

7

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 14 - 71

Ю.А.Березин, Г.И.Дудникова

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
НА УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ**

Новосибирск

1971

Ю.А.Березин, Г.И.Дудникова

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

В ПЛАЗМЕ

АННОТАЦИЯ

В работе излагаются результаты решения задачи о распространении ударных волн в холодной разреженной плазме поперёк магнитного поля при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности, проводится сравнение с результатами решения без учета теплопроводности. Показано, что при малых числах Маха ($M < 2.5$) влиянием теплопроводности можно пренебречь. Для чисел Маха $2.8 \leq M \leq 3.3$ получен изомагнитный скачок плотности. Увеличение амплитуды магнитного поля на границе плазмы приводит к разрушению изомагнитного скачка. Критические числа Маха, характеризующие при этом ударную волну $3.4 \leq M_* \leq 3.8$.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} + \rho u^2 \right) = 0$$

$$p = NT$$

В настоящее время следует считать доказанным, что существуют критические числа Маха M_* , при которых происходит качественное изменение структуры ударных волн в разреженной плазме [1-4]. Подобное явление, как известно, имеет место и в обычном теплопроводном газе - изотермический скачок плотности. Тщательное исследование стационарных ударных волн в плазме без магнитного поля, но с учётом кулоновской проводимости и теплопроводности было проведено Имшенником в [5]. Показано, что в зависимости от скорости волны возможны как непрерывные, так и разрывные решения (изоэлектронотермические скачки). Мортон в [6] были изучены стационарные и нестационарные волны сжатия в двухжидкостной плазме при наличии магнитного поля, однако в его работе не рассмотрен эффект диссипации энергии, который необходим для возникновения ударных волн, а также отсутствует теплопроводность. Вудс из анализа особых точек уравнений структуры ударной волны при наличии проводимости и теплопроводности нашел критические параметры, при которых решение становится разрывным [7]. Нами была рассмотрена задача о структуре нестационарных и стационарных ударных волн в плазме поперёк магнитного поля с учётом проводимости и электронной теплопроводности.

1. Система уравнений и её стационарные решения

Для одномерного движения двухжидкостной квазинейтральной плазмы поперёк магнитного поля с учётом проводимости, дисперсии и электронной теплопроводности имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} + \rho u^2 \right) = 0$$

$$p = \mathcal{N}T$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{2} \rho + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{m_i m_e c^2}{8\pi e^2 \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left[\frac{5}{2} \rho + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{H^2}{4\pi} + \frac{m_i m_e c^2}{32 \pi^2 e^2 \rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\
& - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} H \frac{\partial H}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{m_i m_e c^2}{16\pi^2 e^2} H \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\
& \times \left. \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u H - \frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{\partial H}{\partial x} - \right. \\
& - \left. \frac{m_i m_e c^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

Здесь $\rho = N(m_i + m_e)$ — плотность плазмы, N — число частиц каждого сорта в единице объёма, $\sigma = \frac{N e^2}{m_e \nu_{\text{eff}}}$ — проводимость плазмы, $\alpha_1 = \frac{2 T N \nu_{\text{eff}}}{m_e \omega_H^2}$ — коэффициент электронной теплопроводности плазмы поперёк магнитного поля (см., например, [8]), ν_{eff} — некоторая эффективная частота столкновений частиц плазмы с флуктуациями электромагнитного поля. В уравнении энергии два последних члена в фигурных скобках дают джоулев нагрев электронов и эффект теплопроводности.

Для решения стационарной задачи перейдем в систему координат, связанную с волной. Ниже мы будем рассматривать движения с характерным пространственным масштабом, обусловленным конечной проводимостью, а не дисперсией, поэтому пренебрежем дисперсионными эффектами, пропорциональными массе электрона. Тогда, после однократного интегрирования, из (1) получаем:

$$\rho u = \rho_0 u$$

$$p + \frac{H^2}{8\pi} + \rho u^2 = p_0 + \frac{H_0^2}{8\pi} + \rho_0 u^2 \equiv C_1$$

$$u \left(\frac{5}{2} p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{H^2}{4\pi} \right) - \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma} H \frac{dH}{dx} - \quad (2)$$

$$- x_1 \frac{dT}{dx} = u \left(\frac{5}{2} p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 u^2 + \frac{H_0^2}{4\pi} \right) \equiv C_2$$

$$\frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{dH}{dx} = u H - u H_0.$$

Индексом "0" отмечены величины в невозмущенной плазме перед ударной волной. Преобразуем систему (2) к удобному для исследования виду, используя непрерывность потока массы и импульса.

Кроме того, перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов плотности, скорости, давления, магнитного поля,

длины и частоты столкновений следующие величины: $\rho_0, V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi \rho_0}}, \frac{H_0^2}{4\pi}, H_0, \tilde{\sigma} = \frac{c^2}{4\pi \sigma_0 V_A} (\sigma_0 = N_0 e^2 / m_e v_{eff}),$

$\omega = e H_0 / \sqrt{m_e m_i} c$. Число Маха равно $M = \frac{u}{V_A}$.

В результате получаем:

$$\frac{dH}{dx} = M \left(H - \frac{M}{u} \right)$$

$$\frac{p(p - Mu)}{MH^2} \frac{du}{dx} = -u \left(1 - \frac{p}{H^2} \right) \left(H - \frac{M}{u} \right) H + \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{2} u (5p + Mu + 2H^2) - C_2$$

Таким образом, задача о структуре стационарной ударной волны, при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности, сведена к системе двух обыкновенных уравнений (3). Стационарные состояния плазмы перед волной (невозмущенное состояние) и за волной (возмущенное состояние) соответствуют особые точки "0" и "1" системы (3):

$$u_0 = M ; \quad H_0 = 1 \quad (4a)$$

$$p_0 ; \quad u_1 = \frac{M}{H_1}$$

$$M^2 = \frac{p_1 - p_0 + 0.5(H_1^2 - 1)}{1 - \frac{1}{H_1}} \quad (4b)$$

$$p_1 = \frac{p_0(4M - 1) + 0.5(H_1 - 1)^3}{4 - H_1}$$

Формулы (4b) - это условие Гюгоньо для движений поперёк магнитного поля.

Как показывает анализ, в рассматриваемом случае решение является разрывным, когда коэффициент при производной $\frac{du}{dx}$ обращается в нуль, т.е. $p_1 = M u_1$, откуда получаем уравнение для определения критических параметров M_* , H_{1*} ударной волны:

$$M_*^2 + p_0 - 0.5(H_{1*}^2 - 1) - \frac{2M_*^2}{H_{1*}} = 0 \quad (5)$$

В реальных условиях $p_0 \ll 1$, поэтому можно заменить в (5) M_*^2 выражением $(H_{1*} + 5)H_{1*} / 2(4 - H_{1*})$. В результате получим уравнение для критической амплитуды магнитного поля за фронтом волны:

$$H_{1*}^3 - H_{1*}^2 + 2H_{1*} - 6 = 0 \quad (6)$$

откуда следует, что $H_{1*} = 3$.

Таким образом, при наличии теплопроводности и проводимости профиль ударной волны является монотонным при $N_1 < N_{1*} = 3$,

$M < M_* = 3.46$, а при $N_1 > 3$, $M > 3.46$ - разрывным. Этот результат, естественно, совпадает с результатом работы [7], где он получен на основе классификации особых точек исходной системы уравнений. Заметим, что величина критического числа Маха $M_* = 3.46$ не зависит от конкретного вида коэффициента теплопроводности.

