

19

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**И Я Ф 78 - 70**

**Ф.М.Израйлев . В.А.Таюрский**

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧНОСТИ  
ВОЛН В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ  
АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

**Новосибирск**

**1970**

Ф.М.Израйлев, В.А.Таюрский

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧНОСТИ ВОЛН В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛ- ЛЯТОРОВ

### А Н Н О Т А Ц И Я

В работе приводятся результаты экспериментов по проверке существования и положения границы стохастичности для цепочки связанных нелинейных осцилляторов, гипотеза о которой содержится в [3]. Исследуются цепочки с фиксированными концами и с периодическими граничными условиями. Для цепочки с фиксированными концами выполнены эксперименты с большим числом частиц (до 500) и большой точностью. Эти эксперименты подтвердили предсказание работы [3]. Для периодической цепочки установлено существование границы стохастичности. Её величина сравнивается со значением для цепочки с закрепленными концами.

Настоящая работа является продолжением численных экспериментов с цепочкой нелинейных осцилляторов /1/. Работа связана с исследованием проблемы Ферми, Паста, Улама (ФПУ). Как известно, ФПУ в начале 50х годов проводили численные эксперименты с целью выяснить механизм появления статистических законов в цепочке связанных ангармонических осцилляторов /2/. В то время считалось, что нелинейность, как бы мала она ни была, приводит к разрушению инвариантов, связанных с нелинейными модами и к появлению статистических законов в нелинейной системе со многими степенями свободы. Вопреки ожиданиям, эксперименты показали наличие широкой области устойчивого движения с квази-периодическим характером. Объяснение неудачи ФПУ содержится в /3/. В этой работе приводится гипотеза о наличии у системы, исследовавшейся ФПУ, границы стохастичности. Под стохастичностью понимается наличие у системы наименее типичных статистических свойств: эргодичности, перемешивания, положительной энтропии по Колмогорову /4/. Неудача ФПУ объясняется малостью нелинейности и номера возбуждаемых мод, так что система в их экспериментах находилась в устойчивой области. Численные эксперименты /1/, проведенные после работы /3/, подтвердили гипотезу о границе стохастичности. Они показали, более того, что экспериментальное значение для критической величины нелинейности совпадает, по порядку величины, со значением, даваемым критерием. Эти эксперименты проводились с небольшим числом частиц (31) на машине М 20. Скорости счета этой машины было недостаточно для достижения высокой точности экспериментов, так как временной шаг, используемый в алгоритме нельзя было сделать достаточно малым. Ошибки счета, контролировавшиеся по изменению полной энергии  $\Delta E/E$ , достигали 3%. Скорости счета М 20 не хватало и для проверки критерия стохастичности для систем с большим числом нелинейных осцилляторов.

В настоящей работе приводятся результаты исследований нелинейной цепочки с кубической, как и в экспериментах /1/, нелинейностью. Эксперименты проведены на ЭВМ БЭСМ-6. Высокая скорость счета этой машины позволила проводить эксперименты с большим, чем в /1/ числом частиц (до 499). К тому же точность счета в экспериментах была весьма высокой ( $3 \cdot 10^{-2}\%$  -  $5 \cdot 10^{-1}\%$ ).

В первой части работы рассматривается цепочка с нулевыми граничными условиями (НГУ). Для этой цепочки, для целого ряда начальных данных, предпринято экспериментальное определение границы стохастичности и сравнение этой границы с аналитическими оценками.

Во второй части работы изучается цепочка с периодически граничными условиями (ПГУ, замкнутая цепочка). Переход к периодической цепочке даёт возможность исследовать появление стохастичности в случае бегущих по кольцу волн. Эволюция этих волн может быть описана (при малых нелинейностях) уравнением Кортевега-де Вриза (КдВ), исследование которого представляет самостоятельный интерес (см., например, /5, 9, 10/). Для такой цепочки также исследуется возникновение стохастичности при увеличении начального возмущения, выбранного в виде бегущих в одну сторону волн, определяется величина критического возмущения. Проводится сравнение с экспериментами для цепочки с фиксированными концами, в которой могут возникать лишь стоячие волны.

## ЧАСТЬ 1

### Исследование цепочки с нулевыми граничными условиями

#### § 1. Граница стохастичности

Так же, как в экспериментах ФПУ и /1/ рассматривается цепочка нелинейных осцилляторов, связанных между собой. Изучается влияние на движение малой кубической нелинейной добавки.

