22

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 83 - 70

В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВЫСОКО-ЧАСТОТНЫХ И НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН

Новосибирск

1970

В в е д е н и е

В настоящей работе рассматриваются эффекты взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейной среде; при этом предполагается, что высокочастотные волны представляют собой узкий в K -пространстве пакет. Основным механизмом такого взаимодействия является возбуждение низкочастотных волн биениями высокочастотного поля.

Наибольший интерес представляет изучение нестационарных нелинейных явлений. (Как показал Шен /1/ на примере взаимодействия света и звука в диэлектрике, для стационарной в лабораторной системе отсчёта картины светового поля, влияние низкочастотных волн сводится к перенормировке кубической нелинейности высокочастотных).

Важнейшим нестационарным процессом является неустойчивость монохроматической высокочастотной волны. Впервые задача такого рода рассматривалась Волковым /2/ (для одномерной электромагнитной волны в плазме). Эта же одномерная задача более подробно изучалась Гуровичем и Карпманом /3/. Трехмерная задача о взаимодействии высокочастотных волн произвольной природы со звуком рассматривалась Веденовым и Рудаковым /4/, Веденовым, Гордеевым и Рудаковым /5/. Они, однако, использовали для высокочастотной волны приближение геометрической оптики, которое, во многих отношениях оказывается недостаточным.

Мы изучаем трехмерную задачу о взаимодействии высокочастотных волн с низкочастотными (звуком) в более точной постановке, учитывая дифракционные эффекты и собственную нелинейность высокочастотных волн. В § 1 мы выводим универсальную систему уравнений, описывающую взаимодействие звука с высокочастотными волнами произвольной природы, в § 2 - изучаем в рамках полученной системы задачу об устойчивости монохроматической волны.

Задача эта решается точно, причём область максимального инкремента определяется конкуренцией эффектов нелинейности и дифракции. В большинстве случаев наиболее сильная неустойчивость осуществляется для направлений, образующих некоторый угол с направлением исходной волны.

В § 3 полученные в § 2 результаты применяются к электромагнитным волнам в плазме и в изотропном диэлектрике. В § 4 изучаются волны в средах со слабой дисперсией, в частности ионнозвуковые волны и волны на поверхности жидкости. Здесь показано, что характер неустойчивости этих волн и факт существования их самофокусировки определяется знаком дисперсии.

§ 1. Основные уравнения

Пусть в нелинейной среде могут распространяться высокочастотные волны с законом дисперсии ω_k и низкочастотные - с дисперсией Ω_k. Гамильтониан среды запишем в виде

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + \int \Omega_k b_k b_k^* dk + H_{int}^{(1)} + H_{int}^{(2)} \tag{1}$$

Здесь a_k - комплексная амплитуда высокочастотных волн, b_k - низкочастотных. Уравнение для a_k и b_k имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0 \qquad \frac{\partial b_k}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta b_k^*} = 0 \tag{2}$$

В формуле (1) $H_{int}^{(1)}$ - гамильтониан взаимодействия высокочастотных волн с низкочастотными. Высокочастотная амплитуда должна входить в $H_{int}^{(1)}$ в комбинации $a a^*$, так что в низшем порядке по a_k и b_k имеем:

$$H_{int}^{(1)} = \int \left(\Gamma_{k k_1 k_2}^* b_k a_{k_1} a_{k_2} + \Gamma_{k k_1 k_2} b_k^* a_{k_1} a_{k_2}^* \right) \delta_{k-k_1+k_2} \, dk \, dk_1 \, dk_2 \tag{3}$$

В дальнейшем мы будем полагать, что высокочастотные волны образуют в K -пространстве узкий (шириной ΔK) пакет со средним волновым вектором K_0 $\Delta K \ll K_0$.

Пользуясь этим, положим приближенно

$$\Gamma_{kk_1k_2} \simeq \Gamma_{kk_0k_0} = f(k,k_0)$$

Тогда уравнение (2) для b_k имеет вид

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} + i\omega_k b_k = -i\int f(k,k_0)\, a_{k_1} a^*_{k_2}\, \delta_{k-k_1+k_2}\, dk_1 dk_2 \tag{4}$$

Член $H^{(2)}_{int}$ в гамильтониане описывает непосредственное взаимодействие высокочастотных волн между собой и в общем случае среды с квадратичной и кубичной нелинейностью равен

$$H^{(2)}_{int} = \int \left[V_{kk_1k_2}\, a_k a^*_{k_1} a_{k_2} + V^*_{kk_1k_2}\, a^*_k a_{k_1} a^*_{k_2} \right] \times$$

$$\times\, \delta_{k-k_1+k_2}\, dk\, dk_1 dk_2 + \frac{1}{3}\int \left[U_{kk_1k_2}\, a_k a_{k_1} a_{k_2} + \right.$$

$$\left. U^*_{kk_1k_2}\, a^*_k a^*_{k_1} a^*_{k_2} \right] \delta_{k+k_1+k_2}\, dk_1 dk dk_2 \quad + \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}\int W_{kk_1k_2k_3}\, a^*_k a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}\, \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk\, dk_1 dk_2 dk_3$$

Гамильтониан взаимодействия низкочастотных волн между собой мы не рассматриваем, полагая амплитуды их малыми по сравнению с амплитудами высокочастотных волн. Уравнение для величины a_k имеет вид:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i\int\left\{\Gamma_{k_1 k k_2} b_{k_1} a_{k_2} + \Gamma^*_{-k_1 k_2 k} b^*_{-k_1} a_{k_2}\right\} \times$$

$$\times \delta_{k-k_1+k_2} dk_1 dk_2 - i\int\left\{V_{k_1 k k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k_1-k-k_2} + \right.$$

$$\left. + 2V^*_{k k_1 k_2} a_{k_1} a^*_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2}\right\} dk_1 dk_2 -$$

$$-i\int U^*_{k k_1 k_2} a^*_{k_1} a^*_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} dk_1 dk_2 - \qquad (6)$$

$$-i\int W_{k k_1 k_2 k_3} a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3$$

