

P.25

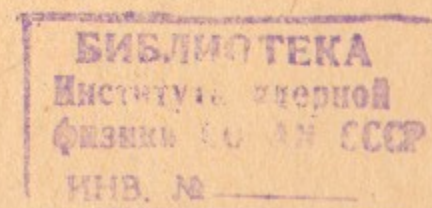
31

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

И Я Ф 103 - 70

С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин

**ДИФФУЗИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДОЛГОЖИВУЩИХ
СИСТЕМ**



Новосибирск

1970

С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин

ДИФФУЗИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДОЛГОЖИВУЩИХ СИСТЕМ

А Н Н О Т А Ц И Я

Применительно к лазерным задачам рассматривается процесс диффузии возбужденных долгоживущих частиц с учетом столкновений в объеме и тушения на стенке. В стационарных условиях прослежена зависимость характерной физической величины — времени накопления возбуждения — от давления. Показано, что в области малых давлений имеется особенность типа парадокса Кнудсена. В "квази-диффузионном" приближении выведено дифференциальное уравнение для функции распределения возбужденных частиц, обобщающее известное уравнение диффузии. Решение этого нового уравнения находится в квадратурах, а область его применимости в условиях лазерных задач шире области применимости уравнения диффузии.

1. Введение

До настоящего времени при решении лазерных задач использовалась преимущественно одномерная пространственная модель. Пространственной неоднородностью поля, возбуждения, а также наличием стенок в направлении, перпендикулярном направлению распространения излучения, пренебрегалось. Вопрос об этих неоднородностях не возникает при рассмотрении атомных систем с их большими константами релаксации Γ ($\Gamma \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$). За характерное время жизни $\sim 1/\Gamma$ атом может пройти расстояние при нормальных условиях не больше $\sim 10^{-3} \text{ см}$, что значительно меньше всех реальных поперечных неоднородностей.

Иная ситуация возникает при использовании молекулярных систем или метастабильных уравнений атомов, где константы релаксации могут быть $\sim 10^3 \text{ сек}^{-1}$ и меньше. Расстояние, пройденное за время жизни без учёта столкновений, оказывается $\sim 10^2 \text{ см}$, т.е. гораздо больше не только неоднородности поля, но и поперечного размера всей системы. Столкновения уменьшают это расстояние, но не настолько, чтобы указанные пространственные неоднородности не сказывались вовсе. Например, при давлении $p \sim 1 \text{ тор}$, находящемся еще в области рабочих давлений газового лазера, длина свободного пробега l оказывается порядка ($T = 300^\circ\text{K}$):

$$l = 1/n\sigma \sim 0,3 \text{ мм} \quad (1.1)$$

n — плотность частиц, σ — эффективное поперечное сечение столкновений ($\sigma \sim 10^{-15} \text{ см}^2$). При диаметре светового пучка $a \sim 1 \text{ мм}$ величина l одного порядка с размером неоднородности поля. Для получения узких спектральных структур при помощи нелинейной поглощающей ячейки, в последней используют еще более низкие давления. При $p \sim 0,1 \text{ тор}$ получим $l \sim 0,3 \text{ см}$, что уже сравнимо с размером z неоднородности возбуждения и с диаметром d рабочего объема.

Ранее рассматривались задачи для долгоживущих систем в двух частных случаях. В первом случае /1,2,3/ не учитывались столкновения с изменением скорости частиц (область очень малых давлений). Во втором случае /4/ рассматривалась такая область давлений, в которой справедливо диффузионное приближение

$$l \ll \min\{a, z, d\}, \quad (1.2)$$

т.е. длина свободного пробега ℓ - минимальная из всех характерных поперечных длин. Однако в /4/ принималась во внимание лишь пространственная неоднородность возбуждения, учёт которой сводился к введению диффузионного затухания - вероятности попадания на стенку.

Приведенные оценки показывают, что для молекул и метастабильных атомов в большинстве реальных случаев необходим учёт столкновений, причём условие (1.2) может или вовсе не выполняться, или выполняться в отношении размеров τ, d (в реальных системах диаметр a светового пучка зачастую значительно меньше τ, d). Кроме того, даже при выполнении условия (1.2), различие размеров a, τ, d не позволяет ограничиваться введением одного параметра (диффузионного затухания) и необходимо более детальное, чем в /4/, описание диффузионных процессов.

Таким образом, пространственно неоднородная лазерная задача должна рассматриваться с учётом столкновений, но в общем случае без ограничения условием (1.2). Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Учёт попадания частиц (атомов, молекул) на стенки означает, что лазерная задача становится граничной. В результате столкновения со стенкой частица, находящаяся до столкновения в возбужденном состоянии, может либо остаться в том же состоянии (упругое столкновение), либо перейти в основное или энергетически более низкое (неупругое столкновение). В зависимости от того, какой из этих процессов является основным, результат решения задачи может существенно меняться. Кроме того, при упругих столкновениях необходимо также знать распределение по скоростям отраженных частиц при заданной скорости налетающих, поскольку при различных законах отражения могут возникнуть качественно различные результаты. Например, в случае зеркального отражения столкновение с боковой стенкой резонатора не меняет скорости вдоль оси резонатора (вдоль волнового вектора \vec{k}), и, если частица находилась до столкновения в резонансе с полем, то после столкновения она остается резонансной. При диффузном отражении происходит перемешивание по скоростям и резонансные свойства в результате столкновения не сохраняются.

Закон отражения возбужденных частиц от стенки с этой точки зрения представляет интерес для самостоятельного исследования. В настоящее время он в достаточной мере не изучен.

Мы будем рассматривать простую модель неупругого столкновения со стенкой (полное тушение), поскольку в этом случае влияние стенки проявляется в максимальной мере. Без существенных усложнений можно ввести частичное отражение по диффузному закону. Качественные изменения при этом могут быть заметными, однако качественно новых эффектов в свойствах лазеров по сравнению с известными ранее не возникает.

Ниже рассматривается основная лазерная задача - взаимодействие двухуровневой системы с полем стоячей монохроматической волны (одномодовый режим). Зависимость поля от координат и времени выберем в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 g(x, y) \cos \omega t \cos k z \quad (1.3)$$

Волновой вектор \vec{k} поля направлен вдоль оси z (ось резонатора); $g(x, y)$ - безразмерная функция, в максимуме равная единице. Независимость g от координаты z соответствует предположению о постоянстве поперечного сечения светового пучка. Частоту поля ω считаем близкой к частоте ω_{mn} перехода между комбинирующими уровнями m, n .

