5

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 39 - 71

Т.А.Всеволожская, Г.И.Сильвестров

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕТОСИЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЛИНЗ

Новосибирск

1971

Т.А.Всеволожская, Г.И.Сильвестров

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЕТОСИЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЛИНЗ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассмотрены оптические свойства магнитных линз с аксиально-симметричной фокусировкой полем вида $H \backsim \frac{1}{r}$ с целью выяснения возможности их применения для фокусировки пучков с большими угловой расходимостью и поперечным фазовым объёмом и энергиями до нескольких Гэв, когда длина линзы, при реально достижимых магнитных полях становится сравнимой с величиной фокусного расстояния.

Для собирания вторичных частиц, рождающихся, как правило, в большом телесном угле, требуются фокусирующие системы с большой светосилой и достаточно малым фокусным расстоянием. Относительно малое рассеяние частиц высоких энергий при прохождении вещества позволяет использовать для их фокусировки магнитное поле прямого тока, обладающее максимальной фокусирующей силой и аксиальной симметрией.

Примером таких оптических систем являются параболические линзы, разработанные в ИЯФ СО АН в 1962-1963 г.г. и применяемые для собирания позитронов с энергией 120 Мэв в телесном угле $\sim 0{,}03$ стер (линейный угол $\theta \sim 0{,}1$ рад.) /1, 2, 3/.

Идея параболической линзы состоит в том, что для достижения линейной фокусировки полем вида $H_\varphi = \frac{const}{r}$, частица должна проходить в поле вдоль оси его симметрии путь, пропорциональный r^2, т.е. область поля должна быть ограничена параболоидами вращения с образующими $z = \pm ar^2$. Угол отклонения частицы $\alpha = \int H_\varphi dz$ пропорционален при этом первой степени координаты r, и фокусное расстояние равно $F = \frac{pc}{2aeH_0R_0}$, где H_0 - поле на расстоянии R_0 от оси. Координата частицы r в линзе предполагается постоянной, что справедливо в том случае, когда линзу можно считать тонкой, т.е. длина пути частицы в ней $2ar^2$ много меньше фокусного расстояния $2ar^2 \ll F$. Считая заданным угол собирания θ, получаем условие на поле в линзе, а именно $\frac{eH_0R_0}{pc} \gg \theta^2$.

При разработке параболических линз для фокусировки частиц с энергиями $\gtrsim 10^9$ эв желательно не связывать себя ограничениями, вытекающими из условия "тонкости" линзы, и иметь возможность уменьшить необходимое поле за счёт увеличения длины пути частицы в линзе. Это требует внимательного рассмотрения движения частиц в линзе с полем $H \backsim \frac{1}{r}$ с учётом изменения координаты при прохождении линзы, а также неточечности и немонохроматичности источника, что и является содержанием настоящей работы.

1. Точечный источник

а) Уравнение траектории

Функция Лагранжа релятивистской частицы в поле прямого тока в цилиндрических координатах с осью z, совпадающей с осью симметрии поля есть $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - \frac{e}{c}\dot{z} H_0 R_0 \ln r$,

где H_0 – поле на расстоянии R_0 от оси. Произведение $H_0 R_0$ является константой поля, пропорциональной величине тока.

Интегралами движения являются энергия частицы $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ или её скорость V, z – проекция обобщенного импульса

$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{eH_0R_0}{c}\ln r$ и z – проекция момента количества движения $M_z = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ /4/.

С помощью интегралов движения составляющие скорости частицы $\dot{r}$, $r\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ представляются в зависимости только от координаты r, и для определения траектории получаются дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющими переменными:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\dot{z}}{\dot{r}} = \frac{P_z + \frac{1}{c}eH_0R_0\ln r}{\sqrt{P^2 - \left(P_z + \frac{1}{c}eH_0R_0\ln r\right)^2}} \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{M_z m}{\sqrt{1-\beta^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{P^2 - \left(P_z + \frac{1}{c}eH_0R_0\ln r\right)^2}}$$

Здесь P – импульс частицы, равный $P = \frac{mV}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{V}{c}$.

В случае точечного источника, расположенного на оси поля, момент количества движения равен 0 для всех частиц, и $\dot{\varphi} \equiv 0$. Уравнение траектории имеет вид

$$z = z_1 + \int_{r_1}^{r} \frac{\left(\dot{z}_1 + \frac{eH_0R_0c}{E}\ln\frac{r}{r_1}\right)dr}{\sqrt{V^2 - \left(\dot{z}_1 + \frac{eH_0R_0c}{E}\ln\frac{r}{r_1}\right)^2}} \tag{2}$$

где r_1, z_1, и $\dot{r}_1$, $\dot{z}_1$ — значения координат и составляющих скорости в какой-либо одной точке.

Зависимость скорости $\dot{z}$ от r при этом имеет вид

$$\dot{z} = \dot{z}_1 + \frac{eH_0R_0c}{E} \ln \frac{r}{r_1}.$$

Интеграл в уравнении траектории не выражается в известных функциях, за исключением частных случаев, когда пределами интегрирования являются корни уравнений $\dot{r} = 0$ и $\dot{z} = 0$. В общем случае приходится пользоваться одним из методов приближенного интегрирования. При этом удобно определить траекторию параметрически, используя в качестве параметра угол наклона траектории к оси z $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\dot{r}}{\dot{z}}$:

$$r = r_1 \cdot e^{b(\cos\alpha - \cos\alpha_1)}$$

$$z = z_1 + r_1 b \int_{\alpha}^{\alpha_1} \cos\alpha' \cdot e^{b(\cos\alpha' - \cos\alpha_1)} d\alpha' \qquad (3)$$

где $\alpha_1 = \alpha$ при $r = r_1$ и $z = z_1$.

Здесь мы ввели обозначение $b = \frac{pc}{eH_0R_0}$. Значение этой величины, определяющей оптическую силу поля ($\sim 1/b$), не может быть сделано существенно меньшим 10 при энергиях, допускающих применение параболических линз.

При малых α для приближенного интегрирования уравнения траектории удобно разложить подинтегральное выражение в ряд по степеням α и α_1 и проинтегрировать почленно. С точностью до членов порядка $b\alpha^4/4!$ в подинтегральном выражении, получим

$$z = z_1 + r_1 b e^{b\frac{\alpha^2}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left[\operatorname{erf} \alpha_1 \sqrt{\frac{b}{2}} - \operatorname{erf} \alpha \sqrt{\frac{b}{2}} \right] - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2b}} \left[\operatorname{erf} \alpha_1 \sqrt{\frac{b}{2}} - \operatorname{erf} \alpha \sqrt{\frac{b}{2}} \right] + \alpha e^{\frac{b\alpha^2}{2}} - \alpha_1 e^{b\frac{\alpha_1^2}{2}}}{2b} \right\} \qquad (4)$$

Если пренебречь вторым слагаемым в фигурных скобках, что соответствует условию $\alpha^2/2 \ll 1$, оставшееся выражение будет не что иное, как решение уравнений движения в рассматриваемом поле в параксиальном приближении, т.е. при $\dot{z} = const = z_1$.