Для упрощения этого уравнения заметим, что a_k можно приближенно представить в виде

$$a_k = a_k^{(0)} + a_k^- + a_k^+ + \tilde{b}_k \qquad (7)$$

Здесь $a_k^{(0)}$ – основной волновой пакет со средней частотой $\omega(k_0)$: $a_k^{\pm}$ сосредоточены вблизи $k \sim \pm 2k_0$ и имеют средние частоты $\pm 2\omega(k_0)$: $\tilde{b}_k$ представляет собой "собственную" низкочастотную компоненту поля a_k, сосредоточенную в области волновых чисел $k \sim \Delta k$ и имеющую частоту $\Delta\omega \sim \omega(k_0+\Delta k) - \omega(k_0)$

В уравнениях для a_k^+, a_k^-, b_k учтем в правой части только члены, квадратичные по $a_k^{(0)}$. Получим приближенно:

$$\frac{\partial a_k^+}{\partial t} + i\omega_k a_k^+ = -i\int V_{2k_0k_0k_0}\, a_{k_1}^{(0)} a_{k_2}^{(0)} \delta_{k-k_1-k_2}\, dk_1 dk_2$$

$$\frac{\partial a_k^-}{\partial t} + i\omega_k a_k^- = -i\int U^*_{-2k_0k_0k_0}\, a_{k_1}^{(0)*} a_{k_2}^{(0)*} \delta_{k+k_1+k_2}\, dk_1 dk_2 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{b}_k}{\partial t} + i\omega_k \tilde{b}_k = -2i\int V_{kk_0k_0}\, a_{k_1}^{(0)} a_{k_2}^{(0)*} \delta_{k-k_1+k_2}\, dk_1 dk_2 \qquad (9)$$

Уравнения (8) могут быть явно решены

$$a_k^+ = -\frac{V_{2k_0k_0k_0}}{\omega(2k_0)-2\omega(k_0)}\int a_{k_1}^{(0)} a_{k_2}^{(0)} \delta_{k-k_1-k_2}\, dk_1 dk_2$$

$$a_k^- = -\frac{U^*_{-2k_0k_0k_0}}{\omega(2k_0)+2\omega(k_0)}\int a_{k_1}^{(0)*} a_{k_2}^{(0)*} \delta_{k+k_1+k_2}\, dk_1 dk_2 \qquad (10)$$

Что касается уравнения (9), то оно может быть аналогич - ным образом решено только в случае, когда величина $V_{kk_0k_0}/\omega(k)$ непрерывна в точке $k=0$, что далеко не всегда выполняется в конкретных физических задачах.

Заметим, однако, что уравнение (9) для "собственной" низкочастотной амплитуды $\tilde{b}_k$ совпадает с уравнением (4) для "внешней" низкочастотной амплитуды b_k, если положить $\Omega_k = \omega_k$, $f(k, k_0) = 2 V_{k k_0 k_0}$. Поэтому "собственные" низкочастотные волны можно рассматривать как независимые степени свободы, подобные "внешним" волнам с амплитудой b_k. В дальнейшем мы будем предполагать, что имеется только один тип низкочастотных волн, либо "собственные", либо "внешние" – оба эти случая рассматриваются единообразно. Амплитуду низкочастотных волн будем, независимо от их природы, обозначать b_k.

Заметим еще, что в некоторых важных случаях "собственные" низкочастотные волны отсутствуют. Так обстоит дело в среде с кубической нелинейностью и в среде, в которой
$V_{k k_0 k_0}/\omega(k) \to 0$ при $k \to 0$

В уравнении для $a_k^{(0)}$ учтем члены, имеющие временную зависимость $\sim e^{-i\omega(k_0)t}$. Собирая их, получим:

$$\frac{\partial a_k^{(0)}}{\partial t} + i\omega_k a_k^{(0)} = -i\int\Big[f(k,k_0)\, b_{k_1} a_{k_2}^{(0)} +$$

$$f^*(-k,k_0)\, b^*_{-k_1} a_{k_2}\Big]\delta_{k-k_1-k_2}\, dk_1 dk_2 -$$

$$-\frac{q}{(2\pi)^3}\int a_k^{(0)*} a_{k_2}^{(0)} a_{k_3}^{(0)}\, \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk_1 dk_2 dk_3 \tag{11}$$

$$\frac{q}{(2\pi)^3} = W_{k_0k_0k_0k_0} - \frac{2|V_{2k_0k_0k_0}|^2}{\omega(2k_0)-2\omega(k_0)} - \frac{2|U_{-2k_0k_0k_0}|^2}{\omega(2k_0)+2\omega(k_0)} \tag{12}$$

Для гамильтониана H после упрощений имеем:

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + \int b_k b_k^* \Omega_k dk +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{q}{(2\pi)^3} \int a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk\, dk_1 dk_2 dk_3 +$$

$$+ \int \left[f(k,k_0) b_k a_{k_1}^* a_{k_2} + f^*(k,k_0) b_k^* a_{k_1} a_{k_2}^* \right] \delta_{k-k_1+k_2} dk\, dk_1 dk_2$$

Уравнения (4) и (11) могут быть получены из этого гамильтониана по формулам (2).