Если пренебречь влиянием теплопроводности, оставив только проводимость, то критические параметры ударной волны

$$N_{1*} \approx 2.66, \quad M_* \approx 2.76.$$

Найдем численно нелинейное решение задачи о структуре стационарной ударной волны в плазме с учётом проводимости и теплопроводности. Для этого необходимо провести анализ типа особых точек "0" и "1", соответствующих невозмущенному и возмущенному состояниям плазмы. Произведя линеаризацию уравнений (3) вблизи особых точек, т.е. полагая $u = u_{0,1} + u'$, $N = N_{0,1} + N'$ где $u' \ll u_{0,1}$, $N' \ll N_{0,1}$, получим характеристическое уравнение, корни которого для невозмущенного состояния равны:

$$K^{(0)} = \frac{3M}{4\rho_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\rho_0}{3} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right)} \right)$$

Отсюда следует, что корни $K^{(0)}$ независимо от числа Маха $M > 1$ вещественны и имеют одинаковый знак; поэтому особая точка "0" - узел. Корни характеристического уравнения в возмущенном состоянии $K^{(1)}$ зависят от числа Маха: при $M < 3.46$, $N_1 < 3$ они вещественны и имеют разный знак (особая точка "1" - седло); при $M > 3.46$, $N_1 > 3$ они вещественны и имеют одинаковый знак (особая точка "1" - узел). Таким образом, когда скорость ударной волны меньше критической, особые точки "0" и "1", как и в обычном газе, образуют пару узел - седло.

Доказательство существования и единственности решения в этом случае можно провести аналогично, например [9]. Когда скорость ударной волны больше критической, нельзя построить про-

филь, непрерывный по всем функциям.

На рис.1 приведено численное решение системы (3), определяющее структуру ударной волны при $\rho_0 = 0.01$, $H_1 = 2.25$,

$M = 2.17$. В качестве начальных условий для численного решения были взяты значения функций, полученных из решения уравнений (3), линеаризованных вблизи седловой точки "1". Начинать решение от узловой особой точки "0" нельзя, поскольку из неё выходит бесконечно много интегральных кривых.

II. Нестационарные решения.

Для решения нестационарной задачи система уравнений (1) записывается в безразмерных переменных и лагранжевых координатах (ξ, τ) :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho + H^2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = u; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = v$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (vH) = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \quad (7)$$

$$v \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{5}{3} p \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{4}{3} \alpha \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)$$

$$T = p v$$

Здесь H - магнитное поле в единицах H_0 ; p - давление в единицах $\frac{H_0^2}{8\pi}$; V - удельный объём в единицах \mathcal{N}_0^{-1} ; τ - время в единицах ω_2^{-1} ; u - скорость частиц в единицах V_A ; x - эйлерова координата частиц в единицах c/ω_{oe} ;

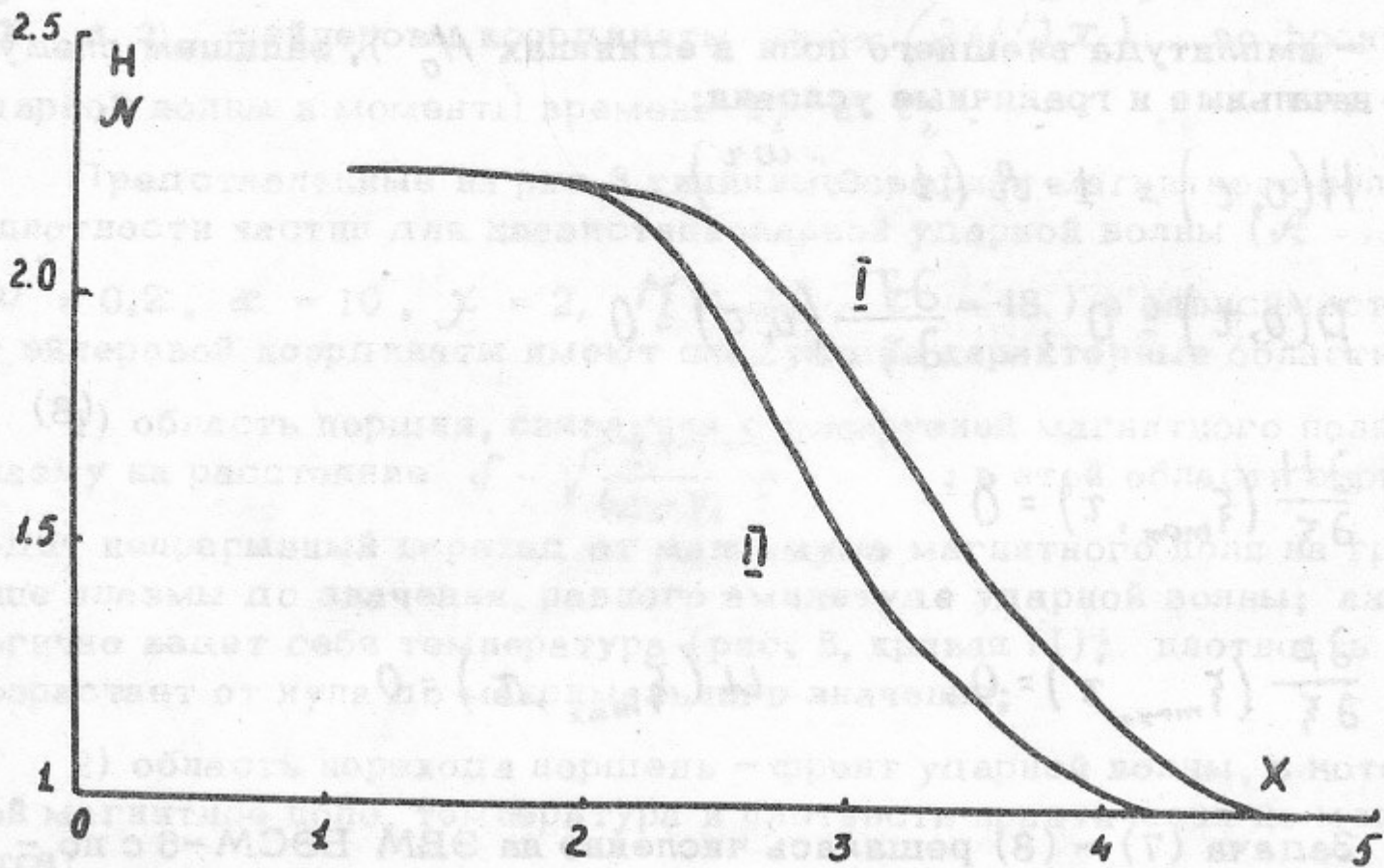


Рис.1. Профили магнитного поля - кривая I и плотности частиц - кривая II стационарной ударной волны при $\rho_0 = 0.01$, $H_1 = 2.25$, $M = 2.17$.

T - температура электронов в единицах $\frac{H_0^2}{8\pi N_0}$; $\alpha = \frac{\nu_{eff}}{\omega_2}$;
 $\omega_2 = \frac{e H_0}{\sqrt{m_i m_e} c}$; $V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N_0 m_i}}$; $\omega_{oe} = \sqrt{4\pi N_0 e^2 / m_e}$.

коэффициент теплопроводности $\alpha_1 = \gamma \cdot N$; γ и ν_{eff} - постоянные величины.

Предполагая, что в начальный момент времени однородная квазинейтральная холодная плазма ($\rho_0 \ll H_0^2 / 8\pi$) плотности N_0 занимает область $0 \leq x \leq x_{max}$ (направление невозмущенного магнитного поля совпадает с осью x), на границе которой нарастает магнитное поле по закону $H = 1 + A x (1 - e^{-\omega \tau})$ (ω - частота внешнего поля в единицах ω_2 , A - амплитуда внешнего поля в единицах H_0), запишем следующие начальные и граничные условия:

$$H(0, \tau) = 1 + A (1 - e^{-\omega \tau})$$

$$p(0, \tau) = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$$

(8)

$$\frac{\partial H}{\partial \xi}(\xi_{max}, \tau) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(\xi_{max}, \tau) = 0; \quad u(\xi_{max}, \tau) = 0$$

Задача (7) - (8) решалась численно на ЭВМ БЭСМ-6 с помощью разностной схемы второго порядка точности (см. приложение).