Уравнения для элементов матрицы плотности имеют вид:

$$[\vec{\Gamma}_j + \partial/\partial t + (\vec{u} + \vec{v})\nabla] \rho_j = q_j + S_j \pm 2 \operatorname{Re} \{ i G g(x, y) e^{i\omega_{mn}t} \cos \omega t \cos k z \rho_{mn} \};$$

$$[\Gamma + \partial/\partial t + (\vec{u} + \vec{v})\nabla] \rho_{mn} = i G g(x, y) e^{-i\omega_{mn}t} \cos \omega t \cos k z (\rho_m - \rho_n);$$

$$\rho_j = \rho_{jj}(x, y, z, \vec{u}, \vec{v}, t); \quad j = m, n; \quad q_j = Q_j W(\vec{u}, \vec{v});$$

$$\vec{u}\vec{k} = 0; \quad \vec{v}\vec{k} = v k; \quad G = d_{mn} E_0 / 2 \hbar. \quad (1.4)$$

Полная скорость $\vec{u} + \vec{v}$ частицы разложена на компоненты \vec{v} , \vec{u} , параллельные и ортогональные \vec{k} ; d_{mn} - матричный элемент дипольного момента; $\vec{\Gamma}_j, \Gamma$ - константы релаксации; S_j - ин-

теграл столкновений, описывающий изменение скорости на уровне j ;
 $Q_j(x, y)$ - скорость возбуждения уровня j в точке (x, y) ;
 $W(\vec{u}, \vec{v})$ - функция распределения по скоростям Максвелла.
 Здесь предполагается, что частицы возбуждаются с максвелловским распределением по скоростям. При обычных способах возбуждения (оптическое, электронный удар) это эквивалентно допущению, что возбуждается лишь незначительная часть общего числа частиц. По этой же причине зависимость возбуждения от координат можно считать заданной.

Релаксационные процессы для недиагонального элемента матрицы плотности учитываем введением только одной константы релаксации Γ .

В уравнениях (1.4) следует добавить граничные условия

$$\vec{u}\vec{N} < 0: \rho_j(x_0, y_0, z, \vec{u}, \vec{v}) = \rho_{mn}(x_0, y_0, \vec{u}, \vec{v}) = 0; \quad (1.5)$$

x_0, y_0 - координаты боковой поверхности резонатора, \vec{N} - внешняя нормаль в точке (x_0, y_0) . Считается, что ось z параллельна боковой поверхности. Условия (1.5) означают отсутствие потока от стенки.

Для того, чтобы учесть объёмные столкновительные процессы, будем исходить из простой модели сильных столкновений, которая в достаточной мере отвечает реальным условиям при столкновении одинаковых частиц. В этой модели считается, что частица, независимо от начальной скорости, в результате одного столкновения приобретает скорость в соответствии с равновесным распределением Максвелла:

$$W(\vec{u}, \vec{v}) = \exp\{-(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)/\bar{v}^2\} / (\sqrt{\pi}\bar{v})^3;$$

$$S_j = -\nu_j [\rho_j - W(\vec{u}, \vec{v}) \int \rho_j(\vec{u}', \vec{v}') d\vec{u}' d\vec{v}']; \quad (1.6)$$

\bar{v} - среднетепловая скорость, ν_j - частота столкновений с изменением скорости на уровне j .

Кроме указанных выше пространственных неоднородностей, в

(1.4) содержится неоднородность вдоль оси z с характерным размером порядка длины волны излучения $\lambda = 2\pi/\kappa$. Учёт этой неоднородности приводит к существенному усложнению задачи. Однако, в обычных условиях для оптической и ближней инфракрасной областей спектра длина свободного пробега частиц значительно больше длины волны λ , так что при не слишком больших интенсивностях поля тепловое движение в достаточной мере сглаживает эту неоднородность с точки зрения заселенностей^{x)}. В уравнениях (1.4) можно, таким образом, считать заселенности уровней j не зависящими от z и искать решение в виде:

$$\rho_j = \rho_j(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}); \quad \rho_{mn} = \rho^+ e^{-i(\Omega + \kappa z)} + \rho^- e^{-i(\Omega - \kappa z)}; \quad (1.7)$$

$$\Omega = \omega - \omega_{mn}, \quad \vec{z} - \text{радиус-вектор в плоскости } (x, y).$$

В стационарном режиме в модели сильных столкновений уравнения (1.4) с учётом (1.7) преобразуются к виду:

$$(\Gamma_j + \vec{u} d/d\vec{z}) \rho_j(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = [Q_j(\vec{z}) + \nu_j \rho_j(\vec{z})] W(\vec{u}, \vec{v}) \pm \pm \text{Re}\{iGg(\vec{z})(\rho^+ + \rho^-)\};$$

$$[\Gamma - i(\Omega \pm \kappa v) + \vec{u} d/d\vec{z}] \rho^\pm(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = i \frac{G}{2} g(\vec{z}) [\rho_m(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) - \rho_n(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v})];$$

$$\rho_j(\vec{z}) = \int d\vec{u} d\vec{v} \rho_j(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}); \quad \Gamma_j = \tilde{\Gamma}_j + \nu_j; \quad j = m, n. \quad (1.8)$$

Из (1.5) получим граничные условия:

$$\rho_j(\vec{z}_0, \vec{u}, \vec{v}) = \rho^\pm(\vec{z}_0, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{при } \vec{u}\vec{N} < 0; \quad \vec{z}_0 = (x_0, y_0). \quad (1.9)$$

x) Эффекты, связанные с продольной неоднородностью, возникают при достаточно больших полях / 5 / или при больших частотах столкновений / 6 /.

Таким образом, задача на поглощение и усиление в заданном поле сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1.8) с граничными условиями (1.9). В общем случае точное решение этих уравнений получить не удастся (кроме одного случая в диффузионном приближении), поэтому будем решать последовательными приближениями по G^2 и ограничимся только первой поправкой на насыщение.

В нулевом приближении имеем следующие уравнения для ненасыщенных заселенностей:

$$(\Gamma_j + \vec{u} d/d\vec{z}) \rho_j(\vec{z}, \vec{u}) = [\mathcal{Q}_j(\vec{z}) + \nu_j \rho_j(\vec{z})] W(\vec{u});$$

$$\rho_j(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = \rho_j(\vec{z}, \vec{u}) W(\vec{v}). \quad (1.10)$$

Уравнение для первой поправки на насыщение $\rho_j^{(1)}$ имеет вид:

$$(\Gamma_j + \vec{u} d/d\vec{z}) \rho_j^{(1)}(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = \nu_j \rho_j^{(1)}(\vec{z}) W(\vec{u}, \vec{v}) + \mathcal{Q}_j'(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v});$$

$$\mathcal{Q}_j'(\vec{z}, \vec{u}, \vec{v}) = \pm \operatorname{Re} \{ i G g(\vec{z}) (\rho^+ + \rho^-) \}; \quad j = m, n. \quad (1.11)$$

причем в \mathcal{Q}_j' входит нулевое приближение для ρ^\pm . Уравнение (1.11) по форме совпадает с (1.10), однако член возбуждения \mathcal{Q}_j' (аналогичный \mathcal{Q}_j) определяется полем и, следовательно, может иметь другую зависимость от координат и скоростей. В частности, характерный пространственный масштаб \mathcal{Q}_j' совпадает с характерным размером α изменения поля ($g(\vec{z})$).