Уравнения движения осцилляторов цепочки имеют следующий вид:

$$m \ddot{x}_\ell = K(x_{\ell+1} - 2x_\ell + x_{\ell-1}) + \beta K [(x_{\ell+1} - x_\ell)^3 - (x_\ell - x_{\ell-1})^3] \quad \ell = 1, \dots, N-1 \quad (1.1.1)$$

$x_0 = x_N = 0$  ;  $x_\ell$  - отклонение  $\ell$ -го осциллятора от положения равновесия,  $m$  - масса осциллятора,  $K$  - коэффициент упругости,  $\beta$  - параметр нелинейной связи. В дальнейшем в этой части  $K = m = 1$ .

Решая численно систему (1.1.1) ФПУ установили наличие квазипериодичности в широкой области параметра нелинейной связи  $\beta$ . Устойчивость нелинейных мод, открытая Ферми у цепочки, исследовалась Забуским. Он показал, что имеющаяся для малых нелинейностей квазипериодичность может быть изучена с помощью перехода от дискретной цепочки к континууму и, исследуя это направление, открыл устойчивые нелинейные образования, названные им солитонами /5/ (подробнее во II-ой главе). Тогда изучал цепочку со специального вида взаимодействием /6/, содержащим гармоническую силу, и обнаружил аналитическое решение, которое содержит солитоны. С другой стороны, еще раньше, Норфкот и Потс /7/ показали, что в случае потенциала твердых сфер, являющегося сильно нелинейным потенциалом, добавленного к гармоническому потенциалу, в одномерной системе частиц наступает равномерное распределение. Таким образом, должна существовать некоторая граница по величине не-

линейности между видами движения для цепочки осцилляторов с ангармонической добавкой к потенциалу. Также при достаточно большом  $\beta$  у системы должны всё-таки появиться статистические свойства.

Теоретические оценки, дающие границу стохастичности для исследуемой цепочки с кубической нелинейностью, содержатся в [3]. Эта граница, определённая по порядку величины, имеет следующий вид:

$$3\beta\kappa \frac{E}{N-1} \sim \begin{cases} \frac{2\sqrt{m}}{\kappa} & \kappa \ll N \\ 10 \frac{m}{N^2} \left(\frac{\kappa}{N}\right)^2 & N-\kappa \ll N \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{низкие моды} \\ \text{высокие моды} \end{array} \quad (1.1.2)$$

Здесь  $m$  - число возбужденных мод,  $\kappa$  - средний номер возбужденных мод,  $E$  - полная энергия системы,  $N-1$  - число степеней свободы цепочки. Эта граница определяет порог возникновения стохастического обмена энергии возбужденных мод с другими гармониками.

## § 2. Методы обработки результатов счета

Считавшаяся на машине система уравнений имеет вид:

$$\ddot{x}_e = (x_{e+1} - 2x_e + x_{e-1}) + \beta [(x_{e+1} - x_e)^3 - (x_e - x_{e-1})^3] \\ e = 1, \dots, N-1; \quad x_N = x_0 = 0 \quad (1.2.1)$$

Полная энергия системы сохраняется и равна:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \dot{x}_k^2 + (x_k - x_{k-1})^2 + \frac{\beta}{2} (x_k - x_{k-1})^4 \right\} \quad (1.2.2)$$

Так как оценки (1.1.2) выражены в терминах нормальных мод, в процессе счёта периодически производилось преобразование от  $x_e$  к нормальным модам, определяемым для цепочки с фиксированными концами по формулам:

$$Q_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{e=1}^{N-1} x_e(t) \sin \frac{\pi k e}{N}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.2.3)$$

Энергия мод вычислялась по формулам:

$$E_k = \frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 Q_k^2}{2} \quad (1.2.4)$$

где  $\omega_k$  - линейная частота  $k$ -ой моды:

$$\omega_k = 2 \sin \frac{\pi k}{2N} \quad (1.2.5)$$

Счёт производился с помощью алгоритма, описанного в [1]. Преимущество использованного алгоритма, например, по сравнению с методом Рунге-Кутты состоит в том, что при одинаковой точности число операций значительно сокращено. Это приводит к уменьшению времени счёта. В качестве начальных условий задавались амплитуды одной или нескольких мод  $Q_k$ ;  $\dot{Q}_k$  в начальный момент брались равными нулю. Точность счёта контролировалась по изменению полной энергии, определяемой с помощью (1.2.2). При обработке результатов счёта в различных случаях использовались различные методы, позволяющие как качественно определить характер движения системы (стохастический или квазипериодический), так и количественно найти границу между этими двумя областями движения.