В дальнейшем мы будем рассматривать случаи, когда низкочастотные волны представляют собой звук, так что $\Omega_k = Sk$. Если речь идет о собственных низкочастотных волнах, то это означает, что при малых k, $\omega_k \simeq Sk$. В этом случае функцию $f(k,k_0)$ можно выписать в явном виде. Заметим, что энергия узкого в k -пространстве пакета высокочастотных волн имеет вид

$$\mathcal{E} = \omega(k_0) \int a_k a_k^* dk$$

$\omega(k_0)$ вообще говоря, зависит от плотности и скорости среды и при распространении в среде звука приобретает вариацию

$$\delta\omega(k_0) = \frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\rho}\delta\rho + \left(\frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\vec{v}}\vec{v}\right)$$

Здесь $\delta\rho$ и $\vec{v}$ -вариации плотности и скорости среды. Энергия высокочастотных волн приобретает при этом вариацию

$$\delta\mathcal{E} = \int \left[\frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\rho}\delta\rho + \left(\frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\vec{v}}\vec{v}\right) \right] |a(r,t)|^2 dr \qquad (13)$$

Здесь $a(r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int a_K e^{i(Kr)}\,dK$ – Фурье-прообраз амплитуды a_K .

Заметим, что преобразования Фурье скорости и плотности связаны с амплитудой b_K формулами

$$\rho_K=\frac{K^{1/2}\rho_0^{1/2}}{S^{1/2}}\frac{b_K+b_{-K}^*}{\sqrt{2}}\qquad \vec{v}_K=\frac{-i\vec{K}S^{1/2}}{K^{1/2}\rho_0^{1/2}}\frac{b_K-b_{-K}^*}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

Очевидно, вариация энергии $\delta\mathcal{E}$ совпадает с $H_{int}^{(1)}$. Подставляя (14) в (13), найдем

$$f(K,K_0)=\left(\frac{K}{16\pi^3 S\rho_0}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial\omega(K_0)}{\partial\rho}\rho_0+\frac{S}{K_0}\left(\vec{K}\frac{\partial\omega}{\partial\vec{v}}\right)\right]$$

Заметим еще, что в изотропной среде $\frac{\partial\omega}{\partial\vec{v}}=\alpha\vec{n}$, где $\vec{n}$ –единичный вектор в направлении $\vec{K}_0$. α – коэффициент увлечения волны средой.

Выражение для $f(K,K_0)$ теперь упрощается до вида

$$f(K,K_0)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{\beta K^{1/2}\rho_0^{1/2}}{\sqrt{2}\,S^{1/2}}+\frac{\alpha(\vec{K}\vec{n})S^{1/2}}{\sqrt{2}\,\rho_0^{1/2}K^{1/2}}\right)\quad \beta=\frac{\partial\omega}{\partial\rho} \tag{15}$$

По порядку величины $\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\sim\frac{\omega}{\rho_0}$; $\frac{\partial\omega}{\partial v}\sim\frac{\omega}{V_\phi}$,где

V_ϕ –фазовая скорость высокочастотных волн, и отношение второго члена к первому в формуле (15) порядка S/v_ϕ . При $S\ll V_\phi$ эффектом "увлечения" волны средой можно пренебречь. Для узкого в K –пространстве пакета можно положить также

$$\omega(K)=\omega(K_0)+(\vec{V}\delta\vec{K})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial K_\alpha\partial K_\beta}\delta K_\alpha\delta K_\beta \tag{16}$$

где $\delta\vec{K} = \vec{K} - \vec{K}_0$ $\vec{V} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{K}}$ –групповая скорость волн.

Перейдем в уравнениних (4), (11) к переменным $\delta\rho$, Φ –вариации плотности к гидродинамическому потенциалу и к переменной $\psi(r,t) = a(r,t)\exp[-i\omega(K_0)t + i(K_0 r)]$,имеющей смысл огибающей высокочастотной волны. С учётом (15),(16) получим:

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} - V\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi + \frac{1}{2}\omega''\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{V}{2K_0}\Delta_\perp\psi = \left(q|\psi|^2 + \beta\delta\rho + \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\psi$$

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\Delta\Phi = -\alpha\frac{\partial|\psi|^2}{\partial z} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + S^2\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\beta|\psi|^2$$

Здесь мы воспользовались тем, что в изотропной среде

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial K_\alpha\partial K_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} = \omega''\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{K_0}\Delta_\perp$$

где z –координата вдоль направления распределения волны, $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан.

Уравнения (17) представляют собой универсальную систему уравнений, описывающую взаимодействие высокочастотной волны со звуком в изотропной среде.

При $\alpha = \beta = 0$ они переходят в нелинейное параболическое уравнение, использованное ранее одним из авторов /6/. В стационарном случае, когда $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ следует пренебречь членами, пропорциональными $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Отбрасывая их, получим:

$$-2iK_0\frac{\partial\psi}{\partial z} + \Delta_\perp\psi = \frac{2K_0}{V}(q - q')|\psi|^2\psi \qquad q' = \frac{\beta^2\rho_0}{S^2}$$

Это уравнение совпадает с уравнением, описывающим стационарную самофокусировку волн /7/. Самофокусировка имеет место, если

$$q - q' < 0 \tag{18}$$

Уравнения (17) имеют точное решение

$$\psi = A e^{-iqA^2 t} \qquad \delta\rho = 0 \qquad \Phi = -\beta A^2 t$$

представляющее собой монохроматическую волну конечной амплитуды.