Таким образом, уравнение вида (1.10) представляет интерес

для обеих частей нашей задачи: определения значения ненасыщенных заселенностей и для анализа эффектов насыщения. По этой причине при обсуждении ниже уравнения (1.10) будет рассматриваться случай $\tau \ll d$, равно как и $\tau \sim d$.

2. Диффузия^{x)} возбуждения

В этом разделе рассматриваются возможные приближения решения уравнения (1.10) в различных интервалах давлений и при различном соотношении τ и d . Прежде всего разберем случай малых давлений, т.е.

$$\nu \bar{z} \equiv \nu d / \bar{v} \ll 1, \quad (2.1)$$

который реализуется в нелинейных поглощающих ячейках. При этом условии диффузионное приближение не применимо, и уравнение (1.10) не может быть существенно упрощено. Однако, если каким-либо образом удастся найти функцию $\rho(\vec{z})$, то нахождение $\rho(\vec{z}, \vec{u})$ сводится к квадратурам. Покажем, как получить уравнение для $\rho(\vec{z})$.

Рассмотрим одномерный случай и введем две функции

$$f^+(x, u) = \begin{cases} \rho(x, u) & \text{при } u > 0; \\ 0 & \text{при } u < 0; \end{cases} \quad f^-(x, u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u > 0; \\ \rho(x, u) & \text{при } u < 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

Очевидно, что

$$\rho(x, u) = f^+(x, u) + f^-(x, u). \quad (2.3)$$

На границе имеем:

$$f^+(-d/2, u) = 0; \quad f^-(d/2, u) = 0, \quad (2.4)$$

где $x = \pm d/2$ — координаты стенки. Подставляя поочередно

x) Обычно термин "диффузия" употребляется при выполнении условия (1.2). Будем употреблять его в более широком смысле, понимая под этим термином проникновение частицы на какое-либо характерное расстояние независимо от того, испытывала ли она при этом столкновения.

функции (2.2) в (1.10) и учитывая граничные условия (2.4), получим:

$$f^+(x, u) = \int_{-d/2}^x e^{-\Gamma(x-x')/u} W(u) [Q(x') + \nu \rho(x')] dx'; \quad (2.5)$$

$$f^-(x, u) = - \int_x^{d/2} e^{-\Gamma(x-x')/u} W(u) [Q(x') + \nu \rho(x')] dx'.$$

Эти соотношения определяют $\rho(x, u)$ при известной $\rho(x)$. Складывая их почленно и интегрируя по скоростям u , получим искомое уравнение для определения функции $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \bar{v}} \int_{-d/2}^{d/2} J_{-1}(\Gamma|x-x'|/\bar{v}) [Q(x') + \nu \rho(x')] dx'; \quad (2.6)$$

$$J_k(y) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 - y/\xi} \xi^k d\xi.$$

С точностью до замены $\Gamma = \bar{\Gamma} + \nu \rightarrow \nu$ это уравнение при не зависящем от x возбуждении совпадает с уравнением, описывающим известный в газовой динамике парадокс Кнудсена / 7 /. Точного решения для (2.6) не существует, и мы, следуя / 7 /, будем решать его приближенно. При малых значениях аргумента функция $J_{-1}(y)$ имеет вид:

$$J_{-1}(y) \Big|_{y \rightarrow 0} = \ln(1/y), \quad (2.7)$$

т.е. ядро интегрального уравнения (2.6) имеет слабую логарифмическую расходимость. С другой стороны, при $\Gamma d/\bar{v} \ll 1$ метод итераций показывает, что $\rho(x)$ мало меняется в пределах $(-d/2, d/2)$. Учитывая эти два факта, можно в грубом приближении вынести из-под интеграла функцию $\rho(x')$ со значением в точке x . В результате получим:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \bar{v}} \frac{\int_{-d/2}^{d/2} Q(x') J_{-1}(\Gamma|x-x'|/\bar{v}) dx'}{1 - \frac{\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma} \left\{ \sqrt{\pi} - J_0[\Gamma(d/2-x)/\bar{v}] - J_0[\Gamma(d/2+x)/\bar{v}] \right\}} \quad (2.8)$$

Функция $J_0(y)$ обладает следующими асимптотическими свойствами / 8 /:

$$J_0(y) \Big|_{y \rightarrow 0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + y \ln y; \quad J_0(y) \Big|_{y \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \exp\{-3(y/2)^{2/3}\}. \quad (2.9)$$

Разберем подробнее случай $Q(x) = Q = \text{const}$. Из общих соображений ясно, что другой вид зависимости возбуждения от координаты (но при условии $\tau \sim d$) качественной картины изменить не может. Из (2.8) имеем:

$$\rho(x) = Q \tau(x);$$

$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma} \frac{\sqrt{\pi} - J_0[\Gamma(d/2-x)/\bar{v}] - J_0[\Gamma(d/2+x)/\bar{v}]}{1 - \frac{\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma} \left\{ \sqrt{\pi} - J_0[\Gamma(d/2-x)/\bar{v}] - J_0[\Gamma(d/2+x)/\bar{v}] \right\}}. \quad (2.10)$$

Здесь $\tau(x)$ имеет смысл "времени накопления" возбуждения в точке x .

Если размер a светового пучка много меньше d , то практический интерес представляет значение заселенностей не на всем промежутке, а в точке (например, $x = 0$). Определим характер зависимости величины $\tau(0) = \tau(x) \Big|_{x=0}$ от давления, принимая во внимание тот факт, что при не слишком больших давлениях выполняется условие:

$$\bar{\Gamma} \bar{v} \equiv (\Gamma - \nu) \bar{v} \ll 1. \quad (2.11)$$

Для малых значений параметра $\bar{\Gamma} \bar{v}$ из (2.10) получим:

$$\tau(0) = \frac{\bar{v}}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{\nu \bar{v}}{\sqrt{\pi}} \ln(2/\bar{\Gamma} \bar{v}) \right] \ln(2/\bar{\Gamma} \bar{v}). \quad (2.12)$$

Поскольку частота столкновений ν пропорциональна давлению p , а величина $\Gamma = \bar{\Gamma} + \nu$ тоже есть линейная функция давления, то с увеличением давления, как нетрудно усмотреть из (2.12), время накопления возбуждения падает. При больших давлениях

($\Gamma \bar{v} \rightarrow \infty$) из (2.10) следует, что

$$\tau(x) = \tau(0) = 1/(\Gamma - \nu) \quad (2.13)$$

Вообще говоря, при больших значениях $\Gamma \bar{v}$ приближения (2.8) и (2.10) не верны, однако исходное уравнение (2.6) также даёт асимптотику (2.13). Сравнение формул (2.13) и (2.12) с учётом (2.11) показывает, что в графике зависимости $\tau(0)$ от давления существует минимум.