Приближение тонкой линзы получим при условии $b\frac{\alpha^2}{2} \ll 1$

Траектория в линзе в этом случае определяется как

$$r = r_1\ ,\ z = z_1 + r_1 b(\alpha_1 - \alpha)$$

б) <u>Вычисление профилей линз</u>

Если в уравнениях (3) точка с координатами r_1, z_1, принадлежит входной поверхности линзы, а $r = r_2$, $z = z_2$ - выходной, уравнения (3) определяют выходное значение угла наклона $\alpha = \alpha_2$ в зависимости от начального значения α_1. Линза с параболическими поверхностями обнаруживает при этом значительную сферическую аберрацию при углах, не отвечающих приближению тонкой линзы (рис.1).

Сферическая аберрация линзы с полем $H \backsim \frac{1}{r}$, в случае точечного источника, устраняется полностью, если поверхности, ограничивающие поле, построены в точном соответствии с условиями фокусировки, задаваемыми функцией $\alpha_2 = \alpha_2(r_2, z_2)$. Уравнения (3) при этом определяют выходную поверхность линзы в зависимости от формы входной.

Мы рассмотрим несколько примеров нахождения поверхностей линзы, отвечающих условию фокусировки частиц из точечного источника в параллельный пучок, т.е. от источника, расположенного в главном фокусе линзы. При этом в уравнениях (3) нужно положить $\alpha = \alpha_2 = 0$, $tg\alpha_1 = \frac{r_1}{F + z_1}$ и задать произвольным образом уравнение огибающей входной поверхности $z_1 = z_1(r_1)$.

Пусть, как и в приближении тонкой линзы, огибающая входной поверхности задача уравнением параболы $z_1 = -ar_1^2$. Считая α_1 независимым параметром, получим уравнения огибающей выходной поверхности в виде

$$z_2 = \frac{1 + 2aF\,tg^2\alpha_1 - \sqrt{1 + 4aF\,tg^2\alpha}}{2a\,tg\alpha_1} + r_2 b\int_0^{\alpha_1} \cos\alpha\, e^{b(\cos\alpha - 1)}\, d\alpha$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{1+4aF\,tg^2\alpha_1}-1}{2a\,tg\,\alpha_1}\cdot e^{b(1-\cos\alpha_1)} \tag{5}$$

Величина "b" связана с главным фокусным расстоянием линзы и константой параболы "a" соотношением $b = 2aF$.

Интеграл в уравнении $z_2 = z_2(\alpha_1)$ удобен для вычисления на ЭВМ. Для ручного счёта можно воспользоваться приведенным выше приближенным выражением, которое обеспечивает хорошую точность в большом диапазоне углов (рис.1).

Интересным примером линзы, фокусирующей пучок от точечного источника в параллельный, является линза с плоской выходной поверхностью $z_2(\alpha_1) \equiv 0$. Координаты входной поверхности связаны в ней соотношением

$z_1 + r_1 b\int_0^{\alpha_1}\cos\alpha\, e^{b(\cos\alpha-\cos\alpha_1)}d\alpha = 0$ помимо приведенного выше соотношения $tg\,\alpha_1 = \frac{r_1}{F+z_1}$. Параметрические уравнения входной поверхности получаем в виде

$$z_1 = -F\cdot\frac{tg\,\alpha_1\, b\int_0^{\alpha_1}\cos\alpha\cdot e^{b(\cos\alpha-\cos\alpha_1)}d\alpha}{1+tg\,\alpha_1\, b\int_0^{\alpha_1}\cos\alpha\cdot e^{b(\cos\alpha-\cos\alpha_1)}d\alpha}$$

$$r_1 = \frac{F\,tg\,\alpha_1}{1+b\,tg\,\alpha_1\int_0^{\alpha_1}\cos\alpha\, e^{b(\cos\alpha-\cos\alpha_1)}d\alpha} \tag{6}$$

Система из двух таких линз, соединенных плоскостями, служит для фокусировки пучка из точки в точку. Поверхности каждой "полулинзы" находятся по приведенным выше уравнениям при подстановке в них соответствующих значений фокусных расстояний f_1 и f_2 и значений "b", определяемых полем в каждой половине. При $b_1 = b_2$ можно объединить обе "полулинзы", убрав разделяющую их поверхность $z = 0$.

Линза, одна из поверхностей которой задача произвольно, в общем случае не обеспечивает линейной фокусировки – фокусное

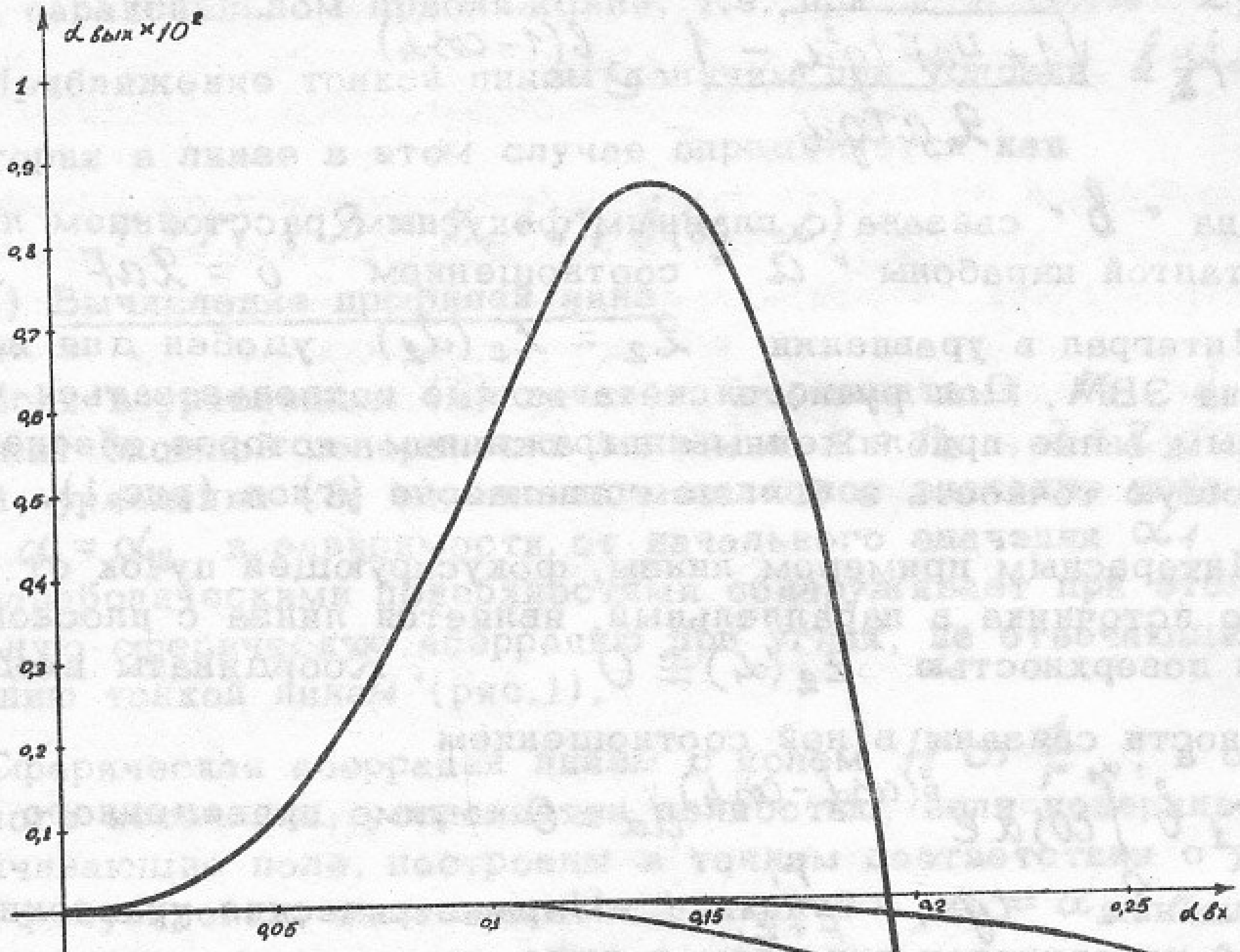

Рис.1. Сферические аберрации линзы с параболической входной поверхностью и выходной поверхностью, вычисленной:

