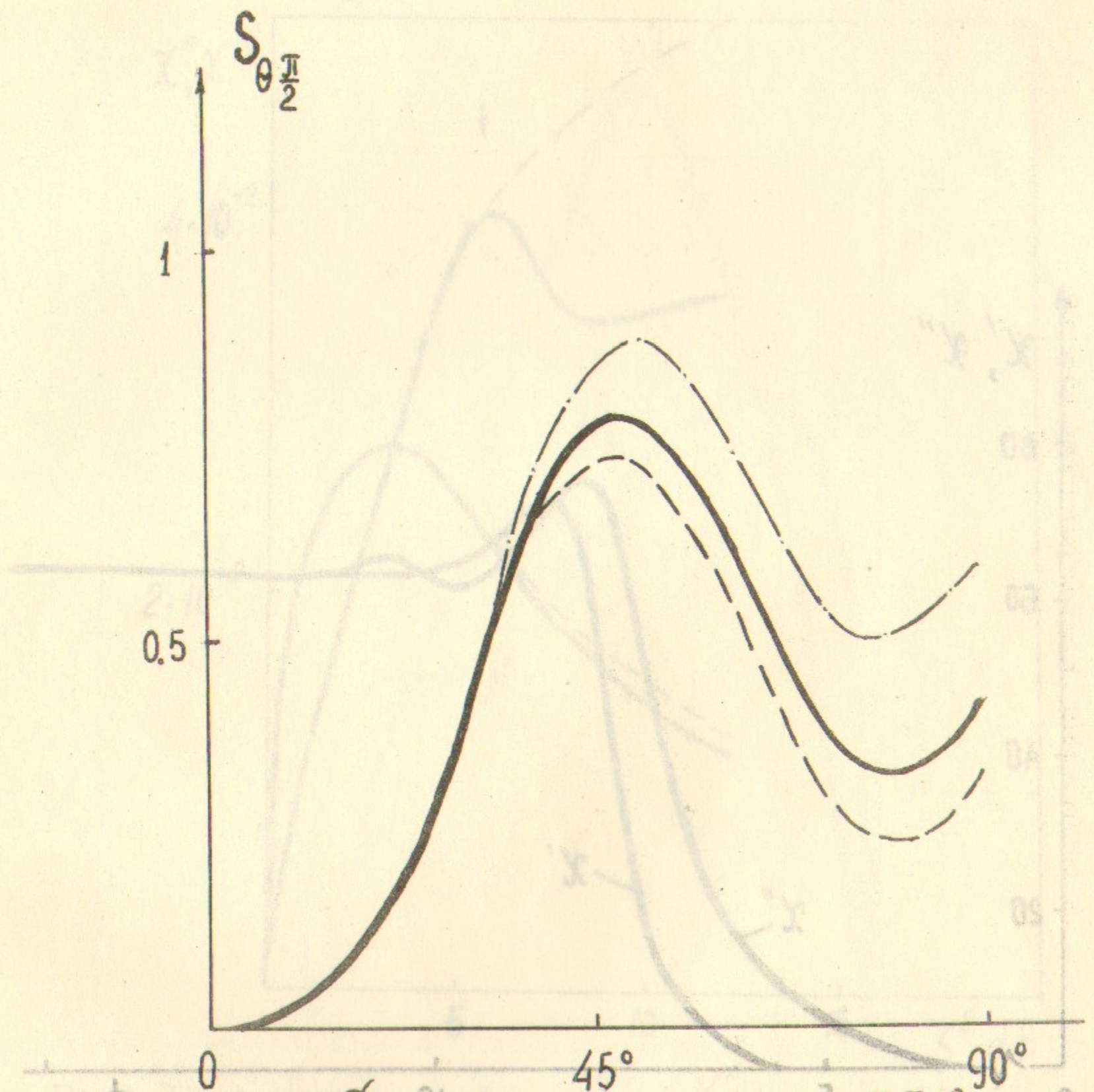


Рис.2. Зависимость $S_{\theta \frac{\pi}{2}}$ в единицах для образцов YIG в форме сферы (кривая 1) и диска, намагниченного параллельно (2) и перпендикулярно (3).

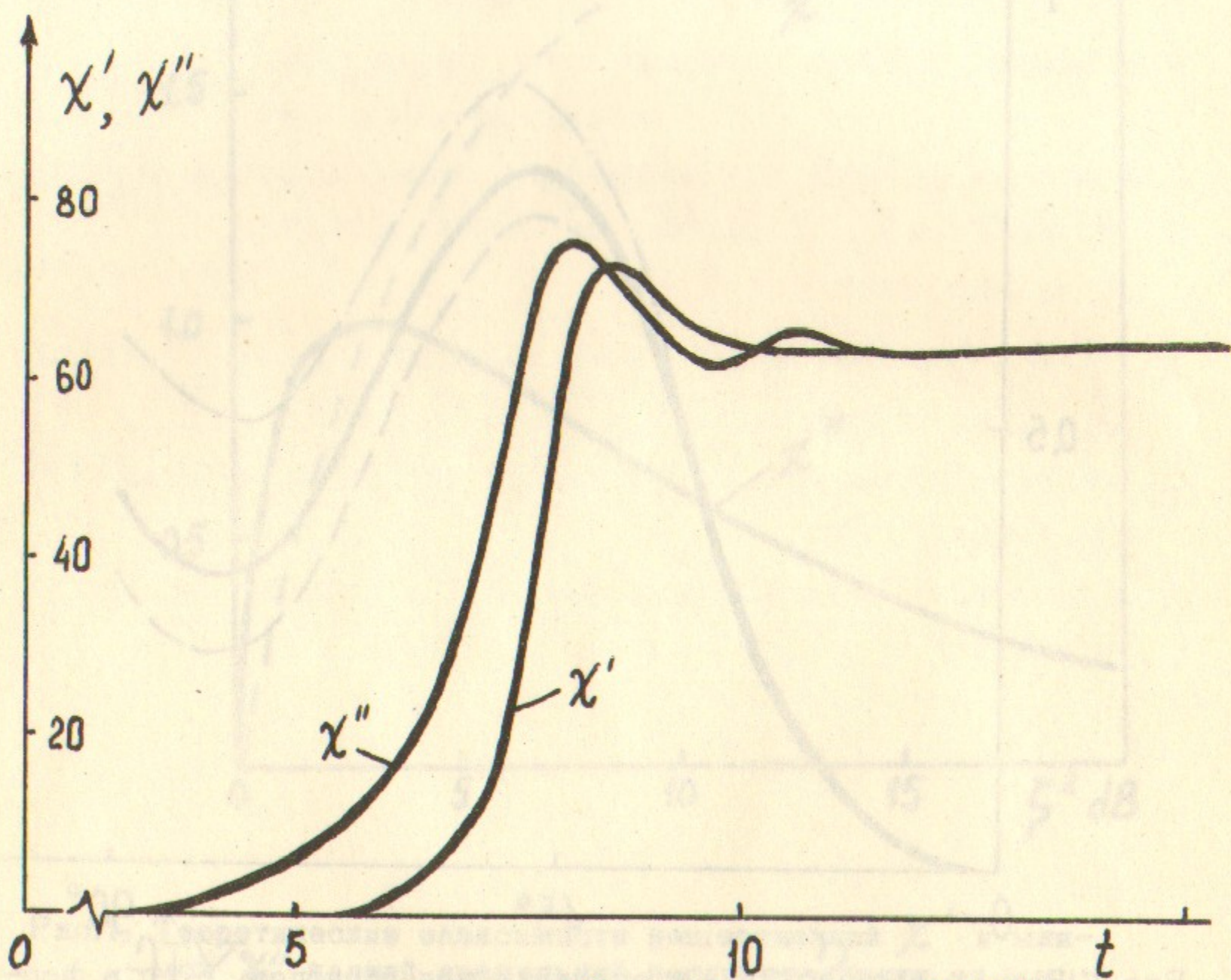


Рис.3. Временная зависимость χ' и χ'' для диска YIG ($N_z=0$) при превышении в 3 дБ. Время t измеряется в единицах $1/2\pi$.