1. Низкие числа Маха ($M < 2.5$).

Рассмотрим решение задачи (7) - (8) для низких чисел Маха ($M < 2.5$). Для значений амплитуды на границе плазмы

$1.5 \leq A \leq 2.5$ сформировавшаяся ударная волна является квазистационарной, т.е. скорость волны, её амплитуда и ширина фронта со временем практически не меняются (рис.2). Из приведенных графиков видно, что при данных параметрах ударная волна является квазистационарной с момента времени $\tau = 24$. Процессы, связанные с формированием квазистационарной ударной волны, аналогичны описанным в [4] и в данной работе не приведены. Заметим, что число Маха ударной волны определялось по точкам максимума крутизны магнитного поля, т.е. $M = \frac{x_2 - x_1}{\tau_2 - \tau_1}$, где x_1 и x_2 - эйлеровы координаты $\max(\partial H / \partial x)$ во фронте ударной волны в моменты времени τ_1 и τ_2 .

Представленные на рис.3 типичные профили магнитного поля и плотности частиц для квазистационарной ударной волны ($A = 1.5$,

$\omega = 0.2$, $\alpha = 10$, $\gamma = 2$, $M \approx 2.2$, $\tau = 48$) в зависимости от эйлеровой координаты имеют следующие характерные области:

1) область поршня, связанная с диффузией магнитного поля в плазму на расстояние $\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{4\pi\sigma V_A} t}$; в этой области происходит непрерывный переход от максимума магнитного поля на границе плазмы до значения, равного амплитуде ударной волны; аналогично ведет себя температура (рис. 5, кривая II); плотность возрастает от нуля до максимального значения;

2) область перехода поршень - фронт ударной волны, в которой магнитное поле, температура и плотность практически не меняются;

3) фронт ударной волны с шириной Δ , равной диссипативному размеру $\Delta \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma V_A}$.

Профиль плотности отстает от профиля магнитного поля на расстояние $\delta_1 \sim 6 \frac{c}{\omega_{oe}} \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma V_A (M-1)}$ [2], как и дол -

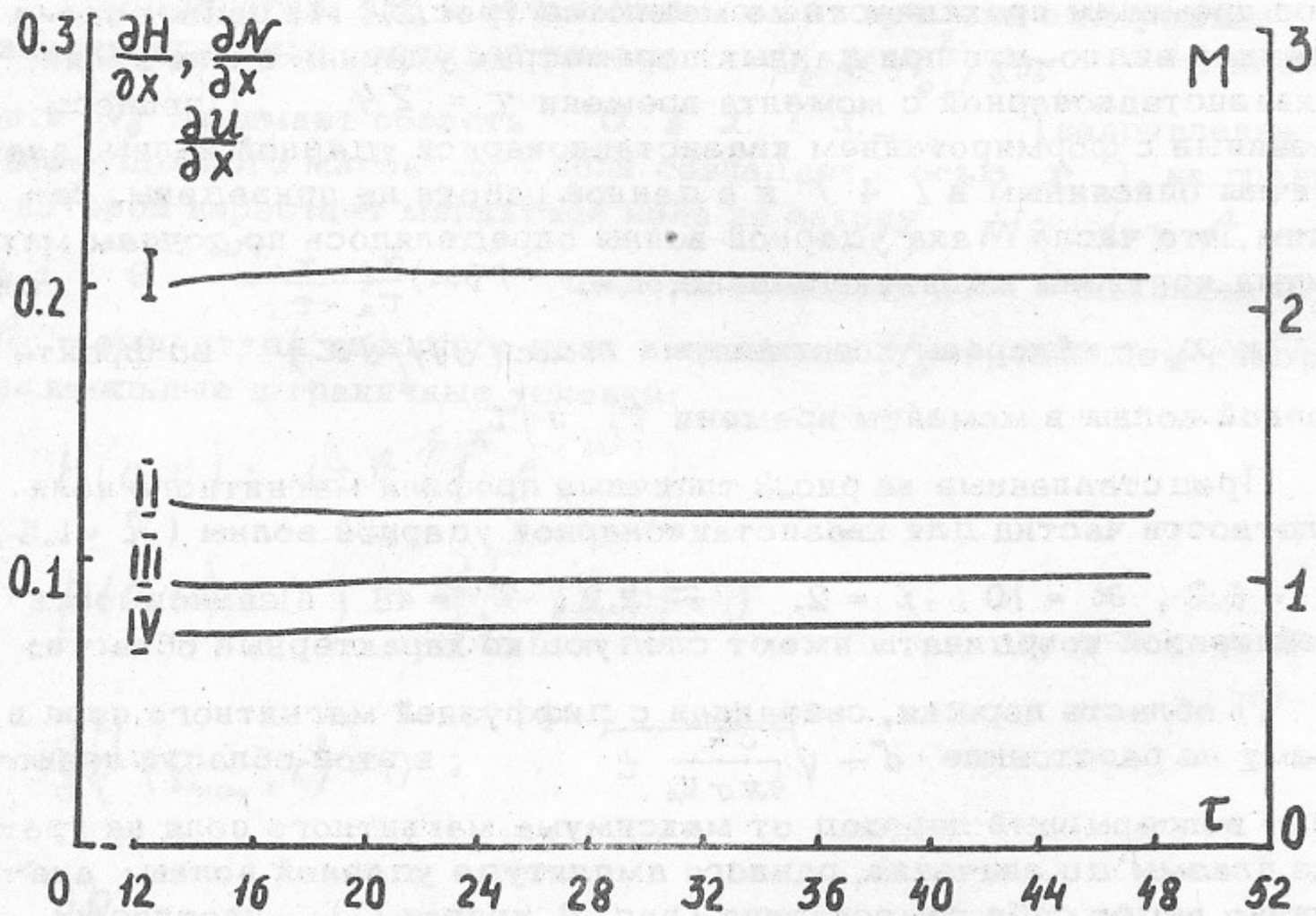


Рис.2. Зависимость числа Маха - кривая I и максимума производных профилей плотности - кривая II, скорости частиц - кривая III, магнитного поля - кривая IV от времени для квазистационарной ударной волны ($\mathcal{A} = 1.5$, $\alpha = 10$, $\chi = 2$).