Линеаризуем уравнения (17) на фоне этого решения и положим, что возмущения всех величин пропорциональны $e^{-i\Omega t + ipr}$. Получим дисперсионное уравнение:

$$\left[(\Omega - pV\cos\theta)^2 - \frac{1}{4}L^2(\theta)p^4\right](\Omega^2 - p^2S^2) = L(\theta)p^2A^2\Big\{q(\Omega^2 - p^2S^2) +$$
$$+ \beta^2\rho_0 p^2 + 2\alpha\beta\Omega p\cos\theta + \alpha^2\cos^2\theta\, S^2\rho_0^{-1}\Big\} \tag{19}$$

Здесь $L(\theta) = \omega''\cos^2\theta + \frac{V}{K_0}\sin^2\theta \qquad \cos\theta = \frac{(\vec{p}\,\vec{K}_0)}{|p|\,|K_0|}$

Уравнение (19) справедливо при условии $p \ll K_0$.

Для частного случая $\alpha = q = \theta = 0$ это уравнение было получено Гуровичем и Карпманом /3/.

§ 2. Неустойчивость монохроматической высокочастотной волны

Дисперсионное уравнение (19) описывает неустойчивости монохроматической высокочастотной волны. Простейшими типами неустойчивостей являются распадные неустойчивости первого и второго порядка. Волновой вектор p для этих неустойчивостей расположен соответственно вблизи поверхностей

$$\omega(k_0) = \omega(k_0 - p) + \Omega(p) \tag{20}$$

$$2\omega(k_0) = \omega(k_0 - p) + \omega(k_0 + p) \tag{21}$$

Распадные неустойчивости имеют место при не слишком малых p/k_0 ; при $p/k_0 \to 0$ их характер сильно меняется. Распадная неустойчивость второго порядка превращается при этом в неустойчивость, представляющую собой спонтанное нарастание модуляций на фоне исходной волны. Эта неустойчивость - мы будем называть её модуляционной - наиболее интересна, поскольку её развитие приводит к разрушению волны - разбиению её на отдельные нити или сгустки, в которых амплитуда может достичь больших значений. Разрушение волны представляет собой эффективный механизм диссипации её энергии в среде с малым поглощением.

С модуляционной неустойчивостью конкурирует распадная неустойчивость первого порядка, [10] рассмотрением которой мы и начнем последовательное изучение уравнения (19). Поверхность(20) при $p/k \to 0$ описывается уравнением

$$V\cos\theta - \frac{1}{2}L(\theta)p = S$$

и в пределе $p/k \to 0$ представляет собой конус с углом при вершине $\cos\theta = \frac{S}{V}$.

Вблизи поверхности (20) уравнение (19) приводится к виду

$$\left[(\Omega - pV\cos\theta) - \frac{1}{2}L(\theta)p^2\right](\Omega - pS) + \Gamma(\theta)pA^2 = 0$$

$$\Gamma(\theta) = \frac{\beta^2\rho_0}{S^2} + \frac{2\alpha\beta V\cos^2\theta}{S} + \frac{\alpha^2 S}{\rho_0}\cos^2\theta \tag{22}$$

Наиболее сильная неустойчивость имеет место непосредственно на поверхности (20), где инкремент равен

$$\gamma(p) = (\Gamma p A^2)^{1/2}$$

Максимум этого инкремента лежит в области $\rho \sim k_0$. Уравнение (22) применимо, если

$$\gamma(p) \ll L p^2 \quad \text{и} \quad \gamma(p) \ll s p \tag{23}$$

Неравенства (23) ограничивают снизу область значений , при которых имеет место распадная неустойчивость.

Дифференцируя уравнение (22) по ρ, найдем величину $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}$ – групповую скорость нарастающего в результате распадной неустойчивости возмущения. В пределе малых ρ и с точностью до членов порядка γ имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{2}\left(\vec{V} + s\vec{n}\right) \qquad n = \frac{\vec{p}}{|p|} \tag{24}$$

Рассмотрим теперь распадную неустойчивость второго порядка (см./8/). При $p/k \to 0$ поверхность (21) представляет собой конус

$$L(\theta) = \omega'' \cos^2\theta + \frac{V}{k} \sin^2\theta = 0$$

Неустойчивость существует, если $\omega'' < 0$. Вблизи этого конуса уравнение (19) приводится к виду

$$(\Omega - pV\cos\theta)^2 - \frac{1}{4} L^2 p^4 = L p^2 q_{\text{эфф}}(\theta) A^2$$

$$q_{\text{эфф}} = q - \frac{(\beta^2 \rho_0 + 2\alpha\beta V\cos^2\theta + \alpha^2 s^2 \cos^2\theta \rho_0^{-1})}{s^2 - V^2\cos^2\theta} \tag{25}$$

Откуда

$$\Omega - pV\cos\theta = \pm\sqrt{L p^2 q_{\text{эфф}} A^2 + \frac{1}{4} L^2 p^4} \tag{26}$$

Максимальный инкремент

$$\gamma = q_{\text{эфф}} A^2$$

достигается при углах, определяемых условием

$$\frac{1}{2} L p^2 = q_{\text{эфф}} A^2$$

Ширина по углам $\Delta\theta$ области вблизи конуса, в которой имеет место неустойчивость, определяется из оценки

$$\Delta\theta \sim \frac{q_{эфф} A^2}{\omega_k}\left(\frac{k_0}{\rho}\right)^2$$

и увеличивается с уменьшением ρ. При $\left(\frac{\rho}{k_0}\right)^2 \sim \frac{q_{эфф} A^2}{\omega_k}$ она раскрывается до углов порядка единицы. При этом в область неустойчивости могут попасть углы $\cos\theta = S/V$, при которых $q_{эфф}$ имеет особенность, тогда формула (26) перестает быть справедливой.

Если $S/V > 1$, и распадная неустойчивость первого порядка отсутствует, то формула (25) справедлива при сколь угодно малых ρ.