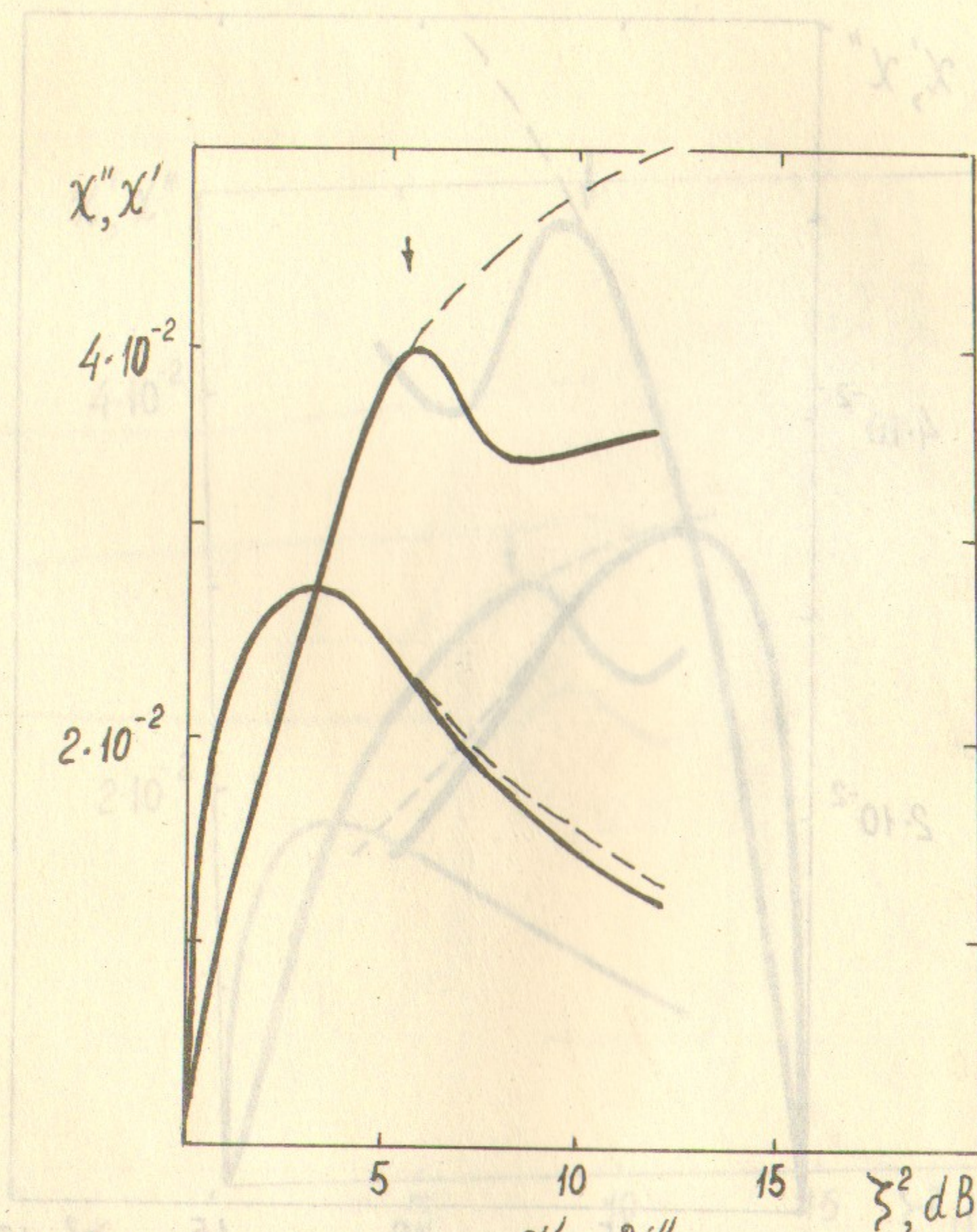


Рис.4. Теоретические зависимости χ' и χ'' от мощности на качки для сферы YIG. Пунктиром показаны зависимости, полученные в модели одной пары с $\theta = \frac{\pi}{2}$.

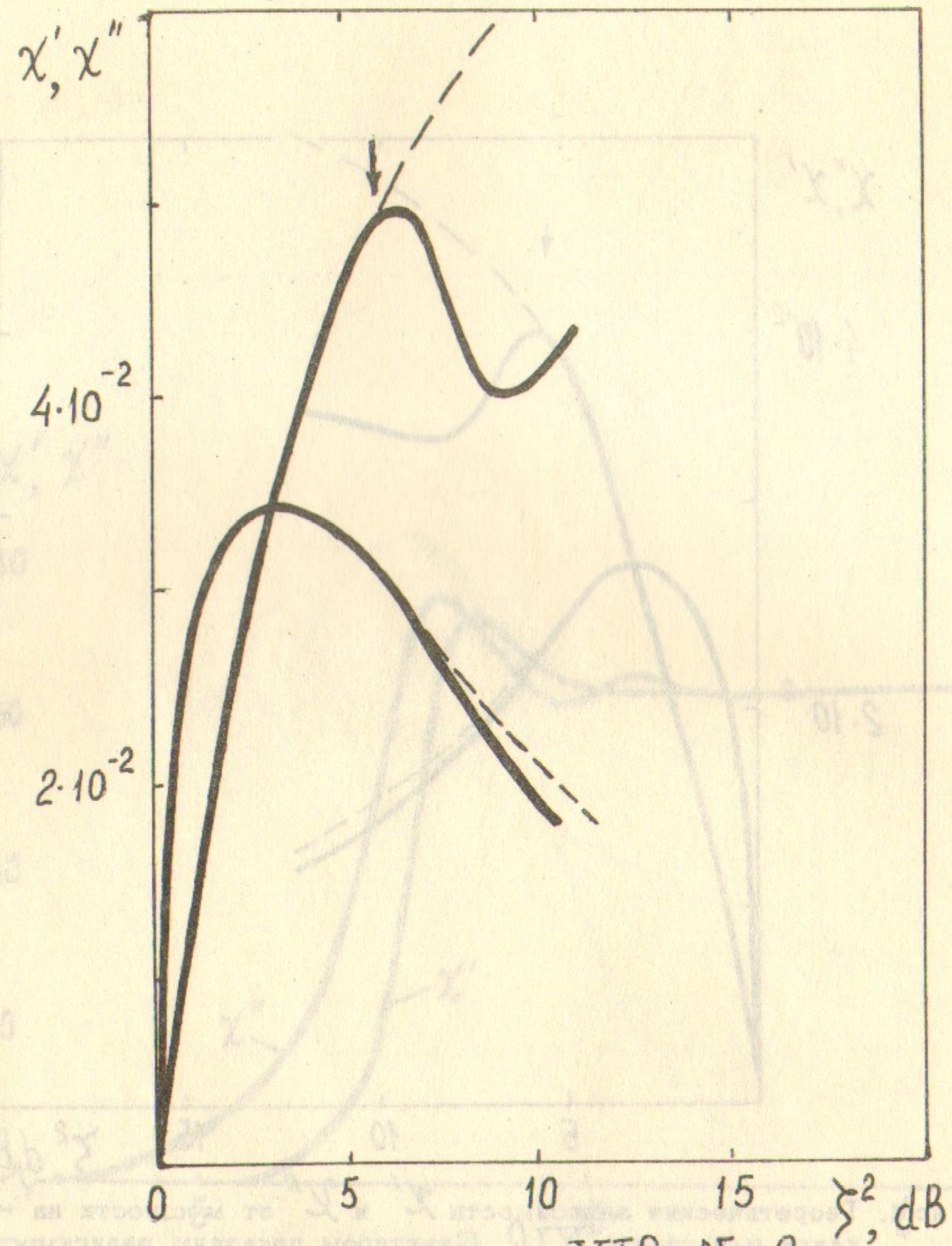


Рис.5. То же, что на рис.4 для диска $YIG(N_z=0)$.