1 – в приближении тонкой линзы;

2 – в параксиальном приближении;

3 – в приближении следующего порядка по $b\alpha^2$ (согласно выражению 4).

расстояние такой линзы существенно зависит от начального угла частицы α_1, хотя положение главного фокуса определено независимо от α_1. Иными словами, такая линза не имеет главной плоскости, а поверхность, определяемая уравнениями $(F+z)tg\alpha_1 = r$, $r = r_2(\alpha_1)$, задающими в линейных системах главную плоскость, в этом случае может иметь произвольную форму в зависимости от формы входной поверхности (рис.2). Это приводит к нелинейному изменению размера пучка на выходе линзы с изменением угловой расходимости его в точечном источнике и к искажению формы поперечного фазового объёма в случае неточечного источника.

Главной поверхности можно придавать нужную форму, отказавшись от произвольного задания одной из поверхностей линзы и наложив дополнительное условие $r_2 = r_2(\alpha_1)$ на выходные параметры траектории.

Линзу с главной поверхностью в виде плоскости $z = 0$ получаем при условии $r_2 = F tg\alpha_1$. Входная поверхность при этом описывается уравнениями

$$\begin{aligned} r_1 &= F tg\alpha_1 e^{-b(1-\cos\alpha_1)} \\ z_1 &= -F\left[1 - e^{-b(1-\cos\alpha_1)}\right], \end{aligned} \qquad (7)$$

выходная же в зависимости от входной по-прежнему находится из уравнений (3) при условии $\alpha = \alpha_2 = 0$. Если дополнительное условие взять в виде $r_2 = F\sin\alpha_1$, главная поверхность - сфера радиуса F с центром в главном фокусе, и уравнения входной поверхности:

$$\begin{aligned} r_1 &= F\sin\alpha_1 e^{-b(1-\cos\alpha_1)} \\ z_1 &= -F\left[1 - \cos\alpha_1 \cdot e^{-b(1-\cos\alpha_1)}\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

Промежуточным между этими двумя случаями является линза, построенная при условии $r_2 = F\alpha_2$. Впрочем, различие между всеми тремя обнаруживается лишь при достаточно больших углах ($\alpha_1 \gtrsim 0{,}3$), и мы объединяем их под общим названием "линейной линзы".

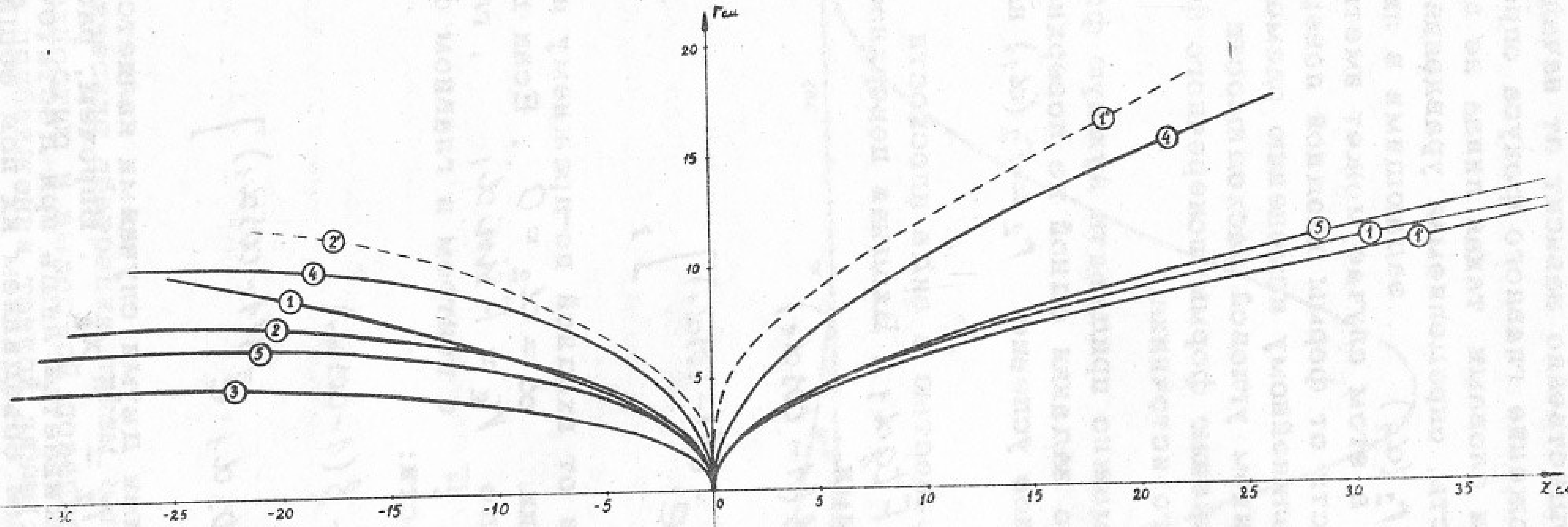

Рис.2. Профили линз и их главные плоскости.
1–1 – парабилическая линза, F = 60 см, a = 0,25 , b = 30;
1′ – поправленный безаберрационный профиль F = 60 см, b =30;
1″ – её "главная плоскость"; 2 – полулинза F = 60см, b = 12;
2′ – её "главная плоскость"; 3 – полулинза F = 60см, b = 30;
4–4 – линейная линза, F = 60 см, b = 12; 5–5 – линейная линза F = 60 см, b = 30.

Таким образом, для фокусировки пучков от точечного источника могут быть построены линзы с различными оптическими свойствами, отвечающие одному общему условию – сферические аберрации в них отсутствуют с точностью до погрешности в вычислении интеграла $\int_0^{\alpha}\cos\alpha\, e^{b(\cos\alpha-\cos\alpha_1)}d\alpha$. Аберрации за счёт приближенного нахождения выходной поверхности в линзе с параболической входной (a = 0.25 1/см, F = 60 см) в трех рассмотренных приближениях – приближении тонкой линзы, параксиальном и приближении следующего порядка по $b\alpha^2$ показаны на рис.1. На рис.2 приведены профили линз при F = 60, b = 30 и F = 60, b = 12 для трех рассмотренных случаев – линзы с параболической входной поверхностью, – линзы с плоской выходной поверхностью и линзы с главной плоскостью Z = 0.