1. Визуальная оценка по кривым зависимости одной или нескольких мод от времени и по виду спектра в различные моменты времени. Этот метод позволяет достаточно чётко определить характер движения системы, когда возбуждена одна, или несколько низких мод. Такие моды ( $k \ll N$ ) могут непосредственно обмениваться энергией с гармониками  $3k$ ,  $5k$ ,  $7k$  и т.д. Когда возбуждена достаточно высокая мода  $k \sim N$ , её энергия долгое время практически остаётся неизменной. Для системы с возбужденной модой  $k \sim N$ , лежащей в области стохастичности, лишь через некоторое время (так называемый

"индукционный период" /8/) начинается обмен энергией  $K$ -ой гармонике с остальными.

2. Локальная неустойчивость движения означает, что почти любые, близкие вначале траектории движения системы расходятся экспоненциально быстро в процессе движения. Локальная неустойчивость характерна для движения с перемешиванием. Для использования явления локальной неустойчивости применялось свойство пространственной симметрии системы осцилляторов. Согласно этому свойству, чётные (или нечётные) моды не могут появиться в процессе эволюции, если они не были возбуждены вначале. Задавая в начальный момент четную, или нечётную моду (или группу мод одинаковой чётности) и маленькую ( $\delta E \sim 10^{-14} - 10^{-17} E$ ) "затравочную" моду противоположной чётности, можно следить за ростом энергии затравочной моды. Величина этой энергии характеризует расстояние между траекторией с начальными условиями без "затравки" и траекторией с возмущенными начальными условиями, нарушающими симметрию. Но такая экономия счёта безвозможна лишь для случая, когда вначале задаются моды одинаковой чётности. Если задаются моды смешанной чётности, необходимо вместо одного просчитывать два варианта с несколько измененными начальными условиями. Скорость роста локальной неустойчивости используется для количественного определения границы стохастичности.

3. Корреляции вычислялись для наблюдения за наступлением движения с перемешиванием. Наступление такого движения характеризуется убыванием корреляций. Вычислялись следующие временные корреляции:

$$\rho(x_j, T) = \frac{x_j(t) x_j(t-T)}{\overline{x_j^2(t)}} \quad (1.2.6)$$

$$\rho(E_k, T) = \frac{E_k(t) E_k(t-T) - \overline{E_k(t)}^2}{\overline{E_k^2} - \overline{E_k}^2} \quad (1.2.7)$$

Черта означает усреднение по времени через равные промежутки  $\Delta t$ ,  $T$  - сдвиг по времени. Усреднение производилось с самого начала счёта. Если взять для примера гауссовский спектр колебаний:



$$f(\omega) = \frac{e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (1.2.8)$$

то в двух предельных случаях можно получить: для быстрых колебаний  $\omega_0 \gg \sigma$

$$\rho(\tau) = e^{-\left(\frac{\sigma\tau}{2}\right)^2} \cos \omega_0 \tau \quad (1.2.9)$$

Корреляционная функция представляет собой затухающие колебания. Для колебаний с  $\omega_0 \ll \sigma$  получаем:

$$\rho(\tau) = e^{-\left(\frac{\sigma\tau}{2}\right)^2} \quad (1.2.10)$$

### § 3. Основные результаты

В этом параграфе мы детально проиллюстрируем применение указанных в § 2 качественных и количественных методов определения стохастичности и приведём результаты экспериментов с исследовавшейся цепочкой с большим числом частиц.

Прежде чем производить счёт с какими-либо начальными условиями, с помощью критерия (1.1.2) определялось критическое значение коэффициента нелинейности. Начальными условиями для всех групп экспериментов (в таблице 1:1-7) брались в каждой группе одинаковые  $Q$  и  $K$ , менялись лишь значения  $\beta$ . Далее подробно рассматривается 1-ая группа экспериментов и приводятся результаты, относящиеся к ней ( $N = 200$ ;  $K = 9, 10$ ;  $E_9^0 = 10^{-16}$ ;  $E_{10}^0 = 11.1$ ;  $E_{\text{полн}}^0 = 12$ ). Для этих начальных условий аналитическая оценка (1.1.2) даёт для  $\beta_{\text{кр}}$  значение  $\sim 1.1$ , если подставить в критерий начальные условия. Наступление стохастичности может быть прослежено по поведению энергии возбужденной моды. На рис.1 представлено поведение  $E_{10}$  для  $\beta = 0.1$ . Наблюдается квазипериодическое изменение  $E_{10}$  со временем; система находится в устойчивой области. Рис.2 даёт  $E_{10}$  для  $\beta = 0.5$  на интервале времени, содержащем один квазипериод. Система находится в переходной зоне, так как последовательные максимумы и минимумы пони-