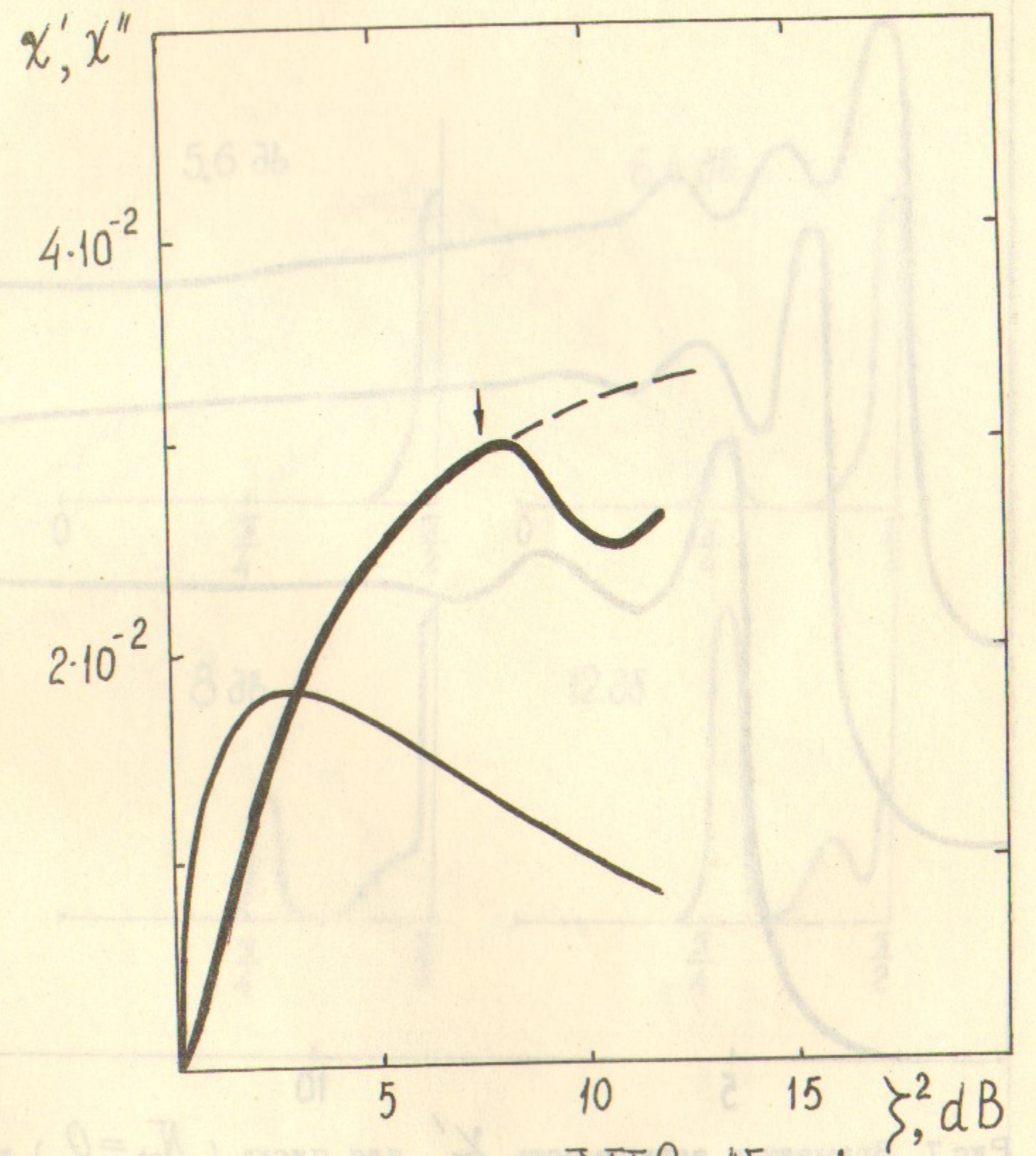


Рис.6. То же, что на рис.4 для диска $YIG(N_z=1)$.

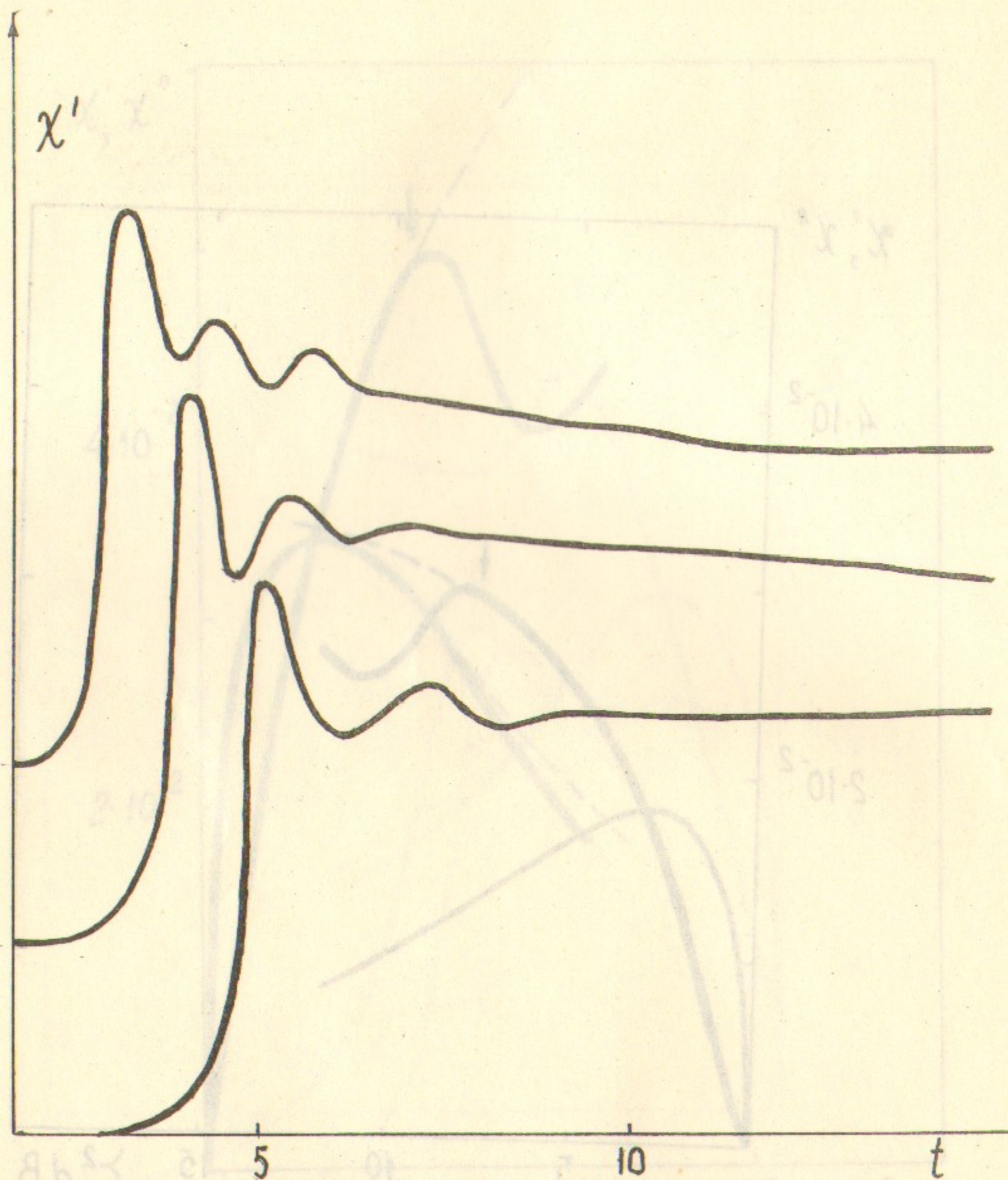


Рис.7. Временная зависимость χ' для диска ($N_{\neq} = 0$) при $kV = 1,9\gamma$; $2,2\gamma$; $2,5\gamma$ (кривые 1,2 и 3 соответственно).