II. Неточечный источник

В случае неточечного источника геометрические аберрации не устраняются специальной формой поверхностей линзы и могут приводить к существенным искажениям формы фазового объёма пучка. Чтобы оценить эти искажения мы находим поперечный фазовый объём – эмитанс пучка во второй фокальной плоскости линзы путем вычисления параметров траектории на выходе линзы для достаточного числа частиц с различными значениями начальных координат и направлениями скорости.

а) Нахождение траектории

Для нахождения траектории частиц от неточечного источника нужно ввести в рассмотрение изменение координаты φ и φ-скорость частицы.

Уравнения траектории в линзе удобно привести к параметрическому виду:

$$r = r_1 e^{b\left(\sqrt{1-u^2-\sin^2\theta_1\cdot\sin^2\gamma_1\cdot\frac{r_1^2}{r^2}}-\cos\theta_1\right)}$$

$$z = z_1 + r_1 b \int\limits_{\sin\theta_1 \sin\gamma_1}^{u} \frac{r(u')}{r_1} \cdot \frac{\left[\cos\theta_1 + \frac{1}{b}\ln\frac{r(u')}{r_1}\right] du'}{b\sin^2\theta_1 \cdot \sin^2\gamma_1 \frac{r_1^2}{[r(u')]^2} - \left[\cos\theta_1 + \frac{1}{b}\ln\frac{r(u')}{r_1}\right]} \qquad (9)$$

$$\varphi = \varphi_1 + r_1 b \sin\theta_1 \sin\gamma_1 \int\limits_{\sin\theta_1 \sin\gamma_1}^{u} \frac{1}{r(u')} \frac{du'}{b\sin^2\theta_1 \sin^2\gamma_1 \frac{r_1^2}{[r(u')]^2} - \left[\cos\theta_1 + \frac{1}{b}\ln\frac{r(u')}{r_1}\right]}$$

где r_1 , φ_1 и z_1 – входные координаты частицы, θ_1 –угол между направлением начальной скорости частицы и осью z , γ_1 – угол между направлением поперечной скорости частицы и её радиусом – вектором в плоскости $z = z_1$, так что

$V_{z_1} = V\cos\theta_1$, $V_{r_1} = V\sin\theta_1 \cdot \cos\gamma_1$, $V_{\varphi_1} = V\sin\theta_1 \sin\gamma_1$ (рис.3).

Параметром является величина u , пропорциональная радиальной скорости частицы $\dot{r} = uV$. Трансцендентное уравнение для r решается методом итерации с $r = r_1$ в качестве нулевого приближения. Параметром для нахождения входных координат r_1 и z_1 , по уравнениям входной поверхности (см.1) служат значения угла α_1 , между осью z и проекцией скорости на полуплоскость $\varphi = \varphi_1$ (рис.3), которые находятся из трансцендентного уравнения

$tg^2\alpha_1 = tg^2\theta_1 + \frac{r_0^2}{(F+z_1)^2} + \frac{2r_0 \, tg\theta_1}{F+z_1}\cos\gamma_0$ с использованием заданной на входной поверхности линзы зависимости $z_1 = z_1(\alpha_1)$; здесь r_0 – координата частицы в фокальной плоскости линзы $z = -F$, γ_0 – угол между направлением поперечной скорости и радиусом вектором частицы в плоскости $z = -F$. Значения угла γ_1 находятся как

$\gamma_1 = \frac{(F+z_1)^2 tg^2\theta_1 + r_1^2 - r_0^2}{2r_1(F+z_1)\,tg\theta_1}$. Значение координаты φ на входе в линзу, φ_1 , в зависимости от значения её в фокальной

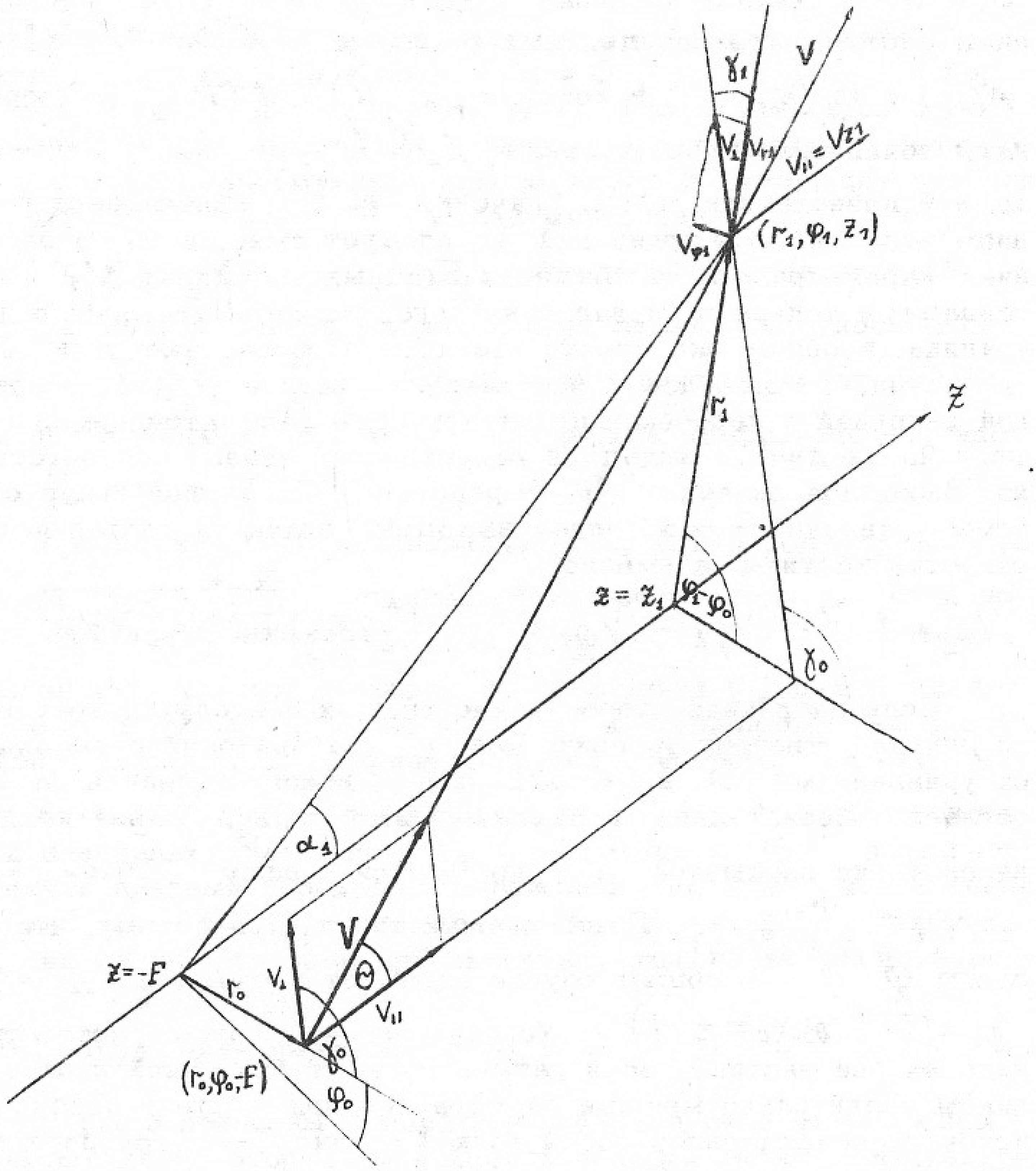

Рис.3. Связь координат и составляющих скорости на входе в линзу r_1 , φ_1 , z_1 , V_{r1}, $V_{\varphi 1}$, V_{z1} с координатами и углами в фокальной плоскости $z = -F$.

