23

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 84-70

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

СПЕКТР ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

Новосибирск

1970

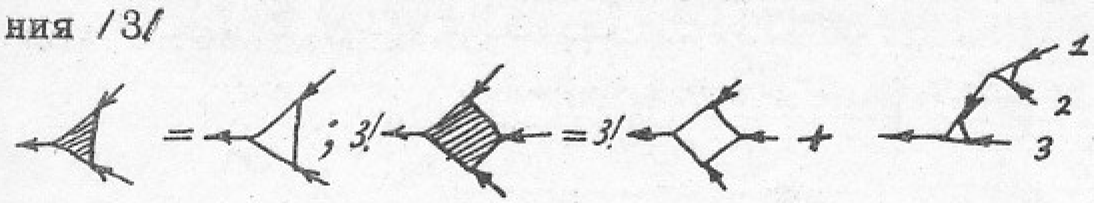
Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

СПЕКТР ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

А Н Н О Т А Ц И Я

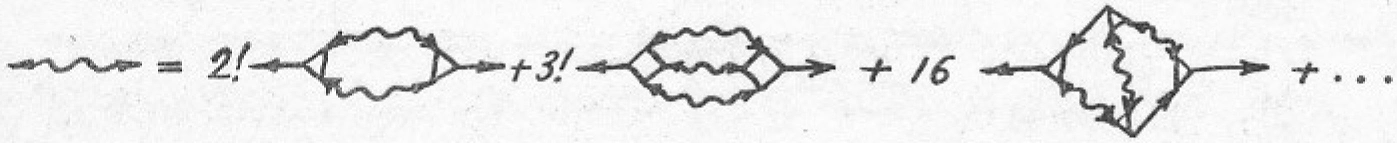
Изучается спектр турбулентности в области больших волновых чисел. Предполагается, что в этой области отклик на внешнее возмущение в основном такой же, как для покоящейся жидкости, и что влиянием процесса генерации большого числа N колебаний заданным возмущением можно пренебречь, начиная с некоторого $N \gg 1$. При этих предположениях спектральная плотность энергии $F(k) \sim \exp(-a\eta k)$.

Аналогично /3/ введём узловые вершины - суммы графиков, не разрезаемых по одной линии. Обозначим их незаштрихованными многоугольниками. Легко видеть, что имеют место следующие соотношения /3/



+ перестановки 1 - 2 - 3 и.т.д. (3)

уравнение (1) может быть переписано в виде:



(4)

Член с $\Phi_{ij}(\vec{k},\omega)$ опущен, поскольку в дальнейшем предполагается, что спектр внешних сил ограничен сверху.

Рассмотрим уравнение (4) в случае, если волновое число линий $F(\vec{k},\omega)$ в левой части уравнения велико по сравнению с обратным колмогоровским масштабом η. В рассматриваемой области существенную роль играет вязкость. Физическую картину в этой области мы представляем следующим образом. В области очень малых пространственных масштабов $\lambda \sim k^{-1}$ внешнее возмущение затухает в основном независимо от движения жидкости, т.к. за время затухания область с размером порядка λ можно считать покоящейся по отношению к основному масштабу турбулентности. Малые амплитуды собственных движений в этой области и малые внешние возмущения не интерферируют в линейном приближении. Иначе говоря, процессы нелинейного взаимодействия между гармониками следует учитывать лишь постольку, поскольку они являются единственным источником энергии. Отклик среды на малое силовое возмущение должен обладать теми же свойствами, что и в отсутствие турбулентности. В частности, обобщённый пропагатор

$$G_{ij}(\vec{k},\omega) \simeq G^{(0)}_{ij}(k,\omega) = \frac{\delta_{ij}}{-i\omega + \nu k^2}, \quad \eta k \gg 1,$$

т.е. ведёт себя степенным образом. Можно ожидать, что и более сложные многохвостки (2) в том случае, когда волновые числа каких-либо из внешних концов лежат в вязкой области, по отношению к изменению этих волновых чисел ведут себя степенным образом. Из соотношений (3) легко по индукции показать, что при степенном поведении полных вершин узловые вершины также ведут себя степенным образом.