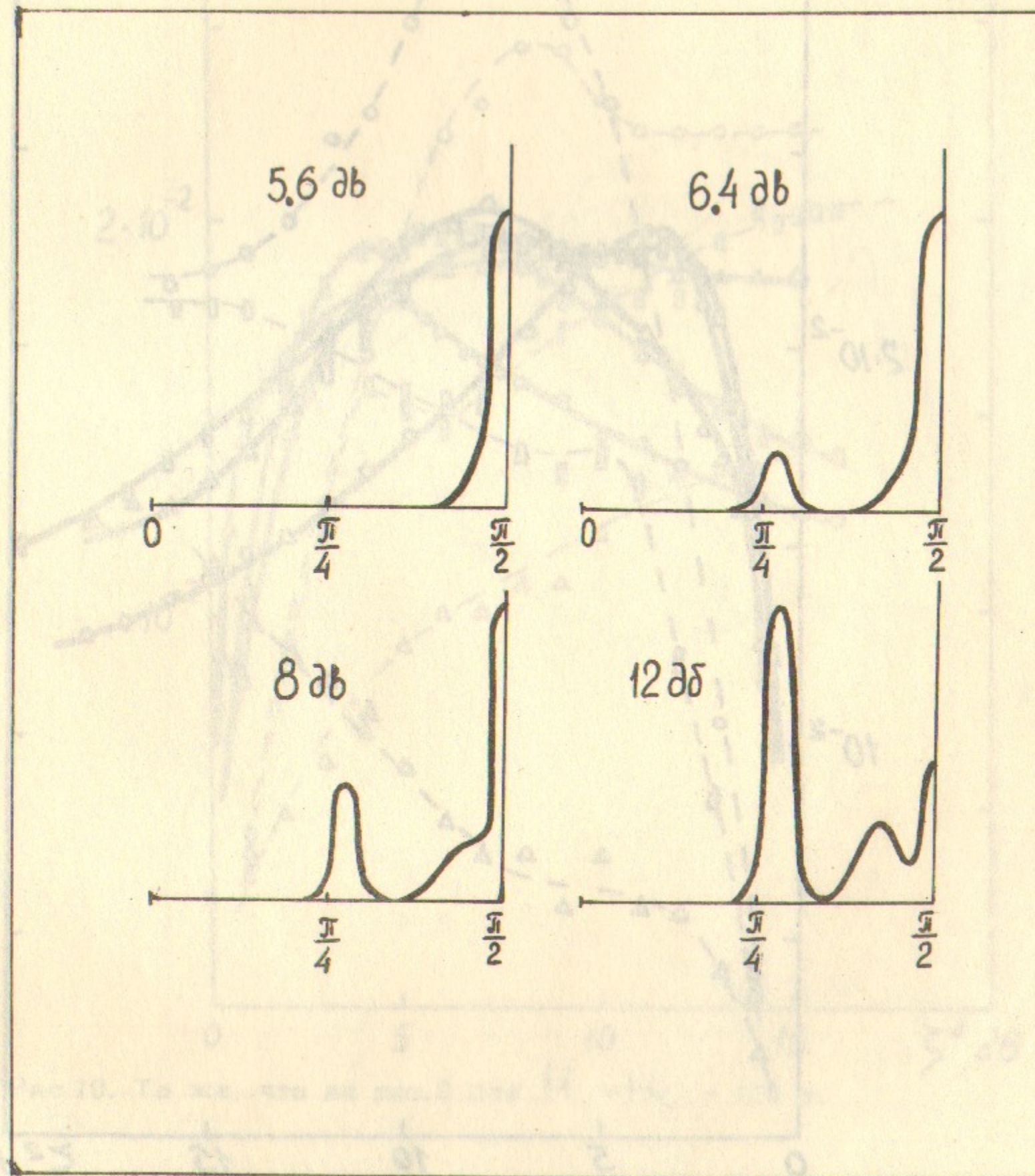


Рис.8. Функция распределения N_{\neq} ПСВ для сферы YIG при различных превышениях над порогом.

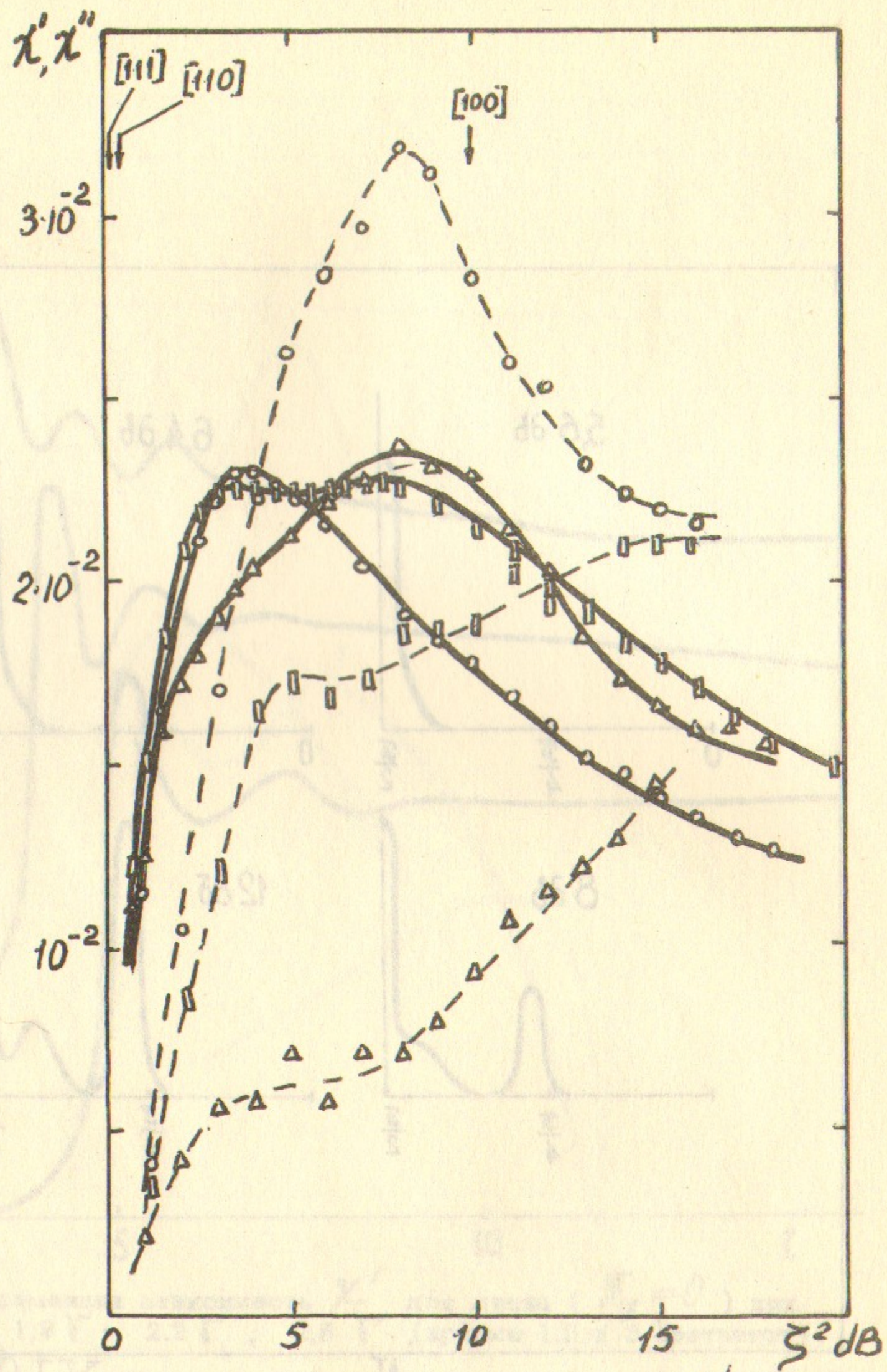


Рис.9. Экспериментальные зависимости вещественной χ' (пунктир) и мнимой χ'' (сплошная линия) частей продольной восприимчивости от мощности накачки для сферы YIG: \circ - ориентация 100; \triangle - ориентация 111; \square - ориентация 110.