Качественное представление о зависимости $\tau(0)$ от давления можно получить на основании результатов расчёта, приведенных в / 7 /. В этой работе дан график зависимости от давления величины τ , усредненной по всему промежутку. Как говорилось выше, $\rho(x)$ и $\tau(x)$ — плавные функции x в рассматриваемом интервале давлений (условие (2.1)) и, следовательно, $\tau(0)$ мало отличается от $\langle \tau \rangle$ — среднего значения величины τ . Кривая 1 рис.1 воспроизводит зависимость $\langle \tau \rangle / \bar{v}$ от величины $\nu \bar{v}$, пропорциональной давлению p . График построен с использованием формулы (2.10). В работе / 7 / проводилось сравнение результатов применения формулы (2.10) и численного решения интегрального уравнения (2.6). Показано, что вплоть до $\nu \bar{v} = 2$ совпадение достаточно хорошее. Следовательно, применение грубого приближения (2.8) в какой-то мере оправдано до этих значений $\nu \bar{v}$.

На графике 1 рис.1 требуют объяснения наличие минимума и значение величины $\langle \tau \rangle$ при $\nu \bar{v} \rightarrow 0$. Ход кривой при $\nu \bar{v} \ll 1$ иллюстрируется формулой (2.12). Множитель $\ln(2/\Gamma \bar{v})$ определяет как значение $\langle \tau \rangle$ при $\nu \bar{v} = 0$ ($\bar{v} \ln(2/\Gamma \bar{v})/\sqrt{\pi}$ вместо ожидаемой \bar{v}), так и первоначальное уменьшение $\langle \tau \rangle$ при увеличении давления. Чтобы понять причину появления этого множителя, обратимся к формулам (2.5). При условии $\Gamma \bar{v} \ll 1$ распределение заселенностей по скоростям u существенно не максвелловское. Для $u > \Gamma d$ имеем:

$$\rho(x, u) \approx W(u)/u. \quad (2.14)$$

Множитель $1/u$ уменьшает представительство быстрых атомов в величине $\rho(x)$. Эффективная скорость диффузии на стенку меньше, чем \bar{v} , что приводит к увеличению $\langle \tau \rangle$ по сравнению с \bar{v} (логарифмический множитель).

В результате сильных столкновений частица приобретает ско-

рость в соответствии с распределением Максвелла, характерная ширина которого $\sim \bar{v}$. Поскольку характерная ширина распределения заселенностей по скоростям значительно меньше \bar{v} (как следует из (2.14)), то вероятность частице изменить скорость в пределах этой ширины мала. Это значит, что в результате столкновения в большинстве случаев частица сильно увеличивает скорость, быстро долетает до стенки и "гибнет" на ней.

Таким образом, при низких давлениях столкновения практически приводят к тушению. То же самое можно получить формальным переходом $\nu \rightarrow 0$ в уравнении (2.6). Член прихода в интеграл столкновений ($\nu \rho$) становится малым по сравнению с возбуждением. При отбрасывании его получается уравнение для случая полного тушения при столкновениях. При этом частота ν упругих столкновений в левой части уравнения играет роль частоты тушащих столкновений и входит в (2.13) аддитивно с частотой объёмных тушащих столкновений $\bar{\Gamma}$. Тушение, в свою очередь, объясняет уменьшение $\langle \tau \rangle$ при увеличении давления.

Конкурирующим процессом является процесс возвращения частиц в объём при столкновениях. Он уменьшает диффузию на стенку, увеличивая тем самым $\langle \tau \rangle$. Влияние этого процесса при $\nu \bar{v} \ll 1$ незначительно (второй член в скобках формулы (2.12)), но оно возрастает с увеличением давления. Когда ширина распределения по скоростям становится сравнимой с \bar{v} (что происходит при $\nu \bar{v} \sim 1$), эффект возвращения в объём становится преобладающим над эффектом "тушения". Этим и объясняется минимум в графике рис.1, а также его дальнейшее возрастание.

Кривая 2 приведена для случая полного тушения при столкновениях. Этот случай соответствует отсутствию члена прихода в интеграле столкновений или, что то же самое, замене в (2.10) знаменателя тождественно на единицу. При $\nu \bar{v} \ll 1$ кривые 2 и 1, очевидно, совпадают, при $\nu \bar{v} \gg 1$ кривая 2 выходит на гиперболу

$$\langle \tau \rangle = 1/\Gamma = 1/(\bar{\Gamma} + \nu)$$

Кривой 3 показано экстраполированное в область малых давлений решение уравнения диффузии с соответствующей поправкой (см. ниже). Несовпадение с более точным решением (кривая 1) в точке "сшивания" ($\nu \bar{v} = 2$) составляет $\sim 40\%$.

Таким образом, используя результаты приближения (2.8) и диффузионное приближение, можно получить решение кинетического уравнения (1.10) для любых давлений.

В практически важном двумерном случае картина качественно такая же. При выводе уравнения для $\rho(\vec{z})$ используем одно из соотношений (2.5). После некоторых выкладок будем иметь:

$$\rho(\vec{z}) = \frac{1}{\pi \bar{v}} \int_S \frac{J_0(\Gamma|\vec{z}-\vec{z}'|/\bar{v})}{|\vec{z}-\vec{z}'|} [Q(\vec{z}') + \nu \rho(\vec{z}')] d\vec{z}' \quad (2.15)$$

Интегрирование проводится по сечению S , ограниченному стенками. В аксиально-симметричном случае при $\Gamma \bar{z} \ll 1$ на оси ($\vec{z} = 0$) имеем:

$$\rho(\vec{z}, u)|_{\vec{z}=0} \sim u (1 - e^{-\Gamma d/2u}) e^{-u^2/\bar{v}^2}; \quad \rho(\vec{z}) = \int_0^\infty \rho(\vec{z}, u) du; \quad (2.16)$$

u - абсолютное значение скорости. По сравнению с двумерным распределением Максвелла

$$W(u) = \frac{2u}{\bar{v}^2} e^{-u^2/\bar{v}^2}, \quad (2.17)$$

распределение по скоростям функции ρ и в двумерном случае более подчеркивает медленные частицы. Максвеллизующие столкновения также приводят к увеличению скорости частицы и последующему тушению её на стенке, уменьшая тем самым время накопления возбуждения. Из качественных соображений также ясно, что в графике $\langle \tau \rangle$ как функции давления минимум находится при значении $\nu \bar{z} \sim 1$.