плоскости, φ_0, и от значений γ_0 и γ_1 есть $\varphi_1 = \varphi_0 + \gamma_0 - \gamma_1$.

Выходные координаты частицы z_2 и r_2 находятся решением системы трансцендентных уравнений $z(u) = z_2(\alpha_1^*)$, $r(u) = r_2(\alpha_1^*)$, в которых $z(u)$, $r(u)$ - координаты точки траектории частицы, $z_2(\alpha_1^*)$, $r_2(\alpha_1^*)$ - выходной поверхности линзы. Значение α_1^*, являющееся решением этой системы уравнений, не следует смешивать со значением параметра для нахождения входных координат α_1. Они совпадают только в случае точечного, монохроматического источника, в общем же случае различны и обозначают углы вылета частиц, родившихся в фокусе линзы на оси z с равновесной энергией и пересекающих траекторию рассматриваемой частицы на входной и выходной поверхностях линзы, соответственно. Выходное значение u - решение приведенной выше системы уравнений - определяет выходные значения составляющих скорости частицы, а именно

$$V_{r2} = uV, \quad V_{\varphi 2} = V_{\varphi 1}\frac{r_1}{r_2}, \quad V_{z2} = \sqrt{V^2 - V_{r2}^2 - V_{\varphi 2}^2}$$

Если начальная скорость частиц, как и в случае точечного источника, отвечает условию $\dot{\varphi} = 0$, траектории определяются уравнениями (3), в которых α_1, нужно заменить на θ_1 согласно обозначениям, принятым в этой главе. Уравнение для нахождения параметра α_1 упрощается к виду $tg\,\alpha_1 = tg\,\theta_1 \pm \frac{r_1}{F + z_1(\alpha_1)}$. Двойной знак получается потому, что условию $\dot{\varphi} = 0$ в общем случае отвечают частицы с $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 = \pi$ $(\cos\gamma_0 = \pm 1)$. Условие $\dot{\varphi} = 0$ можно растространить на все частицы, если размер пучка в фокальной плоскости линзы значительно меньше размера его при входе в линзу или источник представляет собой тонкий цилиндр, ось которого совпадает с осью поля. Один из этих случаев может иметь место при фокусировке вторичных частиц, если пучок первичных, обладающий, как правило, малым фазовым объёмом, сфокусирован оптимально.

Для оценки влияния φ - скорости на фокусировку частиц мы приводим (рис.4) зависимость их координаты r_{o2} и угла Θ_2 относительно оси z во второй фокальной плоскости "линейной линзы" с F = 60 см и b = 30 от значений начального угла Θ_1 при заданной начальной координате r_o = 1 см для четырех значений угла γ_{o1}, а именно $\gamma_{o1} = 0$, π, $\pm\frac{\pi}{2}$. В первых двух случаях φ - скорость равна 0 на протяжении всей траектории, в двух последних - близка, при достаточно больших Θ_1, к максимальному значению на входе в линзу, которое для заданных Θ_1, r_o и F имеет место при $\gamma_{o1} =$ $= \pi - \arccos \frac{r_o}{(F-z_1)\,tg\,\Theta_1}$. При идеальной фокусировке координаты и углы в фокальных плоскостях связаны соотношениями $r_{o2} = \Theta_1 F,\ \Theta_2 = -\frac{r_{o2}}{F}$. Наибольшее отклонение от идеальности при заданных r_o и Θ_1 обнаруживает фокусировка частиц с $\gamma_o = 0$ и $\gamma_o = \pi$.

Перпендикулярность поперечной скорости и радиуса вектора в случае $\gamma_{o1} = \pm\frac{\pi}{2}$ с хорошей точностью сохраняется и во второй фокальной плоскости ($\gamma_{o2} \simeq \frac{\pi}{2}$). Отклонение от перпендикулярности, которое не превышает 0,1 рад в диапазоне $0{,}01 \leq \Theta_1 \leq 0{,}25$ рад приводит к небольшому развороту эллипсов, являющихся на фазовой плоскости геометрическим местом частиц с $\gamma_{o1} = \pm\frac{\pi}{2}$ и заданными r_{o1} и Θ_1. При очень малых значениях Θ_1 угол γ_{o2} стремится к π, и тем совершается плавный переход от движения с $\dot\varphi \neq 0$ к движению с $\dot\varphi = 0$ при $\Theta_1 = 0$. Изменение координаты φ не вычислялось, как несущественное при аксиально-симметричных источниках.

б) Искажения эмитанса пучка

На рис.5 показаны поперечные фазовые объёмы-эмитансы пучков частиц во второй фокальной плоскости линзы для трех рассмотренных типов линз. По оси абсцисс отложена любая из поперечных оси z декартовых координат, отнесенная к фокусному расстоянию линзы по оси ординат - проекция на соответствующую плоскость угла наклона траектории частицы к оси z. В таком виде приведенные результаты справедливы для любого значения