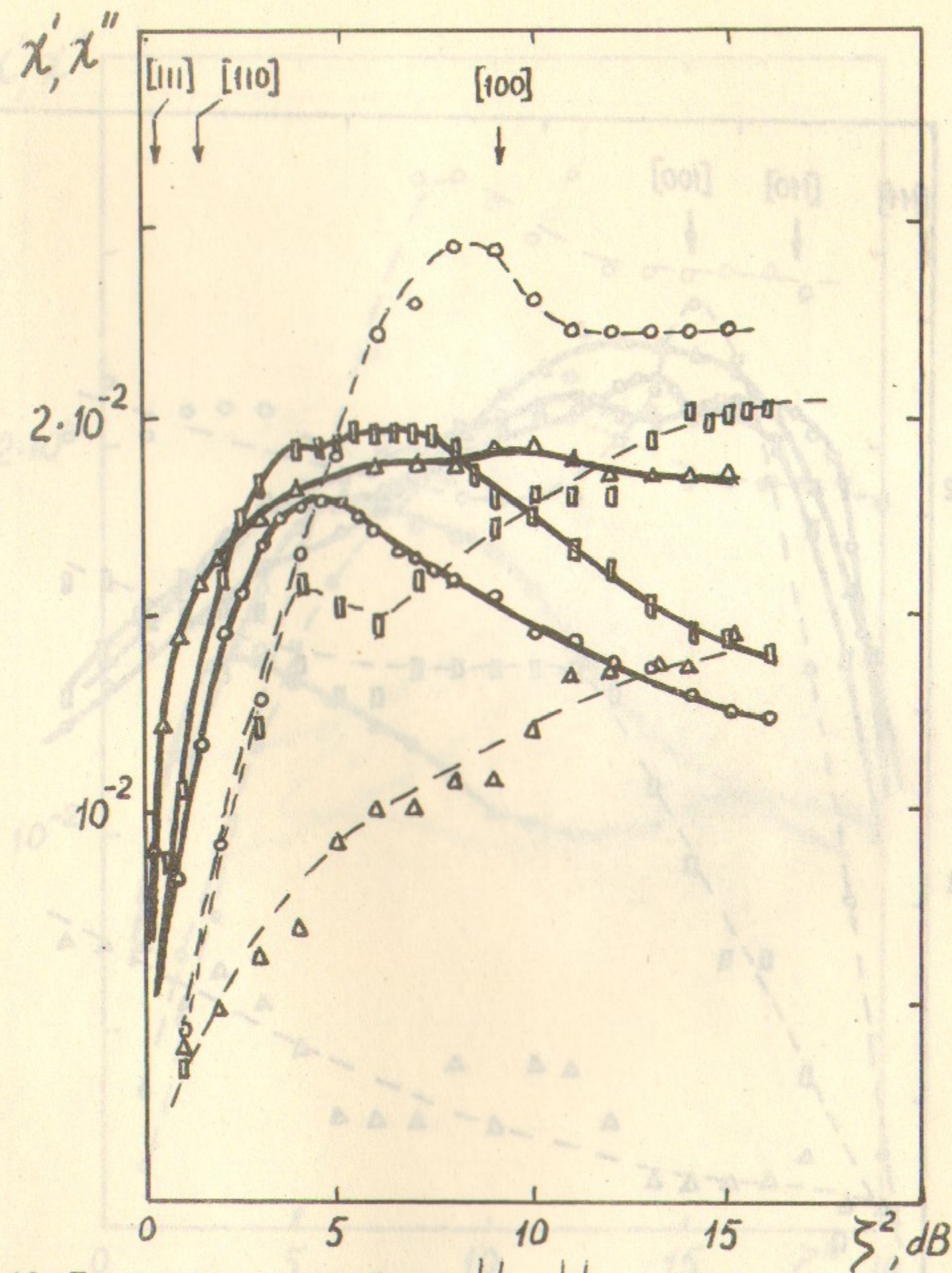


Рис.10. То же, что на рис.9 для $H = H_c = 400$ э.

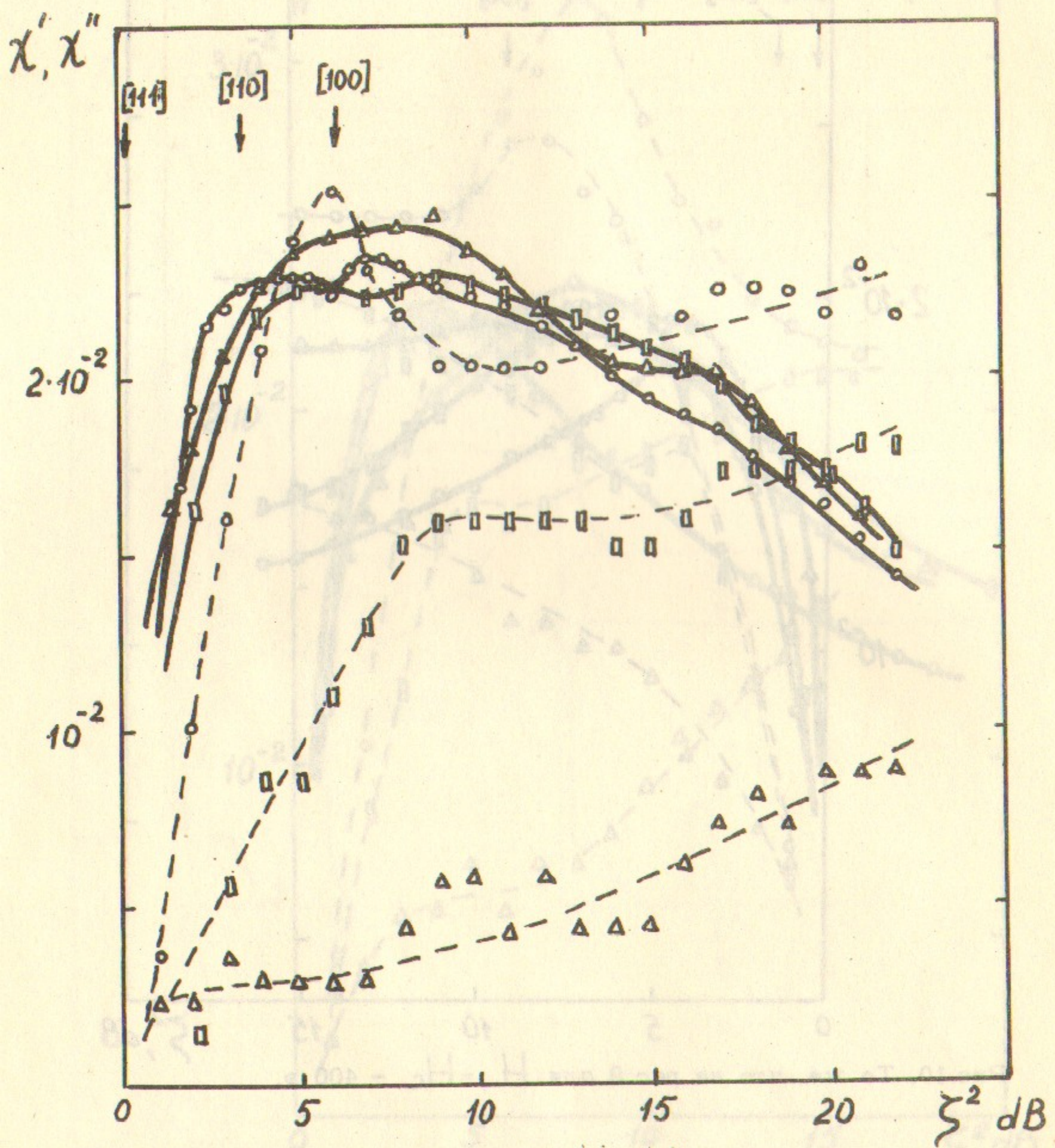


Рис.11. То же, что на рис.9 для $H = H_c$.