3. Диффузионное и квазидиффузионное приближения

Мы рассмотрели такую область давлений, в которой выполняется условие $\nu d/\bar{v} \leq 2$. При дальнейшем повышении давления указанный приближенный метод решения интегрального уравнения становится неприменимым и необходимо искать другие приближенные методы.

При больших значениях параметра $\nu \bar{z}$ предпочтительней исходить не из точного уравнения (2.6), а из приближенного дифференциального уравнения. Если выполняется условие (1.2), то этим

уравнением является известное уравнение диффузии при наличии объёмного тушения и возбуждения:

$$(\tilde{\Gamma} - \mathcal{D} \Delta) \rho(\vec{z}) = Q(\vec{z}) \quad (3.1)$$

где \mathcal{D} - коэффициент диффузии.

Имеется, однако, возможность, используя простоту модели сильных столкновений, существенно расширить область, в которой без особого труда можно получить решение уравнения (1.10), преобразовав его к виду, аналогичному уравнению диффузии (3.1). Покажем, как это сделать. Для уравнения (1.10) в одномерном случае введем симметричную и антисимметричную по скоростям функции:

$$f(x, u) = [\rho(x, u) + \rho(x, -u)]/2; \quad F(x, u) = [\rho(x, u) - \rho(x, -u)]/2. \quad (3.2)$$

Для этих функций нетрудно получить уравнения:

$$\left(\Gamma - \frac{u^2}{\Gamma} \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x, u) = [Q(x) + \nu \rho(x)] W(u); \quad \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u) du; \quad (3.3)$$

$$\left(\Gamma - \frac{u^2}{\Gamma} \frac{d^2}{dx^2}\right) F(x, u) = -\frac{u}{\Gamma} \frac{d}{dx} [Q(x) + \nu \rho(x)] W(u).$$

с граничными условиями

$$f(d/2, u) = F(d/2, u) \quad \text{при } u > 0;$$

$$f(-d/2, u) = F(-d/2, u) \quad \text{при } u < 0. \quad (3.4)$$

Функция $F(x, u)$ как несимметричная по скоростям часть функции распределения задаёт макроскопические потоки, которые будут существовать при наличии пространственной неоднородности как самой функции распределения (член $d\rho/dx$ в уравнении (3.3) для $F(x, u)$), так и возбуждения (dQ/dx).

Первое уравнение (3.3) содержит только одну неизвестную функцию $f(x, u)$, но решать его в отрыве от второго уравнения, вообще говоря, нельзя, поскольку на границе значения f и F связаны между собой. Однако, при некоторых условиях гранич-

ные значения функции $f(x, u)$ можно определить независимо. Рассмотрим область давлений, в которой выполняется условие

$$\Gamma \gg \bar{v}/d, \text{ или } l \ll d. \quad (3.5)$$

Это условие означает, что на размере $\sim d$ частица успевает максвеллизироваться, и в случае полного тушения на стенке граничные значения для функции $f(x, u)$ близки к нулю. Уравнения системы (3.3), таким образом, расцепляются полностью, и решение первого из них не представляет труда. Отметим, что мы не делали никаких предположений о размере τ области возбуждения, которая может быть, в частности, настолько малой, что распределение по скоростям внутри нее будет существенно не максвелловским^х). Вывод же уравнения диффузии типа (2.18) основан, как известно, на предположении близости распределения по скоростям к максвелловскому в каждой точке рассматриваемого промежутка. Иными словами, для справедливости (3.1) необходимо условие (1.2), тогда как более слабое условие (3.5) также приводит к уравнению, решение которого по простоте не уступает решению уравнения диффузии. Этот вывод особенно полезен с точки зрения лазерных задач. Он позволяет получить решение (по крайней мере в квадратурах) в той области давлений, когда условие (1.2) выполняется по отношению к размерам τ, d и не выполняется по отношению к диаметру светового пучка a .

Уравнения (3.3) легко обобщить на двумерный случай:

$$\begin{aligned} \left[\Gamma - \frac{(\vec{u}\nabla)(\vec{u}\nabla)}{\Gamma} \right] f(\vec{r}, \vec{u}) &= [\varrho(\vec{r}) + \nu \rho(\vec{r})] W(\vec{u}); \\ \left[\Gamma - \frac{(\vec{u}\nabla)(\vec{u}\nabla)}{\Gamma} \right] F(\vec{r}, \vec{u}) &= -\frac{1}{\Gamma} \vec{u}\nabla [\varrho(\vec{r}) + \nu \rho(\vec{r})] W(\vec{u}); \\ f(\vec{r}, \vec{u}) &= \frac{1}{2} [\rho(\vec{r}, \vec{u}) + \rho(\vec{r}, -\vec{u})]; \\ F(\vec{r}, \vec{u}) &= \frac{1}{2} [\rho(\vec{r}, \vec{u}) - \rho(\vec{r}, -\vec{u})]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $f(\vec{r}, \vec{u}), F(\vec{r}, \vec{u})$ суть симметричная и антисимметричная по \vec{u} части функции $\rho(\vec{r}, \vec{u})$.

Уравнения (3.3) удобны также при вычислении поправки к диффузионному приближению при наличии объемного тушения и возбуж-

х) В этом случае ($\tau \ll d$) возбуждение должно быть локализовано не слишком близко к одной из стенок.

дения. Во втором уравнении (3.3) при условии (1.2) член с пространственной производной функции F имеет порядок величины $\sim \bar{v}^2 F / \Gamma d^2$, т.е. значительно меньше всех остальных. Отбрасывая его, получим

$$F(x, u) = -\frac{u}{\Gamma} \frac{d}{dx} [\varrho(x) + \nu \rho(x)] W(u), \quad (3.7)$$

где $\rho(x)$ - взята из решения (3.1) с коэффициентом диффузии $D = \bar{v}^2 / 2\Gamma$. Это соотношение и определяет поправку к функции $\rho(x, u) = \rho(x) W(u)$. Из условия симметричности $f(x, u)$ и из (3.4) следует:

$$\int_0^{\infty} du f(d/2, u) = \frac{1}{2} \rho(d/2) = \int_0^{\infty} F(d/2, u) du. \quad (3.8)$$

Интегрирование по u от 0 до ∞ в (3.7) даёт поправку для значения $\rho(x)$ на границе:

$$\rho(d/2) = -\frac{\bar{v}}{\sqrt{\pi} \Gamma^2} \frac{d}{dx} [\varrho(x) + \nu \rho(x)] \Big|_{x=d/2}. \quad (3.9)$$

Приведенная оценка граничного условия отличается от аналогичной оценки, полученной другими способами в классических работах по кинетической теории, в двух пунктах, - в (3.9) входит пространственная производная возбуждения, а также учтено объемное затухание.