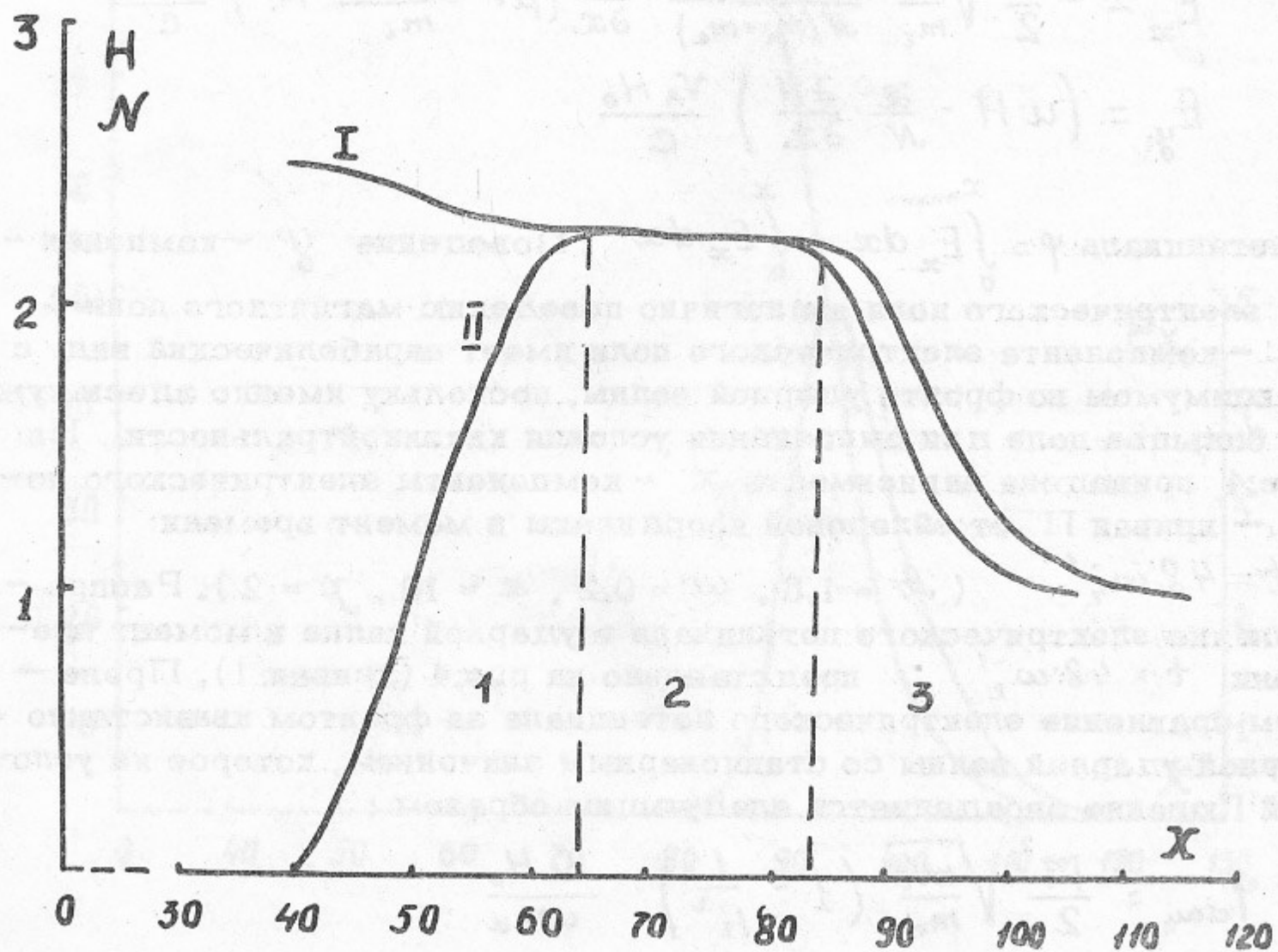


Рис.3. Профили магнитного поля - кривая 1 и плотности частиц - кривая II для квазистационарной ударной волны ($A = 1.5$, $\alpha = 10$, $\gamma = 2$) в момент времени $t = 48 \omega_2^{-1}$.

жно быть при резистивном механизме диссипации во фронте ударной волны. Характерной особенностью квазистационарной ударной волны является наличие области 2, которая возникает в момент отхода волны от поршня. Заметим, что для больших значений амплитуд внешнего поля (например, $A = 10$, $\omega = 0.2$) ударная волна не отходит от поршня и происходит "сгребание" плазмы внешним магнитным полем.

Из уравнений движения можно найти значения электрических полей

$$E_x = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{m_i}{N(m_i + m_e)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho + \frac{m_i - m_e}{m_i} H^2 \right) \frac{V_A \cdot H_0}{c}$$

$$E_y = \left(u H - \frac{x}{N} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \frac{V_A H_0}{c}$$

и потенциала $\varphi = \int_0^{x_{\max}} E_x dx - \int_0^x E_x dx$. Поведение y -компоненты электрического поля аналогично поведению магнитного поля;

x -компонента электрического поля имеет параболический вид с максимумом во фронте ударной волны, поскольку именно здесь нужно большее поле для выполнения условия квазинейтральности. На рис.4 приведена зависимость x -компоненты электрического поля - кривая II от эйлеровой координаты в момент времени

$$t = 48 \omega_2^{-1} \quad (A = 1.5, \omega = 0.2, x = 10, \chi = 2).$$

Распределение электрического потенциала в ударной волне в момент времени $t = 48 \omega_2^{-1}$ представлено на рис.4 (кривая 1). Проведем сравнение электрического потенциала за фронтом квазистационарной ударной волны со стационарным значением, которое из условий Гюгонно определяется следующим образом:

$$\varphi_{\text{стац}} = \frac{M^2}{2} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(1 - \frac{1}{H^2} \right) \cdot \frac{V_A H_0}{\omega_{oe}}$$

Для режима, характеризующегося параметрами $A = 1.5$, $x = 10$,

$$\chi = 2, \quad \varphi_{\text{стац}} \approx 82 \frac{V_A H_0}{\omega_{oe}}.$$

На рис.4 значение $\varphi_{\text{стац}}$ нанесено пунктирной линией.

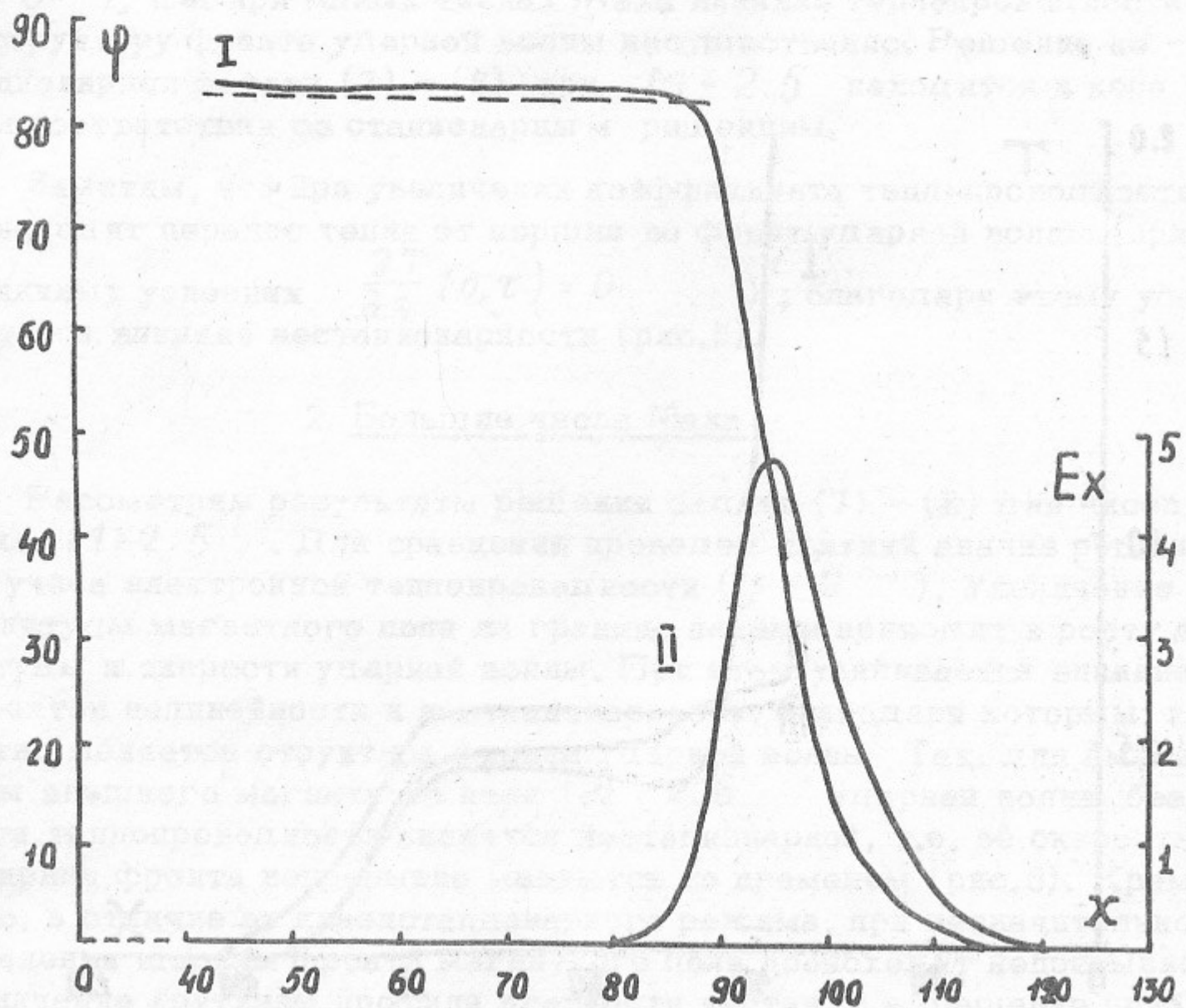


Рис.4. Пространственные профили электрического потенциала в единицах $V_A H_0 / \omega_{ce}$ кривая I и \mathcal{E} - компоненты электрического поля в единицах $V_A H_0 / c$ - кривая II в момент времени $t = 48 \omega_2^{-1}$ для квазистационарной ударной волны.