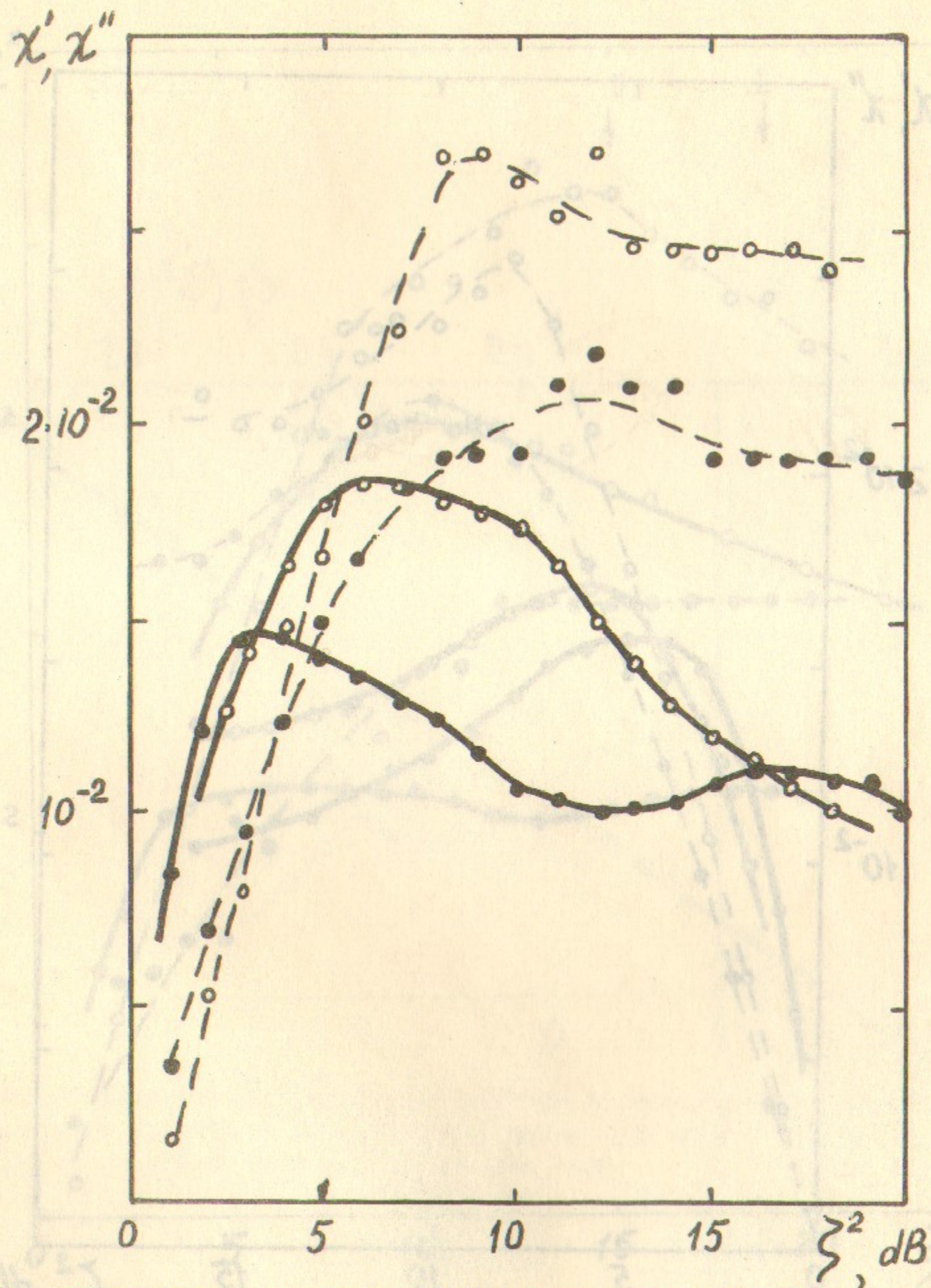


Рис.12. Экспериментальные зависимости вещественной (пунктир) и мнимой (сплошная линия) частей продольной восприимчивости для диска

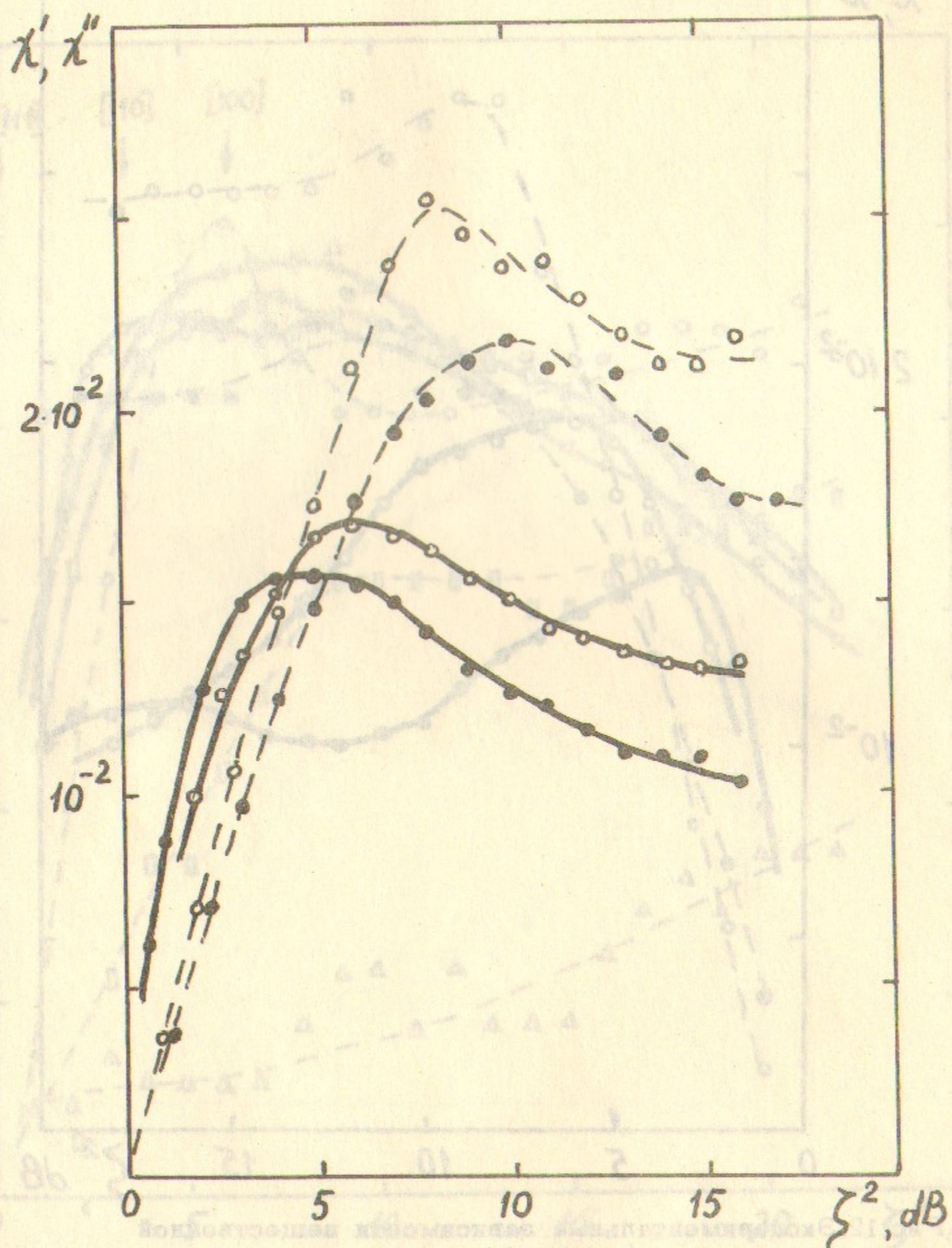


Рис.13. То же, что на рис.12 для $H = H_c = 400$ э.