Поправка (3.9) к граничному значению использована при построении кривой 3 рис.1.

В применении к лазерным задачам общее решение уравнения диффузии (3.1) ранее не рассматривалось. В работе /4/, например, учитывалась лишь первая Фурье-гармоника в решении (3.1), которое в данном случае выглядит следующим образом (для простоты считаем $\varrho(x) = \varrho(1 \times 1)$):

$$\rho(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varrho_l \text{Cos}[\pi x (2l-1)/d]}{\Gamma - \nu + \pi^2 \bar{v}^2 (2l-1)^2 / 2\Gamma d^2}. \quad (3.10)$$

ϱ_l - амплитуда Фурье-гармоники возбуждения при разложении на промежутке d . В знаменателе стоит сумма объемного ($\Gamma - \nu$) и диффузионного ($\pi^2 \bar{v}^2 (2l-1)^2 / 2\Gamma d^2$) затуханий каждой гармоники. Учёт только первой гармоники приводит к незначительной

ошибке лишь для $z \sim d$. При уменьшении z ошибка увеличивается. Сравним для примера результаты при $d = z$ и $d \gg z$. В первом случае выберем возбуждение в виде $Q(x) = Q \cos \pi x/d$, при котором в (3.10) выделяется только первая гармоника:

$$\rho(x) = \frac{Q}{\tilde{\Gamma} + \pi^2 \bar{v}^2 / 2\Gamma d^2} \cos \frac{\pi x}{d}. \quad (3.11)$$

Во втором случае рассмотрим такую область давлений, в которой длина диффузии^{х)} $\sqrt{\bar{v}^2 / 2\tilde{\Gamma}\Gamma}$ меньше d . Следовательно, влиянием стенок можно пренебречь и перейти от ряда (3.10) к интегралу. Зависимость $Q(x)$ удобно выбрать в виде

$Q(x) = Q \exp\{-|x|/z\}$. В результате интегрирования получим:

$$\rho(x) = \frac{Q}{\tilde{\Gamma} + \sqrt{\tilde{\Gamma}\bar{v}^2/2\Gamma z^2}} \left(e^{-\frac{|x|}{z}} - \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{2\tilde{\Gamma}\Gamma z^2}} e^{-\sqrt{\frac{2\tilde{\Gamma}\Gamma}{\bar{v}^2}}|x|} \right) / \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{2\tilde{\Gamma}\Gamma z^2}} \right). \quad (3.12)$$

В точке $x = 0$

$$\rho(0) = \frac{Q}{\tilde{\Gamma} + \sqrt{\tilde{\Gamma}\bar{v}^2/2\Gamma z^2}}. \quad (3.13)$$

Сравнивая эту формулу с (3.11), видим, что структура диффузионного затухания здесь совсем другая. В качестве его выступает среднее геометрическое объемного затухания $\tilde{\Gamma}$ и величины $\bar{v}^2/2\Gamma z^2$. Если основным процессом, ведущим к объемному затуханию, является тушение при столкновениях, то диффузионное затухание в (3.13) не зависит от давления P , в то время как в (3.11) оно пропорционально P^{-1} .

Выясним, в каких конкретных условиях можно пренебречь влиянием стенок. Уравнение диффузии применимо при условии

$\Gamma z / \bar{v} \geq 10$, так что максимальное отношение η длины диффузии к размеру z есть:

х) Длиной диффузии называем характерное расстояние, на которое частица проникает за время жизни, не встречаясь со стенкой.

$$\eta = \sqrt{\frac{\bar{v}^2}{2\tilde{\Gamma}\Gamma z^2}} = \frac{\bar{v}}{\Gamma z} \sqrt{\frac{\Gamma}{2\tilde{\Gamma}}} \leq 0,1 \sqrt{\frac{\Gamma}{2\tilde{\Gamma}}}. \quad (3.14)$$

Если взять характерное соотношение $\Gamma/\tilde{\Gamma} \sim 10^4$, то получим $\eta \leq 10$. Если $d > 10z$, то наличие стенок не влияет на процесс и можно положить $d = \infty$. В лазере эти условия вполне могут реализоваться в отношении полевого возбуждения.

Разобранный пример указывает на необходимость суммировать весь ряд (3.10), а не ограничиваться первыми гармониками.

Для простейших зависимостей $Q(x)$ от координаты суммирование ряда (3.10) не представляет труда. Например, для

$$Q(x) = \begin{cases} Q \cos^2 \frac{\pi x}{z} & \text{при } 0 < |x| < z/2; \\ 0 & \text{при } z/2 < |x| < d/2 \end{cases} \quad (3.15)$$

получим:

$|x| \leq z/2$:

$$\rho(x) = \frac{Q/\tilde{\Gamma}}{1 + \left(\frac{2\pi}{\alpha z}\right)^2} \left\{ \cos^2 \frac{\pi x}{z} + \frac{8\pi^2}{(\alpha z)^2} \left[1 - \operatorname{ch} \alpha x \left(\operatorname{ch} \frac{\alpha z}{2} - \operatorname{sh} \frac{\alpha z}{2} \operatorname{th} \frac{\alpha d}{2} \right) \right] \right\}; \quad (3.16)$$

$|x| > z/2$:

$$\rho(x) = \frac{Q}{\tilde{\Gamma} \left[1 + \left(\frac{2\pi}{\alpha z}\right)^2 \right]} \frac{8\pi^2 / (\alpha z)^2}{\operatorname{sh} \frac{\alpha z}{2}} \left(\operatorname{ch} \alpha x \operatorname{th} \frac{\alpha d}{2} - \operatorname{sh} |\alpha x| \right),$$

где $\alpha = \sqrt{2\tilde{\Gamma}\Gamma/\bar{v}^2}$ - величина, обратная длине диффузии.

На рис.2 показаны графики зависимости времени τ накопления возбуждения от величины y , пропорциональной давлению P . Начиная с $y \sim 1$ величина y есть отношение размера z к длине диффузии ($y = \alpha z$ при $y \geq 1$). Кривая 1 приведена для $z = d$ в приближении первой гармоники. Наличие максимума объясняется конкуренцией двух процессов: уменьшения диффузии на стенки и увеличения объемного затухания с увеличением давления.