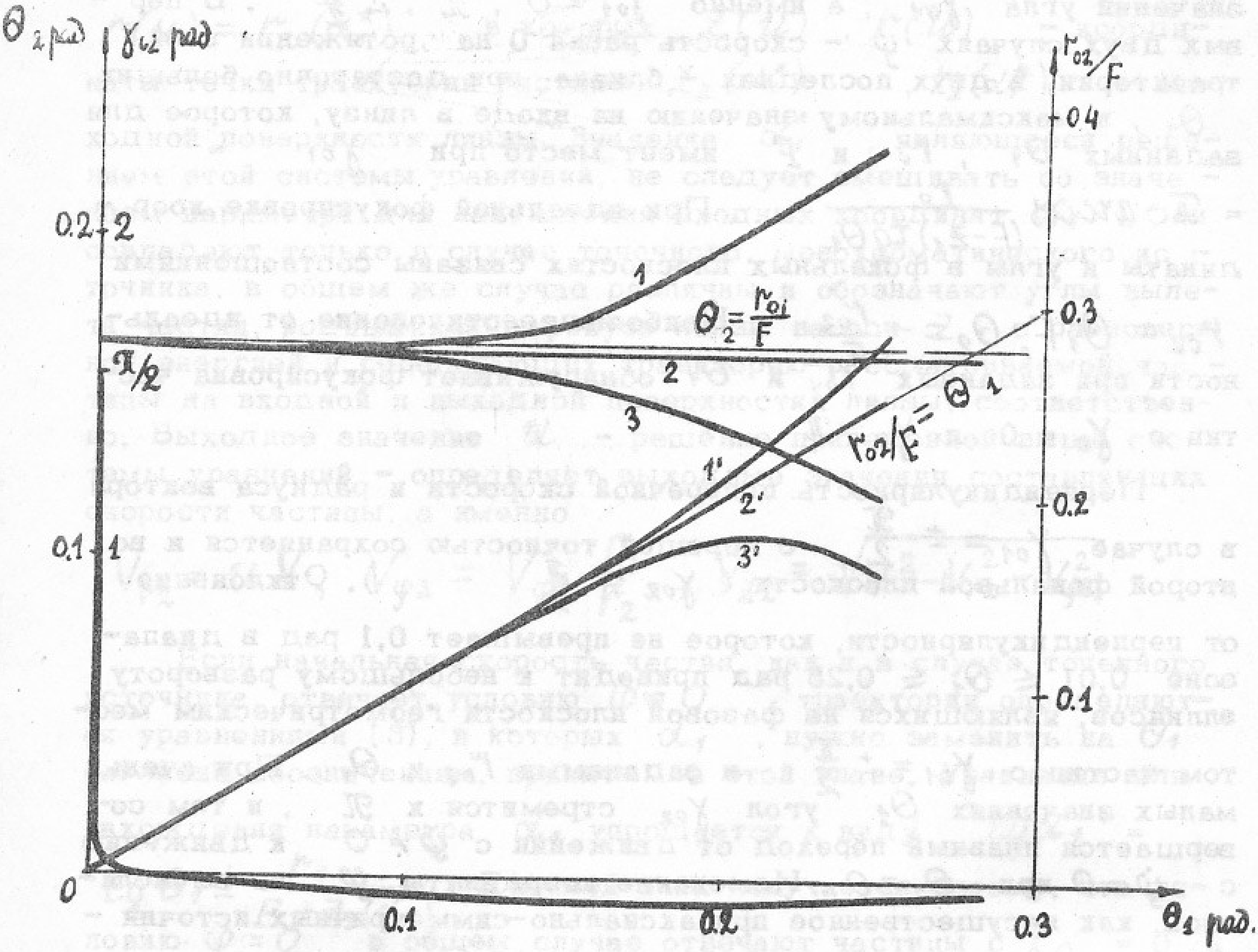

Рис.4. Углы Θ_2, γ_{02} и координата r_{02} частицы во второй фокальной плоскости линейной линзы с b = 30 в зависимости от значений начального угла Θ_1 при r_{01} = 0,0167 F и $\gamma_{01} = 0, \pi, \pm\pi/2$.

1 – $\Theta_2(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = 0$ 1' – $r_{02}(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = 0$

2 – $\Theta_2(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = \pm\frac{\pi}{2}$ 2' – $r_{02}(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = \pm\frac{\pi}{2}$

3 – $\Theta_2(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = \pi$ 3' – $r_{02}(\Theta_1)$ при $\gamma_{01} = \pi$

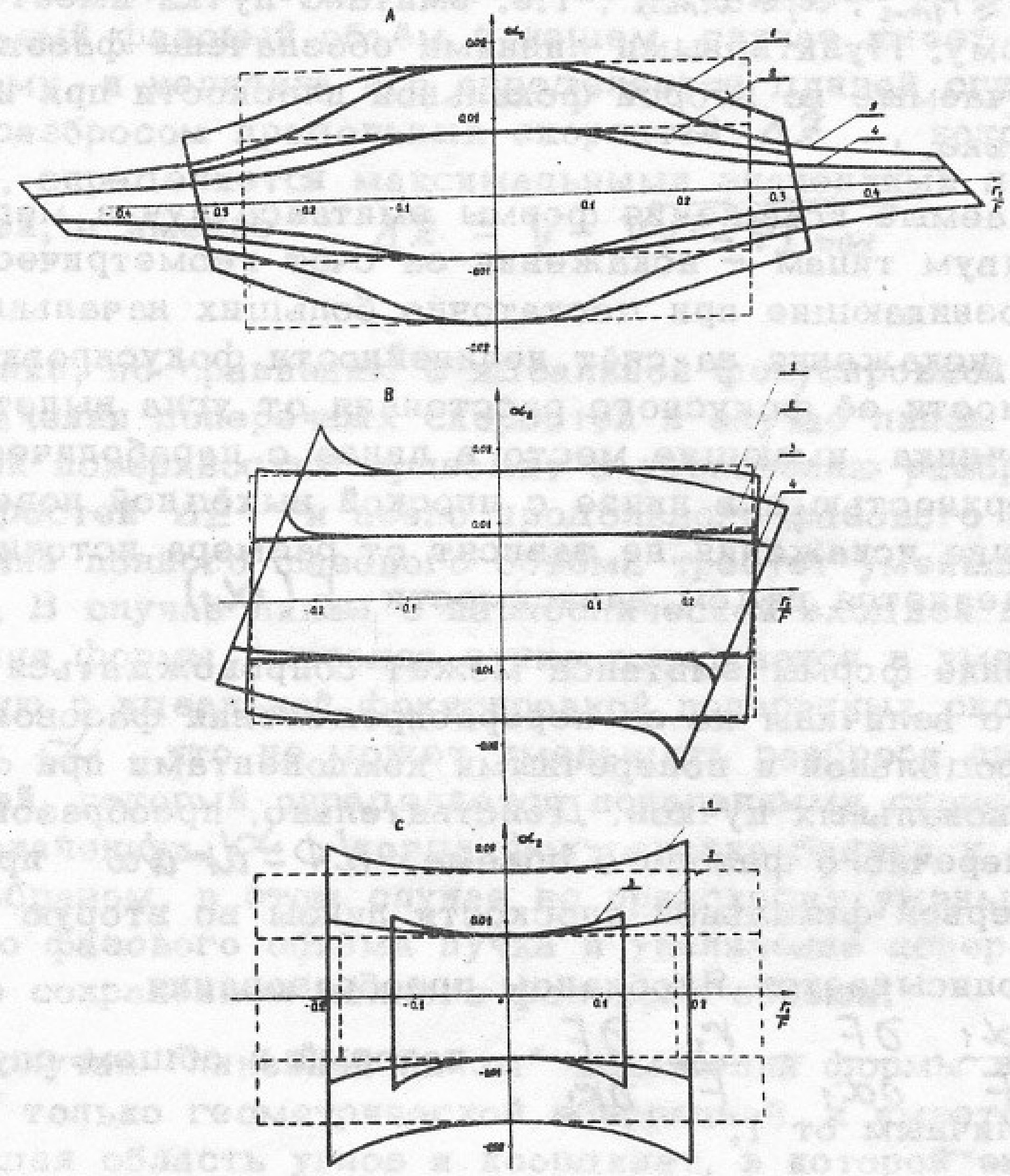

Рис.5. Поперечные фазовые объёмы пучков во второй фокальной плоскости линзы. Параметры пучка в первой фокальной плоскости: α_{1max} = ± 0,27 рад., r_{1max} = ± 1 см - кривые 1 и 3, r_{1max} = ± 0,5 см - кривые 2 и 4 на всех рисунках. A - параболическая линза с исправленным профилем F = 60 см, b = 12, a = 0,1 - кривые 1 и 2, b = 30, a = 0,25 - кривые 3 и 4. B - линейная линза F = 60 см, b = 12 - кривые 1 и 2, b =30 - кривые 3 и 4. C - „полулинза" F = 60 см, b = 12 - кривые 1 и 2, b = 30 (α_{1max} = 0,18 рад) - кривая 3. Пунктирные линии - неискаженный фазовый объём при идеальной фокусировке.