жаются. На рис.3 изображено временное поведение  $E_{10}$  для  $\beta = 2$ . Энергия возбужденной моды переходит в другие гармоники. Таким образом между  $\beta = 0.1$  и  $\beta = 2$  лежит значение критической величины  $\beta$ .

Для количественного определения величины  $\beta_{кр}$  использовалась скорость роста затравочной моды ( $E_g$ , в нашем примере). Когда система находится в области  $\beta > \beta_{кр}$ , то наблюдается локальная неустойчивость движения, проявляющаяся в экспоненциальном росте энергии затравочной моды. На рис.4 представлено несколько кривых, демонстрирующих это явление. Для больших  $\beta$  наблюдается более крутой ход кривых энергии затравочных мод. Фактически, как показывается в /1/, за локальной неустойчивостью можно наблюдать и по другим модам, одинаковой четности с затравочной. Наклон кривых роста одинаков для них всех.

Ожидающаяся зависимость коэффициента наклона этих кривых от  $\beta$  /4/:

$$1/\tau = \Omega \ln \beta / \beta_{кр} \quad (1.3.1)$$

Здесь  $\Omega$  порядка расстояния между частотами резонансных сил. Эта зависимость применялась в /1/ для экспериментального определения  $\beta_{кр}$ . Но в /1/ приводится и другая возможная зависимость скорости роста  $1/\tau$  от  $\beta$ :

$$1/\tau = \Omega (\beta / \beta_{кр})^{4/3} \quad (1.3.2)$$

Причем значительные ошибки экспериментов в /1/ не позволили выбрать между этими видами зависимости. Результаты настоящих экспериментов показывают, что, по-видимому, справедлива логарифмическая формула зависимости  $1/\tau$  от  $\beta$ . Последней мы и пользовались для определения  $\beta_{кр}$ . Рис.5 даёт точки, получаемые для значений  $1/\tau$  при различных  $\beta$ . Шкала по  $\beta$  - логарифмическая. Величина  $1/\tau$  не определяется точно, так как кривые роста энергии затравки (рис.4) имеют переменный наклон. На рис.5, поэтому, наклоны представлены в виде вертикальных отрезков, соответствующих пределам, в которых изменяется  $1/\tau$ . Прямая, проведенная через эти точки, позволяет определить  $\beta_{кр}$  по пересечению с осью  $1/\tau = 0$ . На рис.5 приведены 2 предельные прямые. Получаемое значение  $\beta_{кр}$

$t = 2000$  указывает, что установилась стохастическое движение; энергия равномерно распределялась почти по всем модам (рис.11). Исключения представляют лишь самые низшие моды, для которых выполнение критерия стохастичности затруднено (до  $K \sim 20$ ).

Во время экспериментов /11/ было замечено, что рост энергии затравочной моды начинается после некоторого промежутка времени (в области  $\beta > \beta_{кр}$ ). В настоящих экспериментах мы также наблюдали это явление (например, на рис.4). Этот временной интервал мы назвали "начальным периодом". При заданной энергии затравки, величина его оказалась тем меньшей, чем больше  $\beta$  превышало критическое значение. При  $\beta \rightarrow \beta_{кр}$  "начальный период" стремится к бесконечности ( $\beta = 0.5$  на рис.4). Поэтому, строя зависимость  $1/\tau_{нач}$  от  $\beta$ , можно получить величину  $\beta_{кр}$  по пересечению  $1/\tau_{нач}$  с осью  $1/\tau_{нач} = 0$ . Однако величина "начального периода" зависит, вообще говоря, от величины затравки. Тем не менее, экстраполированные кривые пересекаются почти в одном месте на прямой  $1/\tau_{нач} = 0$ . На рис.12 показано определение  $\beta_{кр}$  с помощью этого метода. Представлены две последовательности точек при двух различных энергиях затравки. Проведенные через них кривые позволяют определить  $\beta_{кр}$ . Получаемое значение равно примерно 0.4 (полученное с помощью локальной неустойчивости 0.4 - 0.6). Определенно сказать, с чем связано существование этого начального периода, мы не можем. Этот период наблюдался во всех экспериментах, как с низкими, так и с высокими модами. Для выяснения природы "начального периода" необходимы дополнительные тщательные эксперименты при самых различных начальных условиях. Мы обращаем на него внимание главным образом потому, что установление величины "начального периода" требует минимального машинного времени и методом "начального периода" можно, по-видимому, пользоваться для определения  $\beta_{кр}$ . Все результаты сведены в таблицу 1, где  $N - 1$  - число степеней свободы,  $K$  - номера возбуждаемых мод, основной и затравочный;  $E$  - энергия этих мод и полная энергия системы вначале.  $\beta_{кр}$  определяется с помощью критерия стохастичности: 1) по начальным модам; 2) с использованием экспериментального спектра распада вблизи границы стохастичности. В таблице приведены теоретические значения наклона кривых  $1/\tau (v \sim \beta)$  ( $\Omega = 1/N$ ) и эксперименталь-