Причина возникновения максимума на кривой 2, где $d \gg 1/d$, оказывается совсем иной. Если считать, что $\tilde{F} \propto \rho$, т.е. пренебречь спонтанной релаксацией, то при малых y график $\varepsilon(y)$ пойдет по пунктирной кривой, выйдя при $y=0$ на константу. Конечно, при этом рано или поздно нарушится соотношение $d \gg 1/d$, кривая изогнется и пойдет в нуль по линейному закону. Оказывается, что учёт спонтанного затухания γ может еще раньше изменить ход кривой. Возьмем $\gamma \sim 10^3 \text{ сек}^{-1}$, $\tau \sim 0,1 \text{ см}$, $(d\tilde{F}/dp)/(d\tilde{F}/dp) \sim 10^4$. В обычных условиях $\bar{v} \sim 10^5 \text{ см.сек}^{-1}$. На границе применимости диффузионного приближения имеем:

$$y \sim 0,1; \quad \Gamma \sim 10^7 \text{ сек}^{-1}; \quad \Gamma - \nu \sim 10^3 \text{ сек}^{-1}, \quad (3.17)$$

т.е. $\gamma \sim \tilde{F} - \gamma$ и пренебрегать величиной γ нельзя. Максимальная длина диффузии оказывается $\sim 10 \tau$, так что при $d > 10 \tau$ можно пренебречь влиянием стенок. Кривая 2 отвечает как раз разобранным случаю и $d = 10 \tau$. При $d = \infty$ отличия от приведенной кривой вплоть до $y = 0,1$ практически нет. Отсюда следует, что положение максимума определяется исключительно величиной γ .

Кривая 2 иллюстрирует специальный случай. В конкретных условиях нужно учитывать конкретные соотношения констант.

Причина общего поднятия графика при увеличении отношения d/τ очевидна, поскольку все меньше число частиц гибнет на стенке и больше сказывается обратная диффузия в область возбуждения.

Если $\tau \ll d$ (как в случае полевого возбуждения), то существует область давлений, в которой диффузионное приближение не справедливо, однако справедливо квазидиффузионное приближение, даваемое уравнениями (3.3) с нулевыми граничными условиями для $f(x, u)$ и $\rho(x)$. Решение для $\rho(x)$ в этом случае можно получить из формулы (3.10) заменой знаменателей:

$$\Gamma + \frac{\pi^2 \bar{v}^2}{2\Gamma d^2} (2l-1)^2 - \nu \rightarrow \left\langle \left[\Gamma + \frac{\pi^2 u^2}{\Gamma d^2} (2l-1)^2 \right]^{-1} \right\rangle - \nu. \quad (3.18)$$

Знак $\langle \rangle$ означает усреднение по скоростям u с максвелловским распределением:

$$\left\langle \left[\Gamma + \frac{\pi^2 u^2}{\Gamma d^2} (2l-1)^2 \right]^{-1} \right\rangle = \frac{d/\bar{v}}{\sqrt{\pi} (2l-1)} e^{-\left(\frac{\Gamma d/\bar{v}}{\pi(2l-1)}\right)^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\Gamma d/\bar{v}}{\pi(2l-1)}\right) \right]. \quad (3.19)$$

$\Phi(z)$ - интеграл вероятности.

Используя асимптотические свойства интеграла вероятности, нетрудно показать, что при условии (3.5) (условие применимости квазидиффузионного приближения) первые члены ряда (3.10) в результате указанной замены не меняются. Характерное число членов ряда (3.10), которые необходимо удерживать, определяется из соотношения

$$l \sim d/\tau. \quad (3.20)$$

Для последних из них аргумент интеграла вероятности есть

$\sim \Gamma \tau / 2\pi \bar{v}$. В квазидиффузионном приближении пользоваться асимптотическим разложением $\Phi(z)$ в этом случае нельзя. Для этих номеров гармоник знаменатели в результате замены уменьшаются, что приводит к увеличению амплитуды гармоники (а при $X \rightarrow 0$ - к увеличению значения всего ряда). Для $|X| \gg \tau$ замена (3.18) практически не меняет значения суммы ряда (3.10).

Таким образом, при переходе от диффузионного приближения к квазидиффузионному значению $\rho(\bar{z})$ изменяется в большую сторону в области действия возбуждения. Это легко понять, поскольку при $\Gamma \tau / \bar{v} \leq 1$ распределение возбужденных частиц по скоростям в пределах области возбуждения становится не максвелловским, с характерной шириной распределения меньшей \bar{v} . Это ведет к уменьшению коэффициента диффузии, что в свою очередь увеличивает время накопления возбуждения.

Л и т е р а т у р а

- / 1 / Н.Г.Басов, В.С.Летохов. УФН, 4, 96, 1968.
- / 2 / С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин. Письма ЖЭТФ, 9, 686, 1969.
- / 3 / С.Г.Раутиан, А.М.Шалагин. ЖЭТФ, 58, 962, 1970.
- / 4 / W.R. Bennet, Jr., *Gaseous Optical Masers, Appl. Optics, Suppl. No. 1 on Optical Masers*, 24, 1962, (УФН, 81, 119, 1963).
- / 5 / S. Stenholm, W. E. Lamb, *Phys. Rev.*, 181, 618, 1969.
- / 6 / Т.Л.Андреева, Г.И.Кузнецова, препринт ФИАН, № 17, 1967.
- / 7 / М.Н.Коган, *Динамика разреженного газа*, Изд.Наука, 1967.
- / 8 / М.Т.Абрамовитц, *Math. and Phys.*, 32, 188, 1953.