фокусного расстояния при одном и том же "b". В первой фокальной плоскости углы вылета и координаты частиц ограничены условиями $r_1 \leq r_{1max}$, $\alpha_1 \leq \alpha_{1max}$, т.е. эмитанс пучка имеет прямоугольную форму. Пунктирными линиями обозначены фазовые объёмы, получаемые во второй фокальной плоскости при идеальной фокусировке.

Наблюдаемые искажения формы эмитанса пучка могут быть отнесены к двум типам - искажения за счёт геометрической аберрации, возникающие при достаточно больших начальных координатах, и искажения за счёт нелинейности фокусировки линзы - зависимости её фокусного расстояния от угла вылета частицы из источника, имеющие место в линзе с параболической входной поверхностью и в линзе с плоской выходной поверхностью. Последние искажения не зависят от размера источника, и вид их определяется видом зависимости $F(\alpha_1)$

Искажение формы эмитанса может сопровождаться несохранением его величины из-за перераспределения фазового объёма между продольной и поперечными компонентами при фокусировке непараксиальных пучков. Действительно, преобразование элемента поперечного фазового объёма $d\Phi = dr\,d\alpha$ при фокусировке из первой фокальной плоскости линзы во вторую $d\Phi_2 = D\,d\Phi_1$, описывается Якобианом преобразования

$$D = 1 + \frac{\alpha_1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} - \frac{r_1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial r_1}$$

, который в общем случае может быть отличным от 1.

В случае линзы с плоской выходной поверхностью третьим слагаемым в выражении для D можно пренебречь ввиду малой зависимости фокусного расстояния от координаты r_1, второе же слагаемое отрицательно, т.к. $\frac{\partial F}{\partial |\alpha_1|} < 0$. В результате Якобиан преобразования оказывается меньшим 1, и происходит заметное уменьшение эмитанса пучка.

В случае линзы с параболической входной поверхностью $\frac{\partial F}{\partial |\alpha_1|} > 0$, и можно ожидать увеличение эмитанса. Однако, в этом случае зависимость F от r_1 оказывается существенной, благодаря чему Якобиан преобразования остается близким к 1, и величина эмитанса сохраняется с хорошей точностью.

Несоответствие в поведении эмитанса в этих двух случаях не является случайным, а диктуется сохранением полного фазового объёма, как будет видно из следующих рассуждений. Продольный фазовый объём в нашем случае имеет прямоугольную форму, и величина его определяется длиной сгустка частиц Δz и разбросом продольных скоростей $\Delta \dot{z}$, который, в свою очередь, определяется максимальными значениями поперечных скоростей, а именно $\Delta \dot{z} = V - \sqrt{V^2 - V_{\perp max}^2}$

Увеличение, по сравнению с идеальной фокусировкой, максимального значения поперечных скоростей в случае линзы с плоской выходной поверхностью приводит к увеличению разброса продольных скоростей $\Delta \dot{z}$ и всего продольного фазового объёма, и сохранение полного фазового объёма требует уменьшения поперечного. В случае линзы с параболической входной поверхностью искажение формы эмитанса пучка выражается в уменьшении по сравнению с идеальной фокусировкой поперечных скоростей при больших α, что не может уменьшить разброса продольных скоростей, который определяется поперечными скоростями при малых значениях α, когда фокусировка близка к идеальной. Таким образом, в этом случае не происходит уменьшения продольного фазового объёма пучка и увеличение поперечного запрещено сохранением полного фазового объёма.

В случае "линейной линзы" искажения формы эмитанса обусловлены только геометрической аберрацией, и имеется достаточно большая область углов и координат, в которой эмитанс пучка передается линзой практически без искажений (рис.5).

III. Хроматические аберрации

Хроматическую аберрацию линзы, т.е. угловой разброс на её выходе в зависимости от разброса импульсов $\Delta p/p$, можно выразить соотношением $\Delta\alpha_p = \alpha_1 \varepsilon(\alpha_1) \frac{\Delta p}{p}$, где величина ε равна 1 при углах, отвечающих приближению тонкой линзы, а затем уменьшается с ростом α_1. Зависимость ε от α_1 различна для разных типов линз и значений "b". На рис.6 приведены зависимости выходных углов от углов входа при $\Delta p/p$ =0,10 для различных типов линз при точечном источнике.