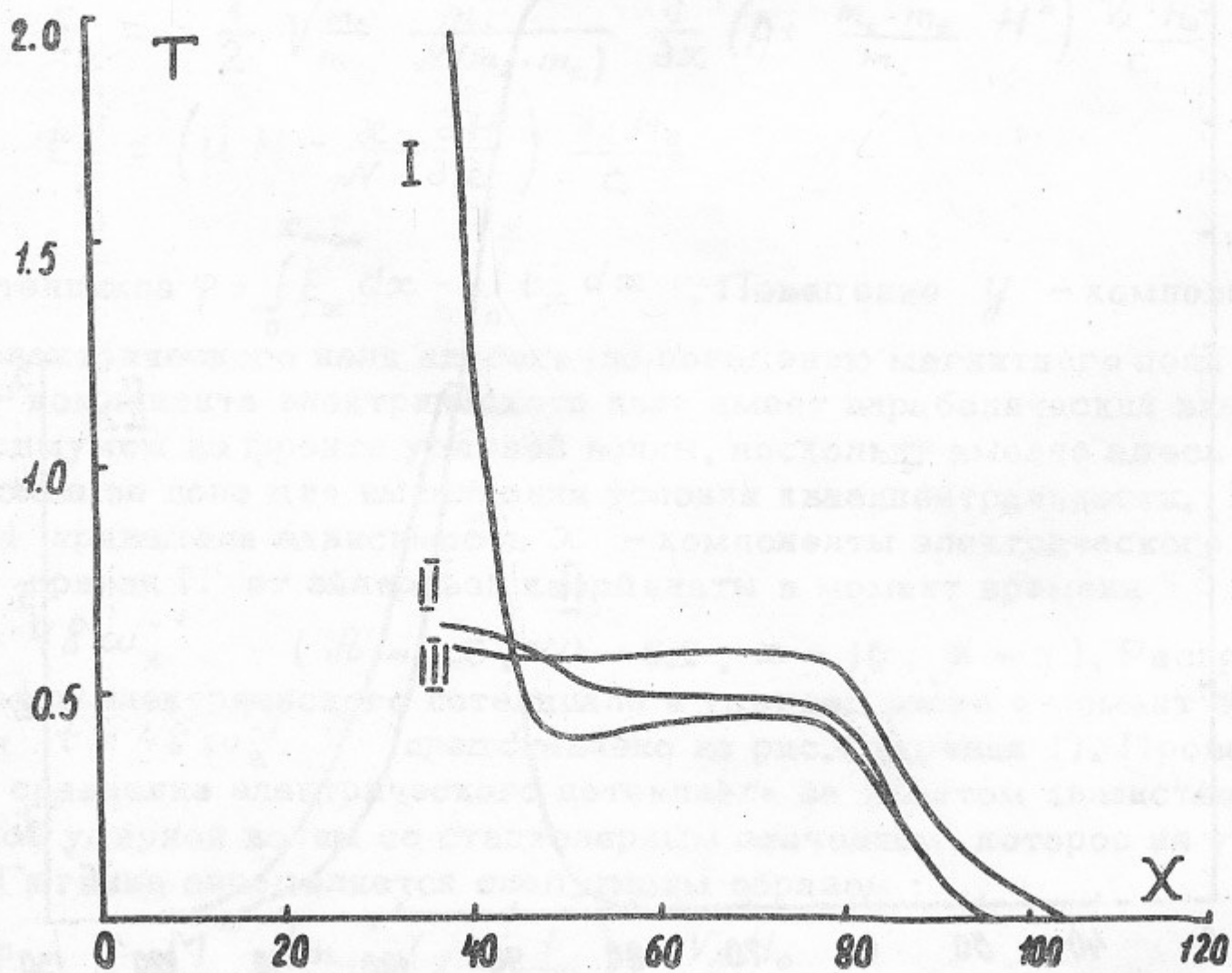


Рис.5. Пространственный профиль температуры при значениях $\chi = 0$ - кривая I, $\chi = 2$ - кривая II, $\chi = 10$ - кривая III.

Проведенное сравнение решений задачи (7) - (8) для малых чисел Маха ($M < 2.5$) при значениях коэффициента теплопроводности $\chi = 0$ и $\chi \neq 0$ показало, что учёт теплопроводности приводит лишь к незначительному увеличению ширины фронта квазистационарной ударной волны (ширина фронта ударной волны при $\chi = 2$ приблизительно на 2% больше ширины фронта при $\chi = 0$), т.е. при малых числах Маха влияние теплопроводности на структуру фронта ударной волны несущественно. Решение нестационарной задачи (7) - (8) при $M < 2.5$ находится в хорошем соответствии со стационарным решением.

Заметим, что при увеличении коэффициента теплопроводности происходит перенос тепла от поршня во фронт ударной волны (при граничных условиях $\frac{\partial T}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$); благодаря этому усиливается влияние нестационарности (рис.5).

2. Большие числа Маха

Рассмотрим результаты решения задачи (7) - (8) для чисел Маха $M > 2.5$. Для сравнения проведем краткий анализ решения без учёта электронной теплопроводности ($\chi = 0$). Увеличение амплитуды магнитного поля на границе плазмы приводит к росту амплитуды и скорости ударной волны. При этом усиливается влияние эффектов нелинейности и нестационарности, благодаря которым качество меняется структура фронта ударной волны. Так, для амплитуды внешнего магнитного поля $\mathcal{A} > 2.6$ ударная волна без учёта теплопроводности является нестационарной, т.е. её скорость и ширина фронта непрерывно меняются со временем (рис.6). Кроме того, в отличие от квазистационарного режима, при незначительном изменении ширины фронта магнитного поля происходит непрерывное увеличение крутизны профиля плотности частиц, т.е. решение приближается к разрывному. Это имеет место при числах Маха $M_* \gtrsim 2.8$.