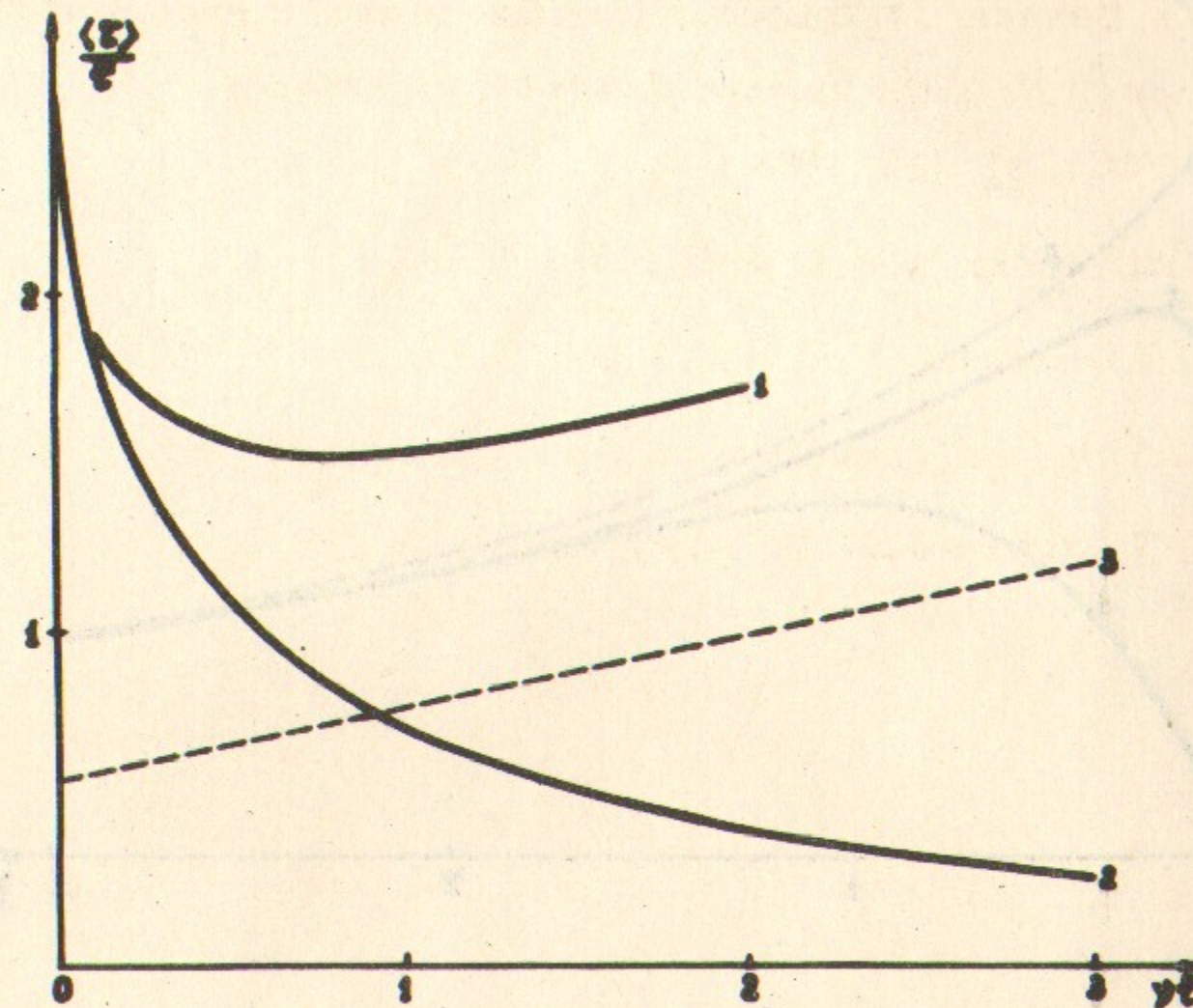


Рис.1. Зависимость времени накопления возбуждения от давления (область малых давлений) $\bar{I} = 2 \cdot 10^{-3}$.

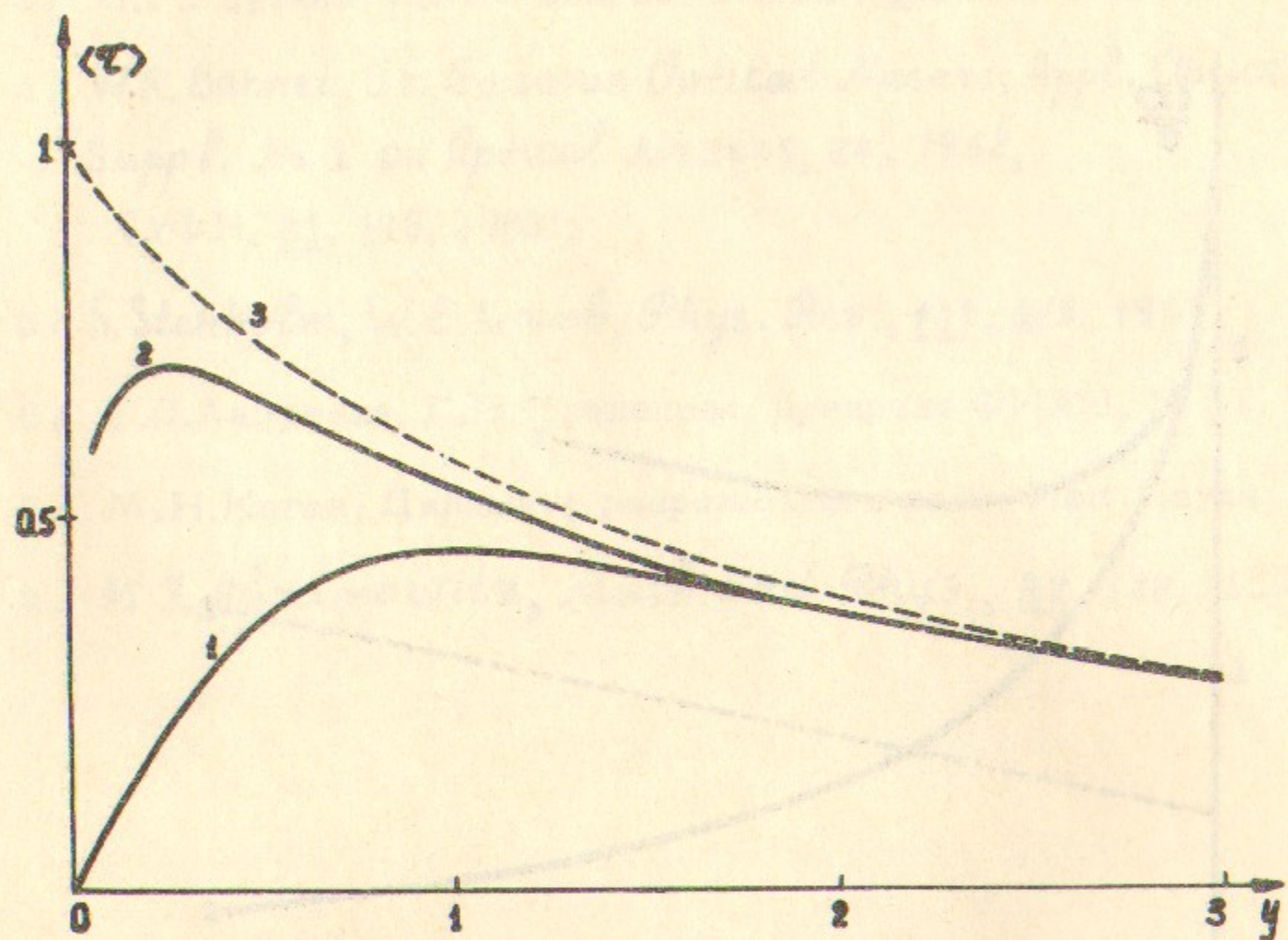


Рис.2. Зависимость времени накопления возбуждения ^{от} Давления (диффузионное приближение). $y = \sqrt{(d\bar{f}/dp)(d\Gamma/dp)2\tau^2/\pi^2\bar{v}^2\rho}$; $\langle \tau \rangle$ усреднено по области возбуждения (отложено в относительных единицах).

- 1: $\gamma = 0, d = \tau$; 2: $\gamma = 10^3 \text{сек}^{-1}, d = 10\tau, d = \infty$;
 3: $\gamma = 0, d = \infty$.

Ответственный за выпуск Шалагин А.М.
 Подписано к печати 10.12.70.
 Усл. 1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
 Заказ № 108 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР. нв.