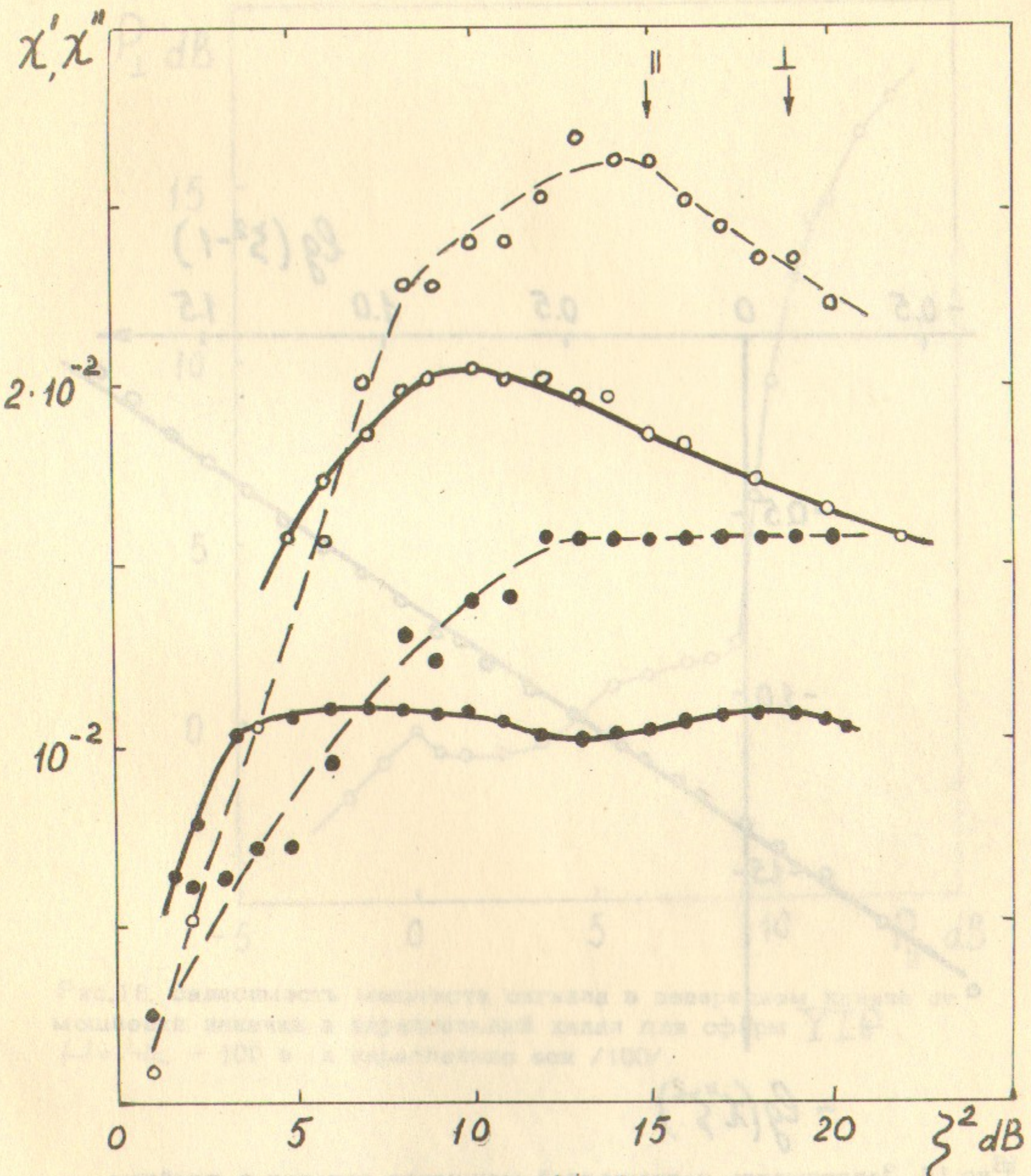


Рис.14. То же, что на рис.12 для $H = H_c$. Стрелка показывает порог возникновения автоколебаний.

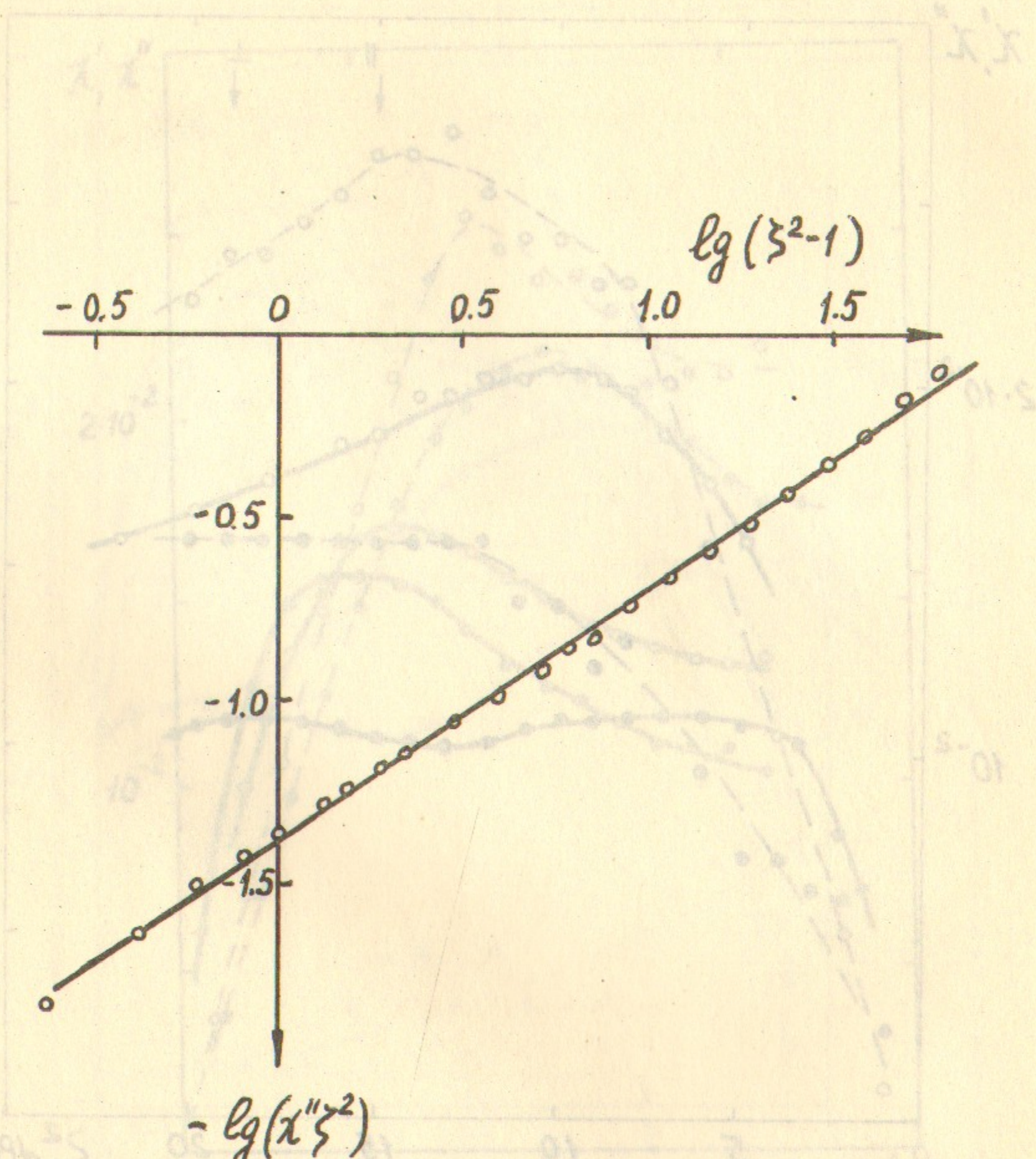


Рис.15. Зависимость поглощенной мощности накачки в двойном логарифмическом масштабе. Образец - сфера YIG $H = H_c - 100$ э и параллельно оси /100/.