Для существования неустойчивости не обязательно выполнение условия $\omega_k'' = 0$, неустойчивость имеет место и если $\omega'' > 0$, $q < 0$. В общем случае диапазон углов, в котором существует неустойчивость, определяется неравенством

$$L(\theta)\, q_{эфф}(\theta) < 0$$

По каждому направлению θ, кроме конуса $L(\theta) = 0$ (если он существует) область неустойчивости ограничена значением

$$\rho^2 < 4\left|\frac{q_{эфф}(\theta)}{L}\right| A^2$$

Как видно из формулы (26), описанная выше неустойчивость является абсолютной в системе волны. При распространении в среде волнового пакета она приведет к нарастанию модуляции, неподвижной относительно этого пакета, что и оправдывает её название модуляционной неустойчивости. Это верно, однако, только с точностью до членов порядка $(\rho/k_0)^3$, которые мы отбрасываем при выводе уравнения (19). При $\left(\frac{\rho}{k_0}\right)^3 \sim \frac{q_{эфф} A^2}{\omega_k}$ неустойчивость становится сносовой и теряет свой характер модуляционной неустойчивости.

Перейдем теперь к случаю $S < V$. Для простоты будем считать $S \ll V$. Тогда при не слишком малых

$q\left(\frac{q}{q'} \gg \frac{S^2}{V^2}\right)$ во всей области углов, кроме близких к $\theta = \frac{\pi}{2}$ влиянием низкочастотных волн можно пренебречь. Для углов, близких к $\theta = \frac{\pi}{2}$ можно положить $L = \frac{V}{K}$ и пренебречь членами, содержащими α, после чего получим:

$$\left[(\Omega - pV\cos\theta)^2 - \frac{1}{4}\frac{V^2}{K^2}p^4\right](\Omega^2 - p^2S^2) = \frac{V}{K_0}p^2A^2\left[q(\Omega^2 - p^2S^2) + q'p^2S^2\right] \tag{27}$$

При исследовании уравнения (27) положим вначале $q = 0$. Тогда возможны следующие случаи:

1. $\frac{q'A^2}{\omega_K} \ll \frac{S^2}{V^2}$. В этом случае при $\frac{p}{K_0} \gg \left(\frac{S}{V}\frac{q'A^2}{\omega_K}\right)^{1/2}$ осуществляется распадная неустойчивость первого порядка. При меньших p нарушается первое из условий (23) и при $p/K_0 \ll \left(\frac{S}{V}\frac{q'A^2}{\omega_K}\right)^{1/2}$ в уравнении (27) можно пренебречь членом Lp^2 и упростить его до вида

$$(\Omega - pV\cos\theta)^2(\Omega - pS) = \frac{V}{K_0}p^3Sq'A^2 \tag{28}$$

Наиболее сильная неустойчивость имеет место на конусе $\cos\theta = S/V$, где

$$\operatorname{Im}\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}p\left(\frac{V}{K_0}Sq'A^2\right)^{1/3} \tag{29}$$

Дифференцируя (28) по p, найдем с точностью до малых членов

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p} = \frac{2}{3}V \tag{30}$$

2. $\frac{S^2}{V^2} \ll \frac{q'A^2}{\omega_K} \ll S/V$. В этом случае при $p/K_0 \gg \left(\frac{V}{S}\frac{q'A^2}{\omega_K}\right)^{1/2}$ также осуществляется распадная неустойчивость. При меньших p нарушается второе из условий (23),

при этом уравнение (27) приводится к виду

$$\Omega^2 \left(\Omega - pV\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{V}{K_0}p^2\right) = p^2 S^2 q' A^2 \qquad (31)$$

Максимум неустойчивости имеет место на поверхности

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{p}{K_0}, \text{ где } \operatorname{Im}\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(p^2 S^2 q' A^2\right)^{1/3} \qquad (32)$$

Дифференцируя (31) по p, найдем с точностью до малых членов

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = \frac{1}{3} V \qquad (33)$$

Неустойчивость (32) мы будем называть модифицированной. При $\frac{p}{K_0} \sim \left(\frac{S}{V}\frac{q' A^2}{\omega_\kappa}\right)^{1/4}$ инкремент её сравнивается с $L p^2$. При меньших уравнение (31) следует заменить уравнением

$$\Omega^2 (\Omega - pV\cos\theta)^2 = \frac{V}{K_0} p^4 S^2 q' A^2 \qquad (34)$$

Максимальный инкремент

$$\operatorname{Im}\Omega = p\left(\frac{V}{K_0} S^2 q' A^2\right)^{1/4} \qquad (35)$$

достигается при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Дифференцируя уравнение (34) по p, получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p} = \frac{1}{2} V \qquad (36)$$

3. $1 \gg \frac{q' A^2}{\omega_\kappa} \gg \frac{S}{V}$. Этот случай отличается от предыдущего только тем, что теперь отсутствует область распадной неустойчивости первого порядка – модифицированная неустойчивость простирается до $p \sim K_0$. Максимальный инкремент модифицированной неустойчивости

$$\gamma \sim \left(K_0^2 S^2 q' A^2\right)^{1/3} \qquad (37)$$

Влияние собственной нелинейности следует учитывать только в области достаточно малых $p/_K$, когда $L p^2 \lesssim q A^2$. Сравнивая в этой области инкремент модуляционной неустойчи –

вости с инкрементом распадной (если $\frac{q'A^2}{\omega_k} \ll \frac{S^2}{V^2}$) или модифицированной распадной (если $\frac{q'A^2}{\omega_k} \gg \frac{S^2}{V^2}$), находим, что собственной нелинейностью можно пренебречь при выполнении неравенств

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \ll \frac{S^2}{V^2}\left(\frac{q'}{q}\right)^3 \quad \text{, если} \quad q > q'$$

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \ll \frac{S^2}{V^2}\left(\frac{q'}{q}\right)^2 \quad \text{, если} \quad q < q'$$

Если выполняются противоположные неравенства, то в области $\not{L}\rho \lesssim qA^2$ можно полностью пренебречь влиянием низкочастотных волн.