На рис.6 приведены типичные зависимости крутизны профилей плотности частиц и магнитного поля в ударной волне при наличии электронной теплопроводности и магнитной вязкости для чисел Маха $2.8 \leq M \leq 3.3$ от времени. Из графиков видно, что с некоторого момента времени τ (τ зависит от граничных условий)

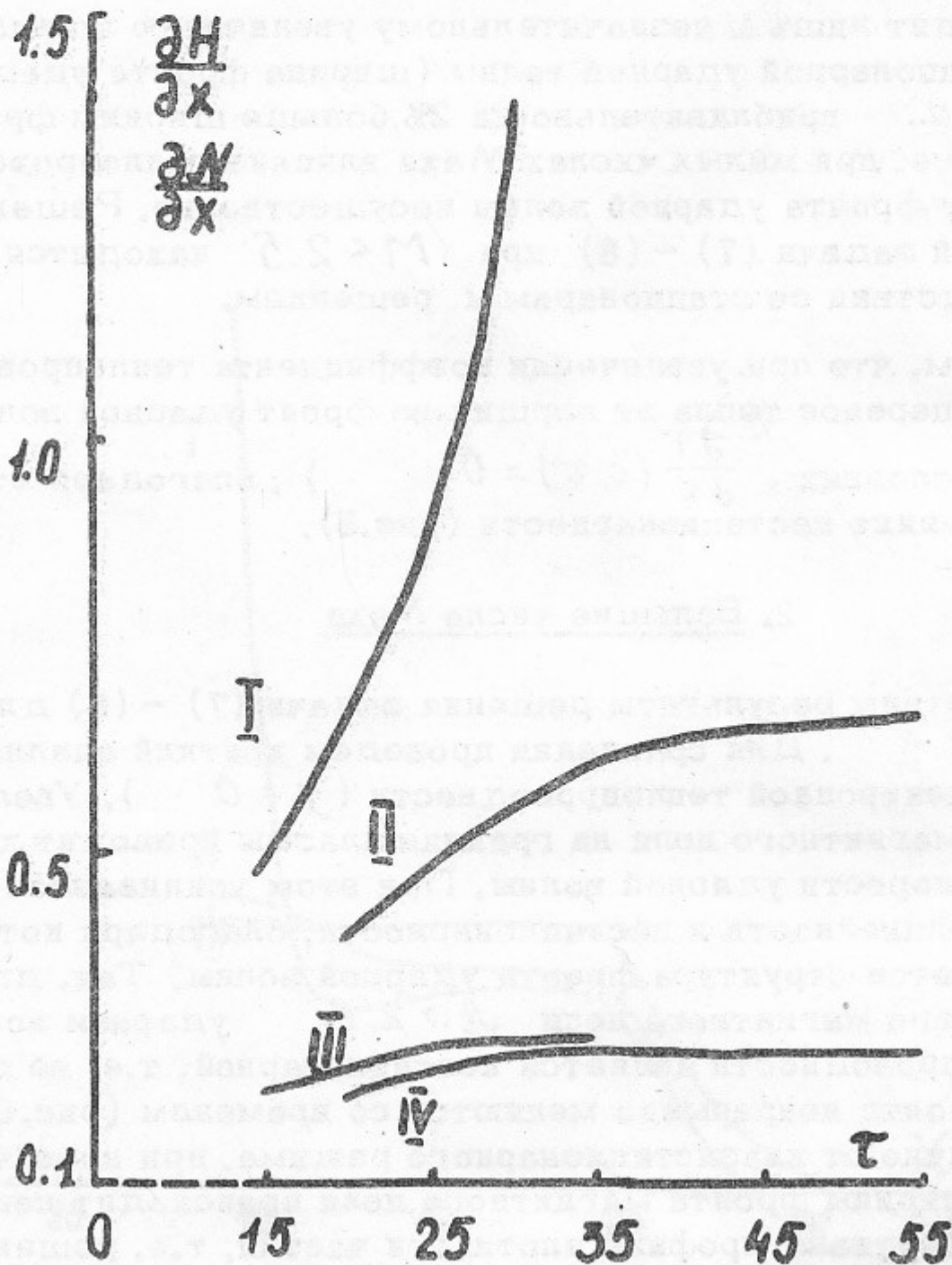


Рис.6. Зависимость максимума производных профилей плотности частиц - кривые I ($\chi = 0$), II ($\chi = 2$) и магнитного поля - кривые III ($\chi = 0$), IV ($\chi = 2$) от времени ($A = 2.7$, $\alpha = 10$, $\omega = 0.2$).

профиль плотности можно характеризовать приблизительно постоянной шириной Δ_1 ; скорость ударной волны при этом практически не меняется. Все это позволяет говорить о наличии квазистационарного режима, при котором происходит компенсация нелинейного укручения влиянием теплопроводности. Ширина фронта магнитного поля значительно больше ширины фронта плотности (рис.7), т.е. имеет место скачок плотности при практически постоянном магнитном поле — изомагнитный скачок плотности.

Для сравнения на рис.7 пунктирной линией нанесено начало изомагнитного скачка плотности, полученное из стационарного решения по значению скорости частиц в системе волны u^* перед изомагнитным скачком:

$$u^* = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\gamma H_1^2 - 3\gamma H_1 + 2(\gamma + 1)}{H_1(2 - \gamma) + \gamma}$$

(γ — показатель адиабаты, H_1 — амплитуда ударной волны).

Ширину изомагнитного скачка плотности Δ_1 можно оценить следующим образом: $\Delta_1 \sim \frac{\chi l}{c_s(M_1 - 1)}$. Здесь M_1 — скорость частиц в системе, ударной волны перед изомагнитным скачком, выраженная в единицах скорости звука $c_s =$

$$= \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

в этой точке. Так для случая $A = 2.7$, $\chi = 2$, $\chi = 20$, ширина фронта плотности $\Delta_1 \sim 3 \frac{c}{\omega_{oe}}$.

Описанный выше изомагнитный скачок плотности получен при значениях амплитуды внешнего поля $2.7 \leq A \leq 4$ и амплитуды магнитного поля в ударной волне $2.9 \leq H_1 \leq 3$.

Заметим, что т.к. поведение температуры и скорости частиц аналогично поведению плотности, то логично рассматривать аналогичные изомагнитному скачку плотности изомагнитные скачки скорости и температуры. При дальнейшем увеличении внешнего поля ($A > 4$) происходит непрерывный рост амплитуды и скорости ударной волны за счёт нестационарности, связанной с поршнем, т.е. в области перехода поршень — фронт имеет место непрерывное изменение плотности и магнитного поля; теплопроводность и сопротивление не могут компенсировать нелинейное укручение фронта плотности, приводящее к разрушению ударной волны. На рис.8 приведены типичные пространственные профили магнитного поля и плотности частиц в последовательные моменты времени для неста-