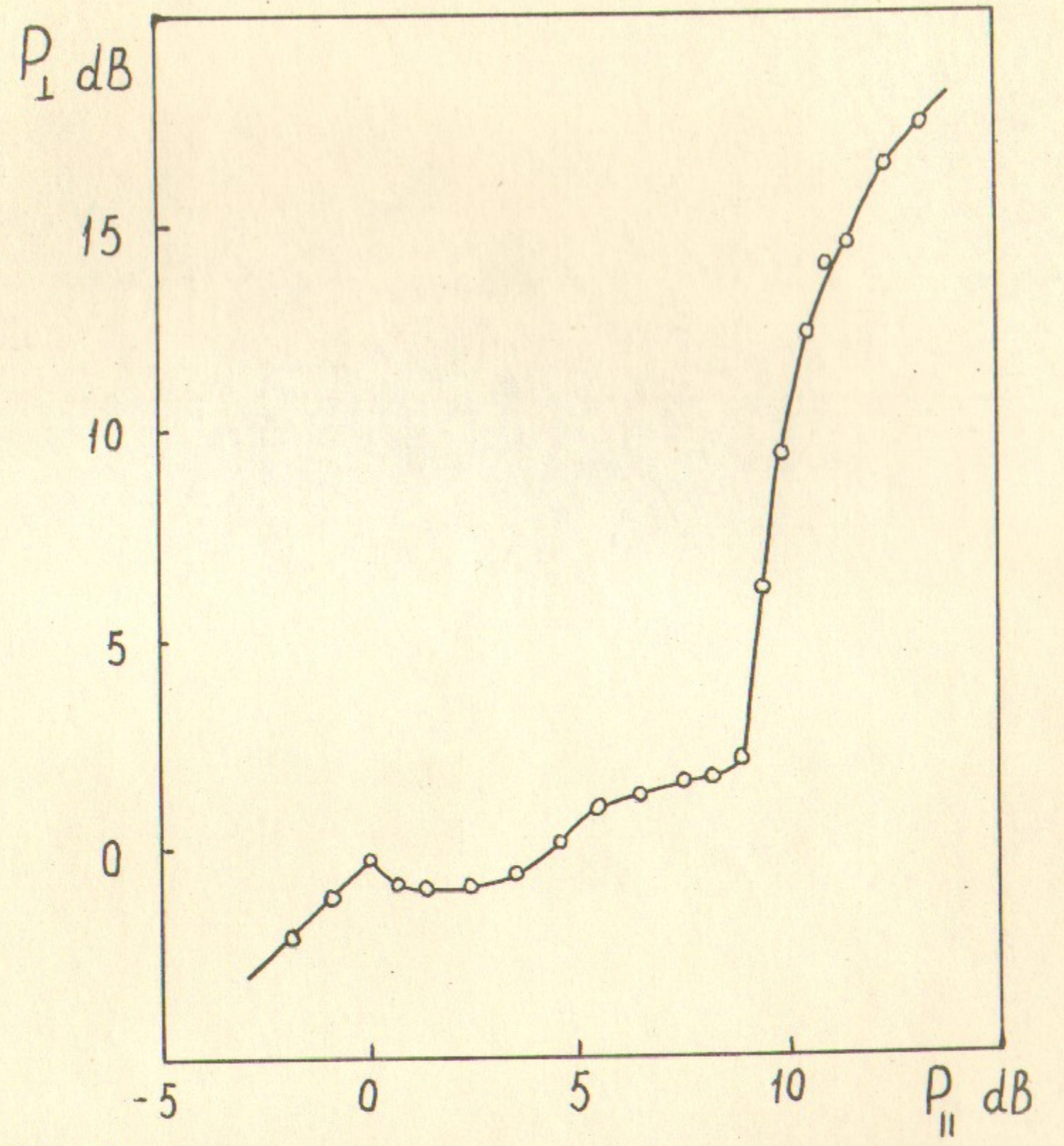
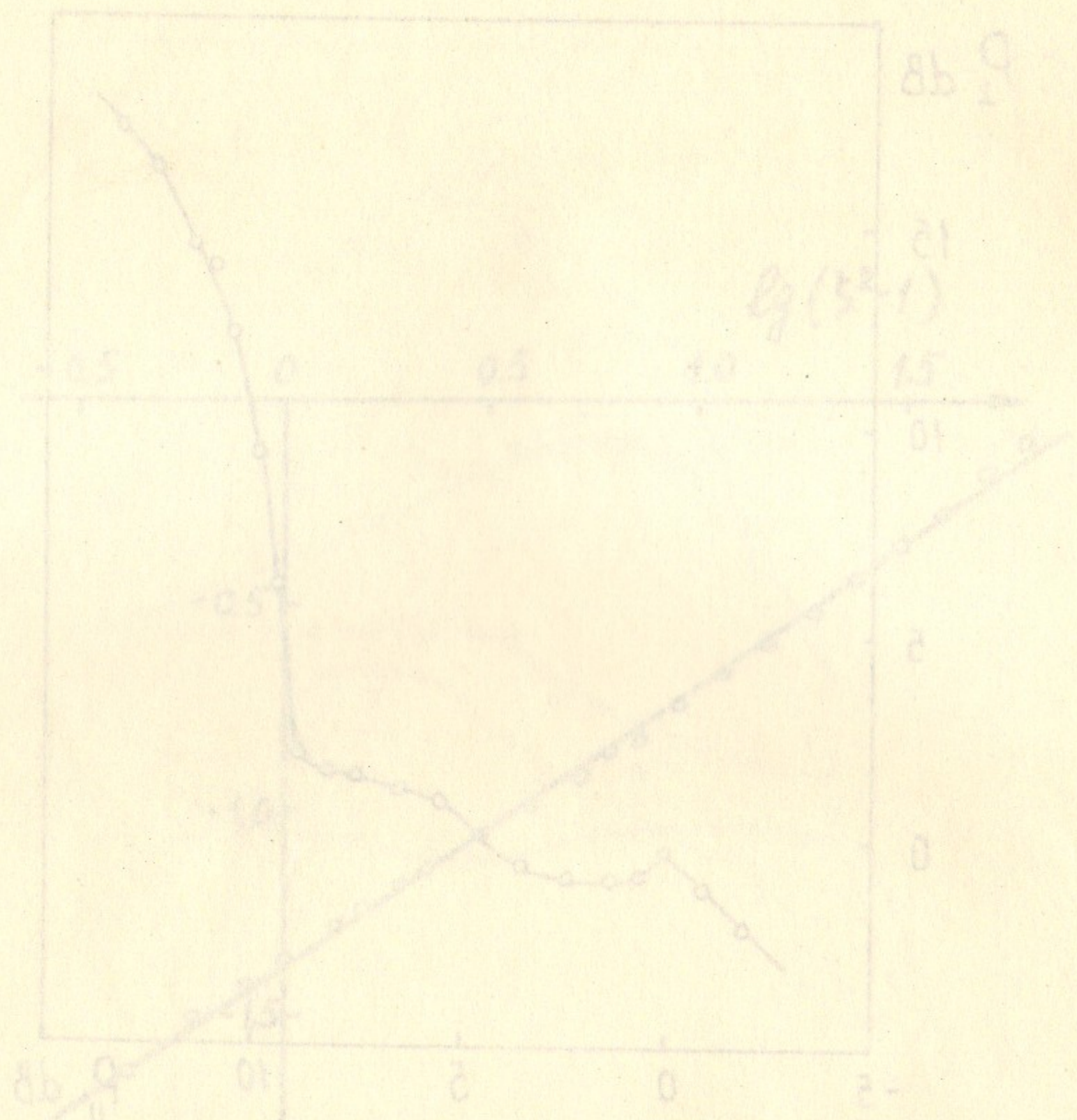


Рис.16. Зависимость мощности сигнала в поперечном канале от мощности накачки в параллельный канал для сферы YIG. $H = H_c - 100$ э и параллельно оси /100/.



Ответственный за выпуск В. Львов
 Подписано к печати 15.7.71
 Усл. 2,5 печ.л. Тираж 150 экз. Бесплатно.
 Заказ № 52 ПРЕПРИНТ.

Ответственный за выпуск В. Львов
 Подписано к печати 15.7.71
 Усл. 2,5 печ.л. Тираж 150 экз. Бесплатно.
 Заказ № 52 ПРЕПРИНТ.
 Отпечатано на ротационте в ИЯФ СО АН СССР, нв.