Заметим, что как следует из формул (26), (29), (35) при малых волновых числах инкремент неустойчивости пропорционален ρ. Это можно непосредственно усмотреть из уравнения (19), в котором при $\rho \Rightarrow 0$ можно пренебречь членом $(\not{L}\rho^2)^2$.

Переход к пределу $\rho \Rightarrow 0$ представляет собой переход к пренебрежению нелинейной геометрической оптики для высокочастотной волны, это приближение использовалось в работах /4,5/. Учет члена $(\not{L}\rho^2)^2$ представляет собой учёт фраунгеферовой дифракции высокочастотных волн.

Обсудим возможность наблюдения собственной модуляционной неустойчивости в присутствие низкочастотных волн. Для её наблюдения необходимо чтобы её инкремент превышал максимальный инкремент неустойчивости, связанной с низкочастотными волнами. Последний осуществляется для распадной (при $\frac{q'A^2}{\omega_k} < S/V$) и модифицированной распадной (при $q'A^2/\omega_k > S/V$) неустойчивости назад. Сравнивая эти инкременты, получаем, что модуляционная неустойчивость интенсивнее распадных при выполнении неравенств

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \gg \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \frac{S}{V} \quad \text{если} \quad q > q'$$

$$\frac{q'A^2}{\omega_k} \gg \left(\frac{q'}{q}\right)^{3/2} \frac{S}{V} \quad \text{если} \quad q < q' \tag{38}$$

Однако, модуляционную неустойчивость можно наблюдать и при меньших амплитудах. Как следует из формул (24), (30), (33), (36), все неустойчивости, связанные с низкочастотными волнами, являются сносовыми в системе отсчёта, движущейся с групповой скоростью исходной волны. Поэтому эти неустойчивости могут развиваться только для достаточно длинных волновых пакетов с длиной $L > \frac{V_0}{Im\Omega}$ (или для немонохроматической волны с соответствующей длиной когерентности.

Модуляционная же неустойчивость является абсолютной в системе волны - для её развития достаточно, чтобы когерентный волновой пакет имел длину

$$L_{mod} \gg \frac{1}{P_{max}} \sim \frac{1}{K_0}\left(\frac{\omega_k}{qA^2}\right)^{1/2}$$

Подставляя в качестве $Im\,\Omega$ максимальный инкремент распадной неустойчивости, убеждаемся, что если, $q \gg \frac{S}{V} q'$, то модуляционную неустойчивость можно наблюдать при сколь угодно малой амплитуде волны. Если $\frac{q'A}{\omega} \ll \frac{S}{V}$, то для этого нужно выбрать когерентный волновой пакет, удовлетворяющий условиям

$$\left(\frac{\omega_k}{qA^2}\right)^{1/2} \ll LK_0 \ll \left(\frac{V}{S}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega_k}{q'A^2}\right)^{1/2} \tag{39}$$

При $\frac{q'A^2}{\omega_k} \gg \frac{S}{V}$ условие на длину волнового пакета есть

$$\left(\frac{\omega_k}{qA^2}\right)^{1/2} \ll LK_0 \ll \left(\frac{V}{S}\right)^{2/3}\left(\frac{\omega_k}{q'A^2}\right)^{1/3} \tag{40}$$

§ 3. Неустойчивость электромагнитных волн

Применим теперь полученные результаты к изучению устойчивости электромагнитных волн в плазме и нелинейном диэлектрике.

Представим электрическое поле волны в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left(\vec{S}e^{-i\omega t + i(kr)} + \vec{S}^{*}e^{i\omega t - i(kr)}\right)$$

Тогда энергия поля имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\omega_k}\frac{\partial}{\partial\omega}(\varepsilon\omega^2)(\vec{S}_k \vec{S}^*_k)dk \qquad \vec{S}_k = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int S e^{ikr} dr$$

Через канонические переменные энергия выражается по формуле

$$\mathcal{E} = \int \omega_k (\vec{a}_k \vec{a}_k) dk$$

Откуда

$$\vec{a}_k = \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon\right)^{1/2}\vec{S}$$

Для простоты будем считать, что волна имеет линейную поляризацию, в этом случае a_k можно считать скаляром и уравнения (17) применимы непосредственно, причём

$$\Psi = \frac{1}{\omega_k}\left(\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon\right)^{1/2} S$$

Величина qA^2 представляет собой нелинейный сдвиг частоты в монохроматической волне

$$qA^2 = \Delta\omega = \frac{\omega\,\delta n_{нл}}{n_0}$$

Здесь $\delta n_{нл}$ – нелинейная поправка к показателю преломления. Аналогично

$$q' A^2 = \omega\frac{\delta n_{стр}}{n_0} \quad ; \quad \delta n_{стр}$$ – стрикционная поправка к показателю преломления. В нелинейном диэлектрике распадная неустойчивость первого порядка представляет собой вынужденное расстояние Мандельштама-Бриллюэна и обладает весьма низким порогом. Параметр S/V для диэлектрика очень мал $\sim 10^{-5}$, поэтому уже при вполне реальных амплитудах поля $\frac{\delta n_{стр}}{n}$ 10^{-5} распадная неустойчивость переходит в модифицированную. Величина q'/q для диэлектриков колеблется в пределах 0,1 – 10. Для $q' < q$ легко также удовлетворить критериям (38), так что представляется возможным наблюдать модуляционную неустойчивость на длинных когерентных пакетах. Что касается наблюдения модуляционной неустойчивости в корот-

ких импульсах, то эта возможность представляется проблематичной из-за значительного времени релаксации собственной нелинейности.