ные значения этих наклонов. Все  $\beta_{кр}$  экспериментальные определялись с помощью логарифмической зависимости  $1/\tau = \Omega \ln \beta/\beta_{кр}$ . Во всех 6 экспериментах с большим числом частиц проводилась проверка критерия стохастичности для низких мод. Метод определения  $\beta_{кр}$  даёт погрешность  $\sim 20\%$ . Представленные в таблице значения наклонов кривых  $1/\tau (\ln \beta)$  вполне удовлетворительно согласуются с ожидаемыми для низких мод. Однако в последнем эксперименте с высокими модами теоретический и экспериментальный наклоны значительно отличаются. В то же время точки  $1/\tau$  хорошо ложатся на логарифмическую кривую. Несомненно нужны еще эксперименты, чтобы уточнить зависимость  $1/\tau$  от  $\beta$  и надежно определить величину коэффициента  $\Omega$ .

В процессе численного решения системы уравнений (1.2.1) возникают ошибки счёта. Они появляются по двум причинам: 1) из-за округлений в процессе счета; 2) из-за неточностей алгоритма. На рис.13 представлены графики роста энергии запрещенной моды для экспериментов 1-ой группы (только "затравка" равна нулю). Из-за ошибок округления наблюдается возбуждение запрещенных мод. Счёт выполнен с шагом  $h = 0.2$  - обычно использовавшихся в экспериментах и с шагом  $h = 0.1$ . На то, что возникновение запрещенных мод связано с ошибками округления, указывает близость, почти совпадение кривых энергии. В то же время  $\Delta E/E$  при переходе от  $h = 0.2$  к  $h = 0.1$  уменьшалось с 0.15% до  $10^{-3}\%$ . Все это означает, что несимметрия не может быть устранена дальнейшим уменьшением шага. Проводились проверочные эксперименты с уменьшением шага для счёта с затравкой. Кривые роста энергии затравки совпадали почти точно для  $h = 0.2$  и  $h = 0.1$ . Для малых  $\beta$  (например,  $\beta = 0.5$ , рис.4) совсем не наблюдается роста добавки. Это указывает на то, что ошибки округления не могут, по-видимому, сами вызвать стохастичности.

Подводя итоги этой главы, мы можем сказать, что представленные экспериментальные данные подтверждают гипотезу о границе стохастичности и оценки её положения, содержащиеся в /3/. Результаты экспериментов показывают, что, по-видимому, справедлива логарифмическая зависимость  $1/\tau$  от  $\beta$ . Предлагается метод "начального периода" для определения  $\beta_{кр}$ , наиболее удобный с точки зрения использования, т.к. требует минимального машинного времени.

В заключение добавим, что для счёта была составлена программа на "Альгibre". Счёт занимал для  $N = 200$  в среднем по 4 минуты на каждый вариант (до  $t = 1000$  в естественных единицах). Для  $N = 300$  (до  $t = 1000$ ) - 6 минут машинного времени. Для  $N = 500$  (до  $t = 1000$ ) - 10 минут машинного времени.