Представим спектральный тензор $F_{ij}(\vec{\kappa},\omega)$ в виде:

$$F_{ij}(\vec{\kappa},\omega) = F(\kappa)\,\tau(\kappa,\omega)\left(\delta_{ij} - \frac{\kappa_i\kappa_j}{\kappa^2}\right),$$

где $\int \tau(\kappa,\omega)\,d\omega = 1$

Будем искать решение для $F(\kappa)$ в виде:

$$F(\kappa) = \psi(\kappa)\exp[-a(\eta\kappa)^{\gamma}] \qquad (5)$$

где $a,\gamma > 0$ -константы, $\psi(\kappa)$ - функция, меняющаяся при $\eta\kappa \gg 1$ не быстрее, чем степень. Обозначим через $\omega_*(\kappa)$ характерную частоту, выше которой функция $\tau(\kappa,\omega)$ быстро убывает. Величина $\omega_*(\kappa)^{-1}$ по порядку величины равна времени, за которое исчезает корреляция. В области $\eta\kappa \gg 1$ $\omega_*(\kappa)^{-1}$ должна быть равна времени, за которое внесённая волна исчезает за счёт вязкости, т.е. $\omega_*(\kappa) \simeq \nu\kappa^2$

Для проводимых ниже оценок достаточно предположить, что $\tau(\kappa,\omega)$ в области больших κ,ω имеет степенную асимптотику. В этом случае $\omega_*(\kappa)$ может иметь степенную зависимость $\omega_*(\kappa) \sim \kappa^{\mu}$, $\mu > 0$. Подставим (5) в уравнение (4) и проинтегрируем обе части по ω . Произвольный график в правой части (4) может быть записан в виде:

$$\int d\vec{q}_1, d\vec{q}_2, \dots, d\vec{q}_\ell \exp\left[-a\sum_{i=1}^{\ell}(\eta q_i)^{\gamma}\right]\delta\left(\sum_{i=1}^{\ell}\vec{q}_i - \vec{\kappa}\right)\int_{|\beta_1|=0}^{\omega_*(q_1)}\int_{|\beta_2|=0}^{\omega_*(q_2)}\dots$$

$$\dots\int_{|\beta_\ell|=0}^{\omega_*(q_\ell)} d\beta_1, d\beta_2, \dots, d\beta_\ell\ \Psi(q_1,\beta_1, q_2,\beta_2, \dots, q_\ell,\beta_\ell),$$

где функция $\Psi(q_1,\beta_1; q_2,\beta_2, \dots, q_\ell\beta_\ell)$ включает в себя функции $\tau(q,\beta)$, $\psi(q)$ и функции отклика. Согласно изложенному выше, интеграл по $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_\ell$ меняется с изменением $q_1, q_2, \dots, q_\ell$ не быстрее, чем степень, и главный вклад в интеграл по $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell$ даст область, где экспоненциальный множитель максимален. При $\gamma \neq 1$ максимум показателя экспоненты лежит при $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = \dots = \vec{q}_\ell = \vec{\kappa}/\ell$. При $\gamma = 1$ показатель максимален при параллельных $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_\ell$, независимо от $|\vec{q}_i|$. Предположим, что для нахождения асимптотиодного порядка со случайным чередованием знаков. В этом случае, по-видимому, возникает возможность разумного определения суммы асимптотических рядов, когда в них отсутствует малый параметр, и влиянием далёких членов ряда можно пренебречь.

Литература

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, ч.2, Москва, 1967 г.
2. Wyld H.W. Ann. Phys. 14, 143, 1961
3. Поляков А.М. ЖЭТФ 59, 542, 1970.

Ответственный за выпуск А. Паташинский
Подписано к печати 7.10.70
Усл. 0,4 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 84 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.