В плазме без мягкого поля ионнозвуковые колебания существуют только при $T_e >> T_i$. Для величин S/V и $q'A^2$ имеем

$$S/V = \sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{\omega_k}{kc}\,\frac{V_{Te}}{c} \qquad \omega^2 = \omega_p^2 + k^2c^2$$

$$q'A^2 = \frac{\omega_p^4}{8\,\omega_k^3}\,\frac{c^2}{V_{Te}^2}\,\frac{E^2}{4\pi m n_o c^2}$$

Величина qA^2, совпадающая с максимальным инкрементом собственной неустойчивости, вычислена в /8/

$$qA^2 = \frac{\omega_p^4}{\omega_k^3}\left(\frac{3}{4} - \frac{k^2c^2}{3\omega_p^2 + 4k^2c^2}\right)\frac{E^2}{4\pi m n_o c^2}$$

Отношение $\frac{q}{q'} \sim \frac{V_{Te}^2}{c^2} << 1$

Проведенное в настоящей работе рассмотрение пригодно в плазме для амплитуд поля, удовлетворяющих условию

$$\frac{E^2}{4\pi m n_o c^2} << \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\,\frac{V_{Te}^2}{c^2}$$

так как в противном случае осцилляционная скорость электронов больше их тепловой скорости и необходимо учитывать нелинейные поправки в законе дисперсии ионного звука.

В связи с этим наблюдение модуляционной неустойчивости в длинных волновых пакетах возможно только для весьма горячей плазмы. Однако, в плазме собственная нелинейность является безынерционной, и остается возможность её наблюдения в коротких импульсах.

В изотермической плазме $T_e \sim T_i$ волны достаточно малой амплитуды испытывают только собственную неустойчивость.

Однако, при

$$\frac{q' A^2}{\omega_k} \gg \frac{S^2}{V^2} \quad \frac{E^2}{4\pi m n_0 c^2} \gg \frac{m}{M} \frac{8\omega_k^5}{\omega_p^4 k c} \frac{V_{Te}^3}{c^3}$$

для малых ρ инкремент низкочастотной неустойчивости превышает чистоту ионнозвуковых волн. Для волн такой амплитуды неустойчивость имеет место при любом соотношении температур в плазме.

§ 3. Волны в средах со слабой дисперсией

Значительный интерес представляет изучение нелинейных волн в средах со слабой дисперсией, в которых

$$\omega_k = s k (1 + \lambda k^2) \qquad \lambda k^2 \ll 1 \tag{41}$$

Такой закон дисперсии имеют, например, ионнозвуковые волны в плазме и волны на поверхности мелкой воды.

При изучении узких в k -пространстве пакетов таких волн необходимо, как мы покажем, учитывать "собственную" низкочастотную компоненту волнового поля.

В предположении малой нелинейности $\delta\rho \ll \rho_0$ получим уравнения, описывающие среды со слабой дисперсией в общем виде. Для этого заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения этих сред переходят в уравнения газовой динамики. Рассмотрим энергию среды

$$H = \int \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{E}(\rho) \right] d\Gamma$$

Здесь $\mathcal{E}(\rho)$ внутренняя энергия среды. Для случая газодинамики $\mathcal{E}(\rho)$ есть функция ρ.

В среде со слабой дисперсией $\mathcal{E}(\rho)$ зависит также от градиента ρ. В изотропной среде при $\delta\rho \ll \rho_0$ имеем.

$$H = \int \left\{ \frac{\rho v^2}{2} + \frac{S^2}{2\rho_0} \left[\delta\rho^2 + g \frac{\delta\rho^3}{\rho_0} + 2\lambda (\nabla \delta\rho)^2 \right] \right\} d\Gamma \tag{42}$$

Энергии (42) соответствуют уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{s^2}{\rho_0}\nabla\left(\delta\rho + \frac{3}{2} g \frac{\delta\rho^2}{\rho_0} - 2\lambda\Delta\delta\rho\right)$$

Введем гидродинамический потенциал $v = \nabla\Phi$ как легко видеть, $\delta\rho$ и Φ являются канонически сопряженными величинами, а H гамильтонианом. Переходя от $\delta\rho$ и v к переменным a_k по формулам (14), получим гамильтониан (5), для которого

$$V_{kk_1k_2} = U_{kk_1k_2} = \frac{s^{1/2}}{16(\pi^3\rho_0)^{1/2}}\left\{\frac{(\vec{k}\vec{k}_1)|k_2|^{1/2}}{|k|^{1/2}|k_1|^{1/2}} + \frac{(\vec{k}\vec{k}_2)|k_1|^{1/2}}{|k|^{1/2}|k_2|^{1/2}} + \frac{(\vec{k}_1\vec{k}_2)|k|^{1/2}}{|k_1|^{1/2}|k_2|^{1/2}} + 3g|k|^{1/2}|k_1|^{1/2}|k_2|^{1/2}\right\} \tag{44}$$

$$W_{kk_1k_2k_3} = 0$$

Выражая коэффициенты, входящие в уравнения (17), найдем, что с точностью до членов $\sim \lambda k_0^2$

$$q = -\frac{|V_{2k_0k_0k_0}|^2}{\omega(2k_0) - 2\omega(k_0)} = -\frac{3(g+1)^2}{16\lambda} \qquad \frac{q'}{q} \sim \lambda k_0^2 \ll 1$$

$$\alpha = k_0 \qquad \beta = \frac{(3g+1)sk_0}{2\rho_0}$$

Поскольку $q' \ll q$, то стационарная самофокусировка определяется знаком q и имеет место в средах, где $q<0$ и соответственно $\lambda>0$. В случае $\lambda>0$ возможна распадная неустойчивость первого порядка и запрещена (при $p \sim k_0$) распадная неустойчивость второго порядка. Наоборот при $\lambda<0$ запрещена распадная неустойчивость первого порядка и разрешена неустойчивость второго порядка. Рассмотрим величину $q_{эфф}$

$$q_{эфф} = q\left(1 + \frac{6\lambda k_0^2}{1-\cos\theta - 3\lambda k_0^2\cos\theta}\right)$$