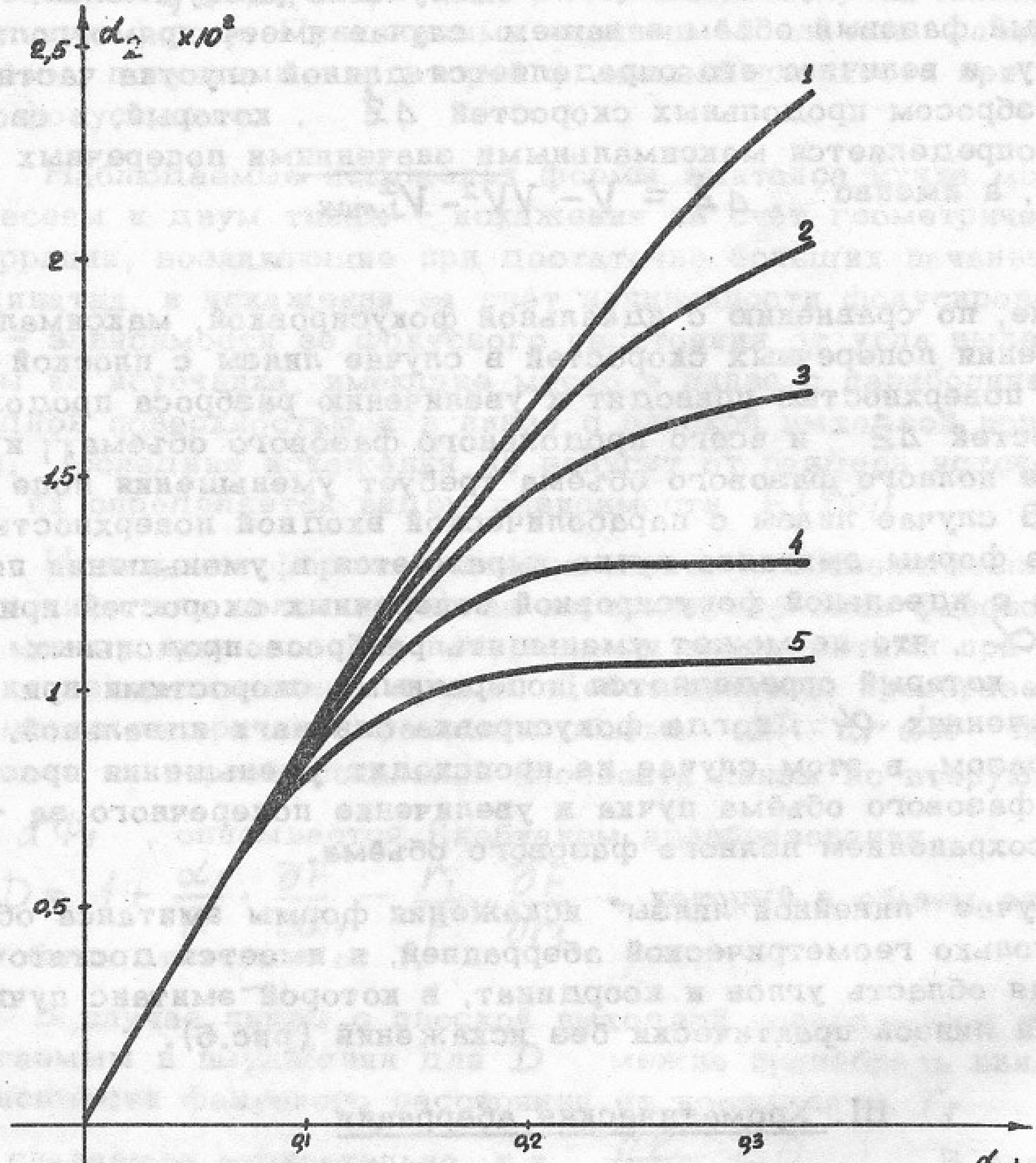

Рис.6. Хроматические аберрации при $\Delta p/p = 0.1$ кривые 1 и 2 – „полулинза" с F = 60 см, b = 12 и b = 30, соответственно, кривые 3 и 4 – линейная линза с F = 60 см, b = 12 и b = 30, соответственно, кривая 5 – линза с параболической входной поверхностью с F = 60, b = 30 (a = 0,25).

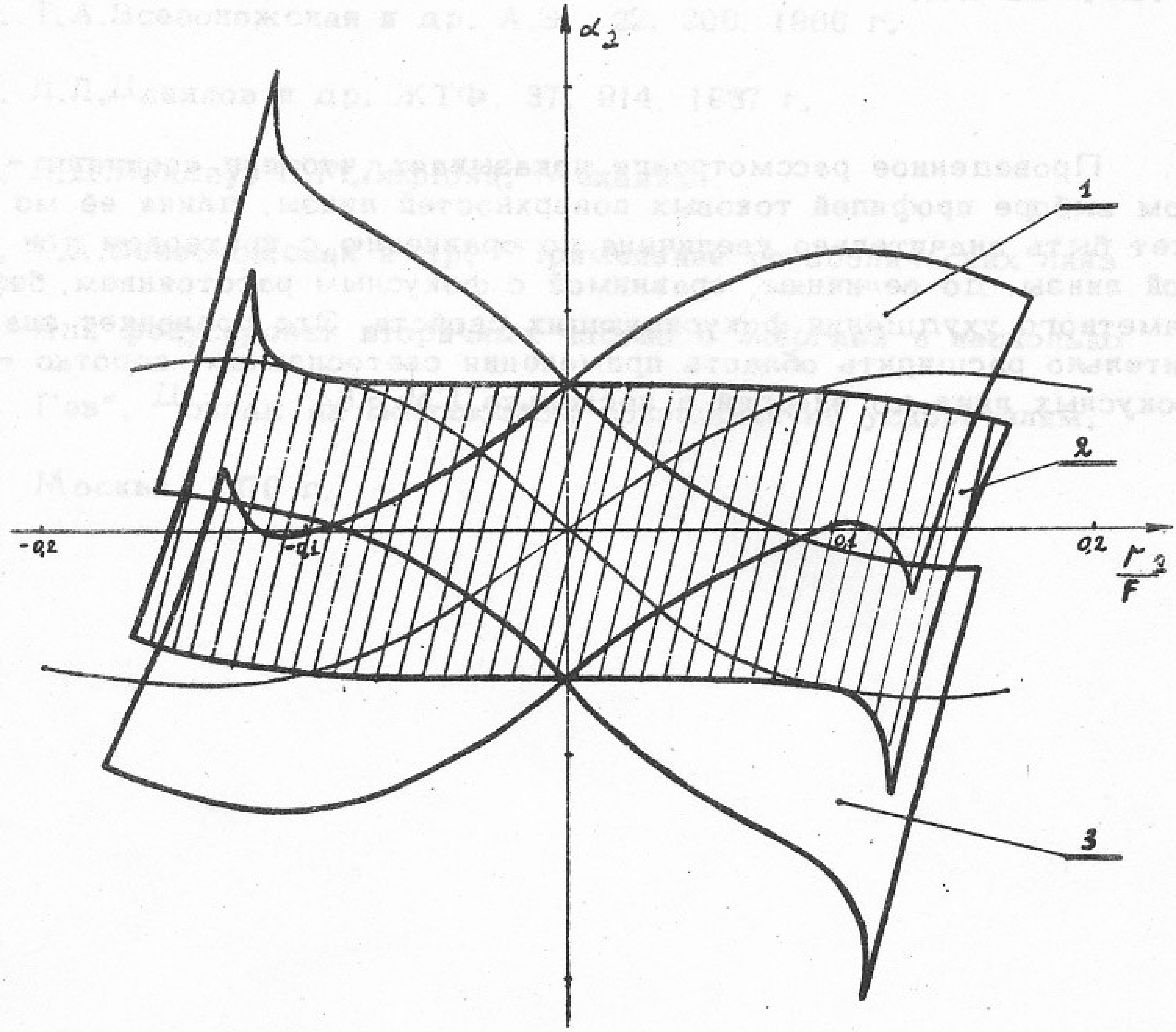

Рис.7. Искажения фазового объёма при немонохроматичном неточечном источнике: $r_{1max} = \pm\ 0{,}5$ см, $\alpha_{1max} = 0{,}15$рад. Линза линейная с $b = 120$, $F = 60$ см

$1 - \frac{\Delta p}{p} = +0{,}05$; $\quad 2 - \frac{\Delta p}{p} = 0$; $\quad 3 - \frac{\Delta p}{p} = -0{,}05$

Характер искажений поперечного фазового объёма при немонохроматичном неточечном источнике демонстрируется на рис.7 для линейной линзы с b = 120 при $\Delta p/p$ = ± 5%.

Все вычисления в этой работе проводились на ЭВМ Минск-22 в ИЯФ СО АН.

Проведенное рассмотрение показывает, что при специальном выборе профилей токовых поверхностей линзы, длина её может быть значительно увеличена по сравнению с критерием тонкой линзы, до величины, сравнимой с фокусным расстоянием, без заметного ухудшения фокусирующих свойств. Это позволяет значительно расширить область применения светосильных, короткофокусных линз, до энергий в несколько Гэв /5/.

Литература

1. Г.И.Будкер и др. Международная конференция по ускорителям, Дубна, 1963 г., стр.268.

2. Т.А.Всеволожская и др. А.Э., 22, 206, 1966 г.

3. Л.Л.Данилов и др. ЖТФ, 37, 914, 1967 г.

4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика.

5. Т.А.Всеволожская и др. "Применение параболических линз для фокусировки вторичных частиц с энергией в несколько Гэв". Доклад на Всесоюзном совещании по ускорителям, Москва, 1970 г.

Ответственный за выпуск Всеволожская Т.А.
Подписано к печати 20.7.71. МН01251
Усл. 1,2 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 39. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.