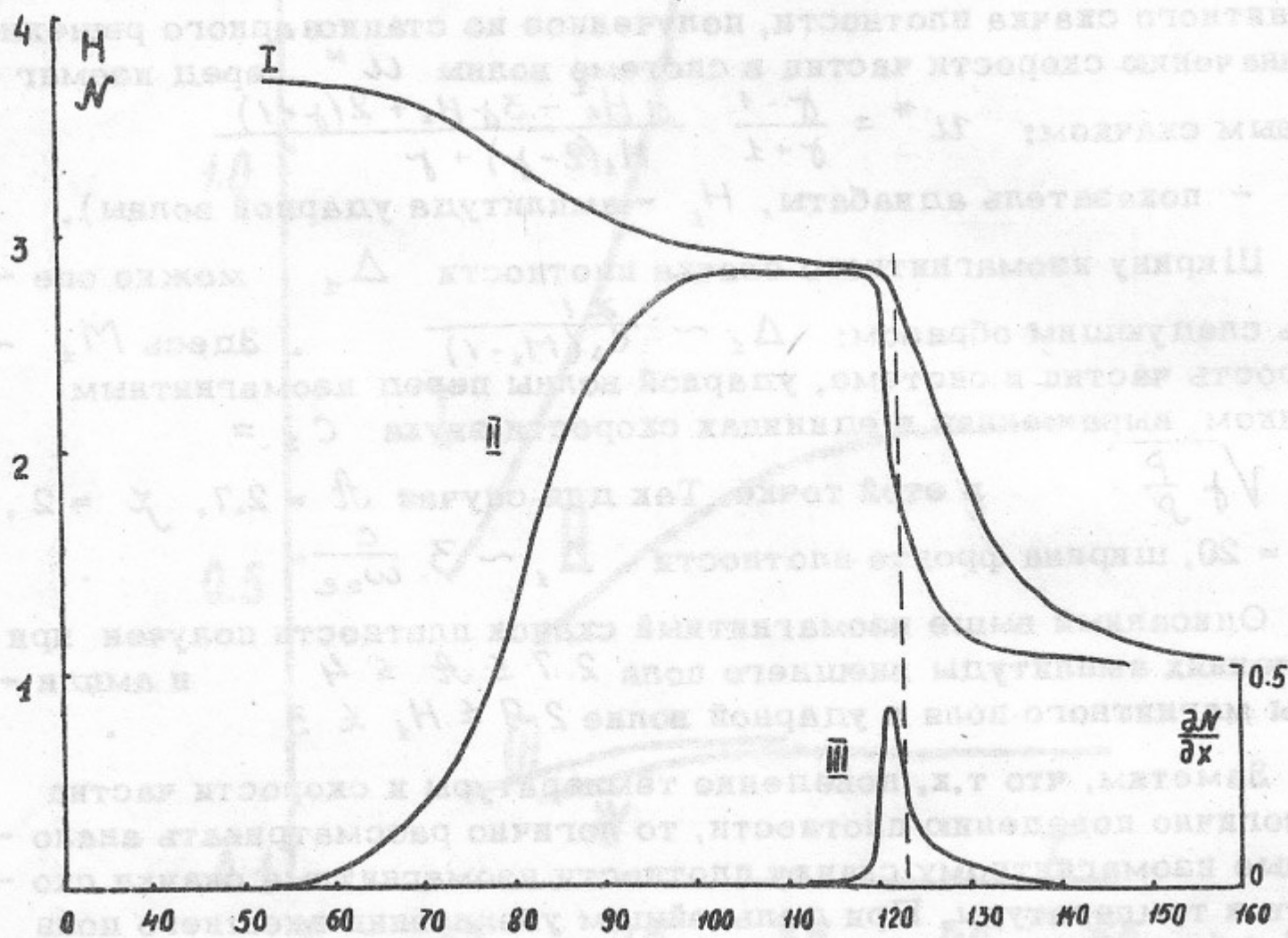


Рис.7. Типичные пространственные профили магнитного поля - кривая I, плотности частиц - кривая II и производной плотности во фронте ударной волны при изомагнитном скачке плотности ($A = 2.7$, $\alpha = 20$, $\gamma = 2$, $M \approx 3.1$).

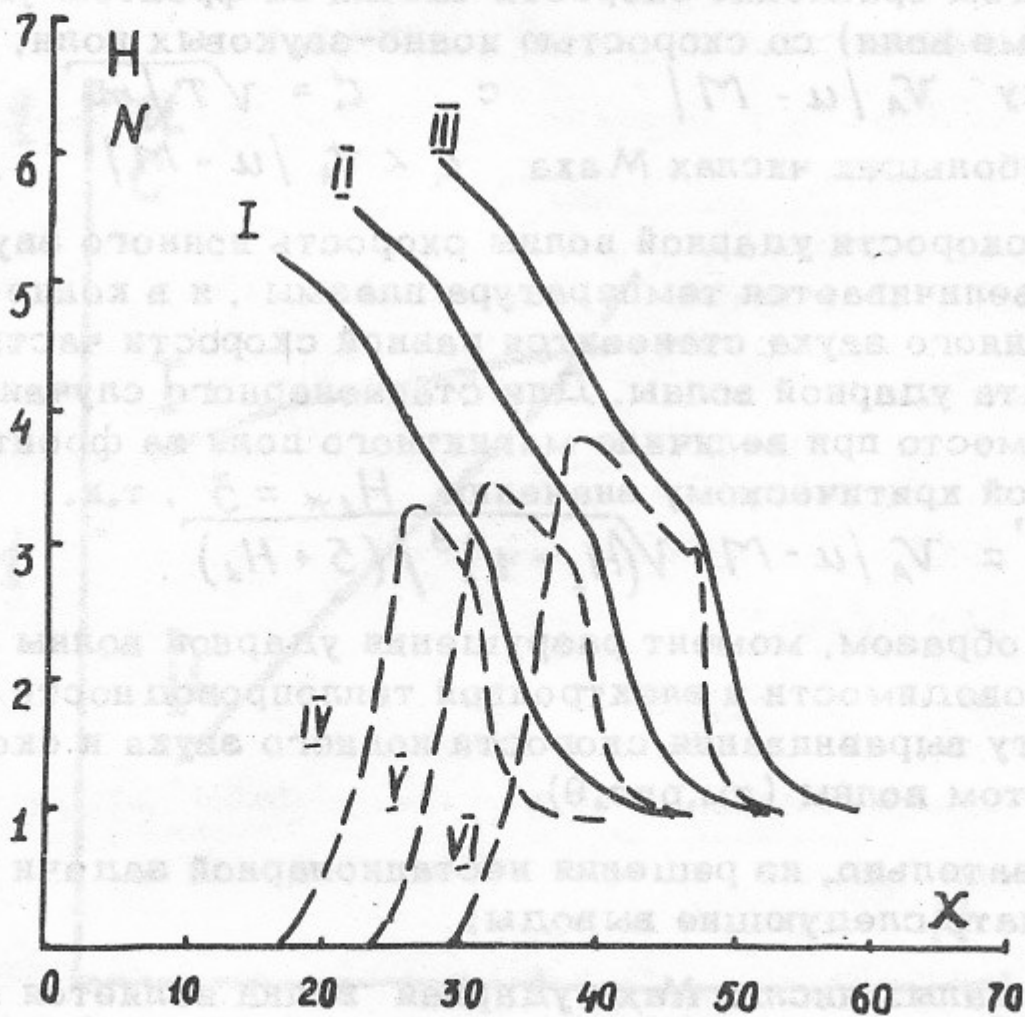


Рис.8. Профили магнитного поля - кривые I, II, III и плотности частиц - кривые IV, V, VI в моменты времени $\tau = 14, 16, 18$ соответственно ($A = 8, \alpha = 10, \chi = 2, \omega = 0.054$).

ционарного режима ($A = 8$, $\omega = 0.054$, $\alpha = 10$, $\chi = 2$).

Критические числа Маха, характеризующие ударную волну, при наличии теплопроводности и магнитной вязкости в момент разрушения $3.4 \leq M_* \leq 3.8$ получены для значений амплитуды магнитного поля на границе плазмы $5 \leq A \leq 8$; критическая амплитуда ударной волны $3 \leq H_{1*} \leq 3.2$.

Проведем сравнение скорости частиц за фронтом ударной волны (в системе волн) со скоростью ионно-звуковых волн, т.е. сравним величину $v_A / |u - M|$ с $c = \sqrt{T/m_i}$.

При небольших числах Маха $c < v_A / |u - M|$. По мере увеличения скорости ударной волны скорость ионного звука возрастает, т.к. увеличивается температура плазмы, и в конце-концов скорость ионного звука становится равной скорости частиц относительно фронта ударной волны. Для стационарного случая это равенство имеет место при величине магнитного поля за фронтом ударной волны, равной критическому значению $H_{1*} = 3$, т.к. $c = \sqrt{T/m_i} = v_A / |u - M| \sqrt{(H_1 - 1)^3 / (5 + H_1)}$.

Таким образом, момент разрушения ударной волны при наличии конечной проводимости и электронной теплопроводности соответствует моменту выравнивания скорости ионного звука и скорости частиц за фронтом волны (см. рис. 9).

Следовательно, из решения нестационарной задачи (7) - (8) можно сделать следующие выводы:

1) при малых числах Маха ударная волна является квазистационарной; теплопроводность приводит к незначительному увеличению ширины фронта;

2) для значений чисел Маха $3 \leq M \leq 3.3$ при наличии электронной теплопроводности получен квазистационарный изомагнитный скачок плотности;

3) разрушение ударных волн при наличии теплопроводности наблюдалось для чисел Маха $M_* \geq 3.4$.