Заметим, что $L = \frac{S}{k_0}\sin^2\theta + 6Sk_0\lambda\cos^2\theta$

при $\lambda > 0$ величина $L q_{эфф}$ отрицательна почти для всех углов за исключением узкого конуса $\theta^2 \sim 6\lambda k_0^2$, для всех углов вне этого конуса возможна модуляционная неустойчивость с инкрементом $\gamma \sim q A^2$.

Вблизи углов $\theta^2 \sim 6\lambda k_0^2$ имеет место сносовая в системе волны неустойчивость, представляющая собой модификацию распадной неустойчивости первого порядка и переходящая в последнюю при $p/k_0 \sim \frac{qA^2}{\omega_k}(\lambda k_0^2)^{-1}$. Максимум инкремента сносовой неустойчивости лежит при $p \sim k_0$ и равен

$$\gamma_{расп} \sim (q A^2 \lambda k_0^2 S k_0)^{1/2}$$

Проведенное рассмотрение справедливо, если нелинейность меньше дисперсии $qA^2/\omega_k \ll \lambda k_0^2$, в этом случае инкремент распадной неустойчивости больше инкремента модуляционной.

В случае $\lambda < 0$ величина $L q_{эфф} > 0$ во всем диапазоне углов и модуляционная неустойчивость отсутствует. Обстоятельство вызвано совпадением нулей у функции $L(\theta)$ и $q_{эф}(\theta)$ имеет место лишь с точностью до членов $\lambda k_0^2 \left(\frac{p}{k}\right)^3$ при $\left(\frac{p}{k}\right)^3 \gg \frac{qA^2}{\omega\lambda k_0^2}$ "открывается" распадная неустойчивость второго порядка с максимальным инкрементом $\gamma \sim qA^2$; неустойчивость является, однако, сносовой. При учёте членов порядка λk_0^2 при $p/k \to 0$ будет, вообще говоря, существовать узкая по углам область модуляционной неустойчивости вблизи нулей функций $L(\theta)$ и $q_{эфф}(\theta)$. Характерный инкремент этой неустойчивости порядка $q'A^2$ и в λk_0^2 раз меньше инкремента неустойчивости при $p \sim k_0$. Случай $\lambda < 0$ осуществляется для ионнозвуковых волн и для волн на поверхности мелкой воды. Как мы убедились, главной неустойчивостью для этих волн является распадная неустойчивость второго порядка с характерным инкрементом $\frac{\gamma}{\omega_k} \sim \left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{1}{(k r_D)^2}$ для ионнозвуковых волн и $\frac{\gamma}{\omega} \sim \left(\frac{\delta h}{h_0}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{h}\right)^2$ – для волн на поверхности мелкой воды.

Заметим еще, что при $\theta = 0$ величина

$$L q = \frac{9}{8}(g+1)^2 s k_0 > 0$$

Поэтому независимо от знака λ в одномерной задаче неустойчивость волн в средах со слабой дисперсией отсутствует.

В заключение авторы выражают благодарность В.Г.Харитонову за помощь при вычислениях и Р.З.Сагдееву за обсуждение.

Л и т е р а т у р а

1. J.R.Shen Phys.Letters 20, 378, 1966.
2. Т.Ф.Волков. В сб.Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Изд.АН СССР.
3. В.Ц.Гурович. В.И.Карпман. ЖЭТФ 56, 1951, 1969.
4. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767, 1964.
5. A.A.Vedenov, A.V.Gordeev, L.I.Rudakov. Plasma Physics 9, 719, 1967
6. В.Е.Захаров. ЖЭТФ 53, 1735, 1967.
7. В.И.Таланов. Изв.Вузов (радиофизика) 7, 564, 1964.
8. В.Е.Захаров. ЖЭТФ 51, 1107, 1966.
9. А.Л.Берхоер, В.Е.Захаров. ЖЭТФ 58, 903, 1970.
10. В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев. ЖТФ, 32, 1291, 1962.

Литература

1. Y.R.Shen Phys.Letters 20, 378, 1966
2. Г.Ф.Волков. В сб.Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, Изд.АН СССР,
3. В.Л.Гуревич, Ю.И.Карпман, ЖЭТФ 56, 1951, 1969.
4. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков, ДАН СССР, 159, 767, 1964.
5. A.A.Vedenov, A.V.Gordeev, L.I.Rudakov, Plasma Physics 9, 719, 1967.
6. В.Е.Захаров, ЖЭТФ 53, 1735, 1967.
7. В.И.Таланов, Изв.Вузов (радиофизика) 7, 564, 1964.
8. В.Е.Захаров, ЖЭТФ 51, 1107, 1966.
9. А.Л.Берхоер, В.Е.Захаров, ЖЭТФ 58, 903, 1970.
10. В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291, 1962.

Ответственный за выпуск А.М.Рубенчик
Подписано к печати 5.10.70
Усл. 1 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 83 . ПРЕПРИНТ.
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.