В заключение авторы выражают благодарность Р.З.Сагдееву за внимание к работе.

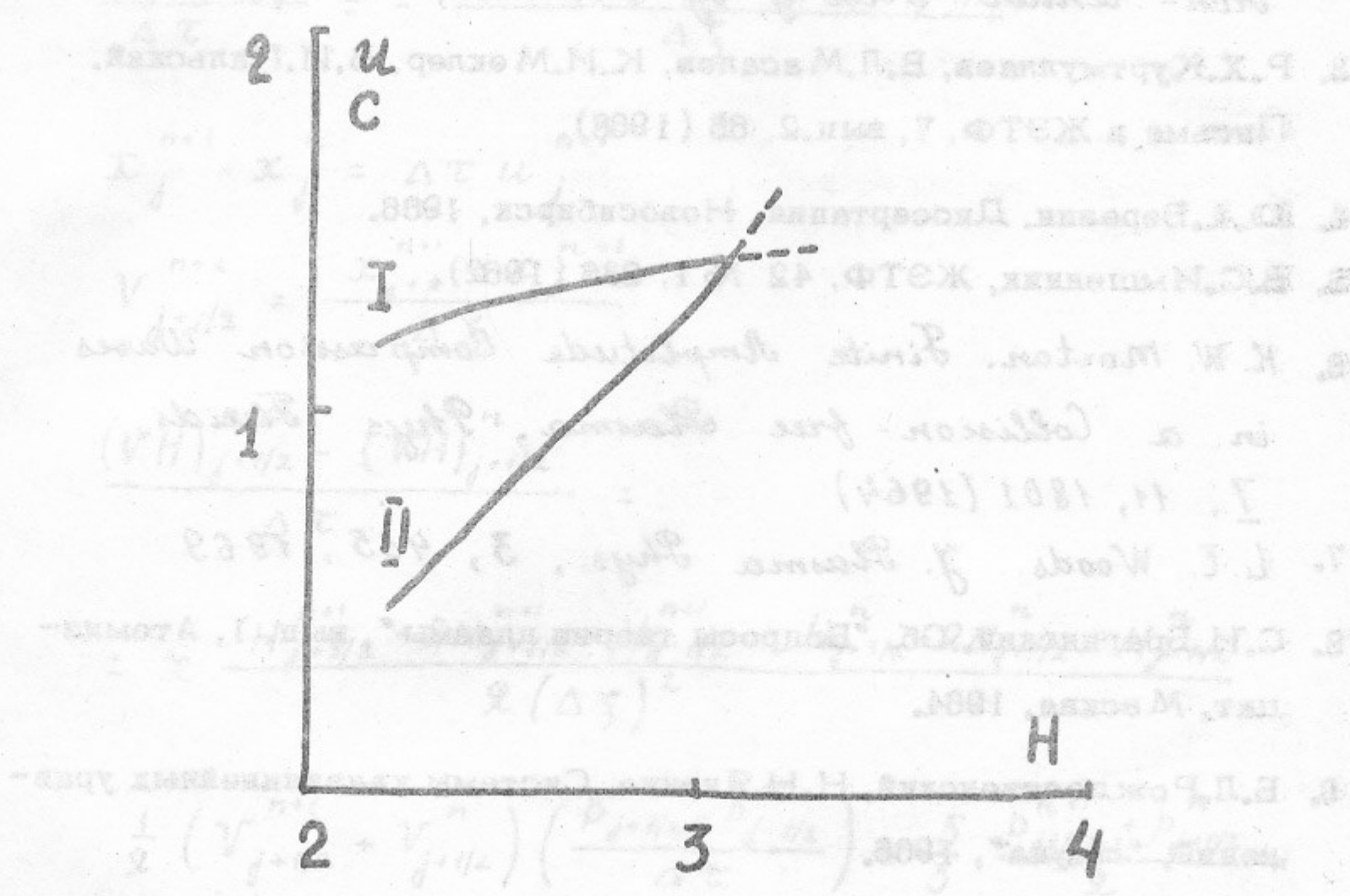


Рис. 9. Зависимость скорости частиц в системе волны - кривая I и скорости ионного звука - кривая II от амплитуды ударной волны.

Л и т е р а т у р а

1. Р.З.Сагдеев. Сб. "Вопросы теории плазмы", вып.4, Атомиздат, Москва, 1964.
2. *A. A. Galeev, R. Z. Sagdeev. Lectures on the Non-linear Theory of Plasma, Trieste, 1966*
3. Р.Х.Куртмуллаев, В.Л.Масалов, К.И.Меклер, В.И.Пильский. Письма в ЖЭТФ, 7, вып.2, 65 (1968).
4. Ю.А.Березин. Диссертация, Новосибирск, 1966.
5. В.С.Имшенник, ЖЭТФ, 42 № 1, 236 (1962).
6. *K. W. Morton. Finite Amplitude Compression Waves in a Collision-free Plasma, Phys. Fluids, 7, 11, 1801 (1964)*
7. *L. C. Woods. J. Plasma Phys., 3, 435, 1969*
8. С.И.Брагинский. Сб. "Вопросы теории плазмы", вып. 1, Атомиздат, Москва, 1964.
9. Б.Л.Рождественский, Н.Н.Яненко. Системы квазилинейных уравнений, "Наука", 1966.

Приложение

Конечно-разностная схема

Для решения системы уравнений (7) была выбрана следующая конечно-разностная схема:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta \tau} = - \frac{(p + H^2)_{j+1/2}^n - (p + H^2)_{j-1/2}^n}{\Delta \xi}$$

$$x_j^{n+1} - x_j^n = \Delta \tau u_j^{n+1}$$

$$V_{j+1/2}^{n+1} = \frac{x_{j+1}^{n+1} - x_j^{n+1}}{\Delta \xi}$$

$$\frac{(VH)_{j+1/2}^{n+1} - (VH)_{j+1/2}^n}{\Delta \tau} =$$

$$= \alpha \frac{H_{j+3/2}^{n+1} - 2H_{j+1/2}^{n+1} + H_{j-1/2}^{n+1} + H_{j+3/2}^n - 2H_{j+1/2}^n + H_{j-1/2}^n}{2(\Delta \xi)^2}$$

$$\frac{1}{2} (V_{j+1/2}^{n+1} + V_{j+1/2}^n) \left(\frac{p_{j+1/2}^{n+1} - p_{j-1/2}^n}{\Delta \tau} \right) + \frac{5}{3} \frac{p_{j+1/2}^{n+1} + p_{j+1/2}^n}{2} \times$$

$$\times \frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j-1/2}^n}{\Delta \tau} = \frac{4}{3} \alpha \frac{(H_{j+3/2}^{n+1} - H_{j-1/2}^{n+1} + H_{j+3/2}^n - H_{j-1/2}^n)^2}{(4\Delta \xi)^2} +$$

$$+ \frac{2}{3} \chi \frac{1}{(\Delta \xi)^2} \left\{ \frac{T_{j+3/2}^n - T_{j+1/2}^n}{(V_{j+1/2}^n)^2} - \frac{T_{j+1/2}^n - T_{j-1/2}^n}{(V_{j+1/2}^n)^2} \right\}$$

$$p_{j+1/2}^n = T_{j+1/2}^n V_{j+1/2}^n .$$

Здесь значения скорости и эйлеровой координаты отнесены к точкам $j \Delta \xi$, $n \Delta \tau$ значения удельного объема, магнитного поля, давления и температуры к точкам $(j+1/2) \Delta \xi$, $n \Delta \tau$. Все уравнения, за исключением четвертого, решались явным образом. Уравнение для магнитного поля решалось стандартным методом прогонки.

Ответственный за выпуск Г.И. Дудникова

Подписано к печати 2.2.71.

Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 14 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротационной машине в ИЯФ СО АН СССР, нв.