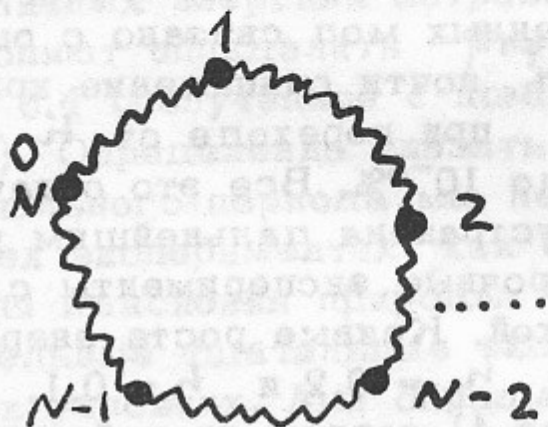
## ЧАСТЬ II

### Исследование стохастичности в замкнутой цепочке

#### § 1. Вводные замечания

В этой части работы изучается замкнутая цепочка связанных ангармонических осцилляторов с нелинейной кубической добавкой в силе. Проводится сравнение между поведением волн в цепочке с периодическими граничными условиями и в цепочке с нулевыми граничными условиями.

Изучаемая цепочка имеет вид:



Уравнение движения осцилляторов цепочки следующее:

$$m\ddot{x}_e = K(x_{e+1} - 2x_e + x_{e-1}) + \beta K[(x_{e+1} - x_e)^3 - (x_e - x_{e-1})^3]$$

$$e = 0, \dots, N-1; \quad x_0 = x_N; \quad x_1 = x_{N+1} \quad (\text{II.1.1})$$

Для длинноволновых возмущений можно перейти к непрерывному представлению. Заменяем  $X_i(t) \rightarrow X(z, t) = X(z, t)$  ;

$h = L/N$  - расстояние между частицами

$$X_{i \pm 1} = \left[ X \pm h X_z + \frac{h^2}{2} X_{zz} \pm \frac{h^3}{6} X_{zzz} + \frac{h^4}{24} X_{zzzz} \right] + o(h^5) \quad (\text{II.1.2})$$

Подставим разложение (II.1.2) в (II.1.1), получим:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{m} h^2 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \left[ 1 + 3\beta h^2 \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\kappa h^4}{12m} \frac{\partial^4 X}{\partial z^4} + o(h^6) \quad (\text{II.1.3})$$

В уравнении положим  $\frac{\kappa h^2}{m} = c_0^2 = 1$  - квадрат скор. звука. Получим, окончательно, нелинейное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \left[ 1 + 3\beta h^2 \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 X}{\partial z^4} \quad (\text{II.1.4})$$

Перейдём теперь в систему, движущуюся со скоростью звука и изменим временной масштаб:

$$\begin{aligned} z' &= z - t & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} \\ t' &= \frac{3\beta h^2}{2} t & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \frac{3\beta h^2}{2} - \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

получим уравнение:

$$\left( \frac{3\beta h^2}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t'^2} - 3\beta h^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t' \partial z'} + \frac{\partial^2 X}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z'^2} \left( 1 + 3\beta h^2 \left( \frac{\partial X}{\partial z'} \right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 x}{\partial z'^4}$$

(II.1.6)

Заменяя  $\frac{\partial x}{\partial z'} = u$ , и отбрасывая член  $\sim \beta^2$  приходим к обобщённому уравнению КдВ (Кортевега-де Вриза)

$$u_{t'} + u_{z'} u^2 + \gamma^2 u_{z' z' z'} = 0; \quad \gamma^2 = \frac{1}{36\beta} \quad (\text{II.1.7})$$

Уравнение справедливо при  $\beta \rightarrow 0$ . Уравнения типа КдВ получаются во многих физических задачах. Они интенсивно изучались в последние годы. В частности, в [10] был получен фундаментальный результат о том, что эволюция начального возмущения сводится в основном к распаду на сумму асимптотически не взаимодействующих солитонов на бесконечном отрезке. Численное исследование КдВ, предпринятое Забуским [5,9], показало, что для периодических граничных условий начальное возмущение распадается на невзаимодействующие солитоны, которые затем снова собираются вместе, восстанавливая начальное состояние.

$K_{\max}$  легко оценивается из ур-я (II.1.7)

$$K_{\max} \sim L \left( \frac{4}{\gamma} \right) \sim \sqrt{\frac{\beta E}{N}} N; \quad \text{нас интересует } K_{\max}$$

вблизи границы стохастичности:  $\frac{\beta E}{N} \sim \frac{1}{K}$ ;  $K_{\max} \sim \frac{N}{\sqrt{K}}$ . Вместе с КдВ Забуски исследовал, при соответствующих начальных условиях, цепочку (II.1.1) (в случае малых нелинейностей). Оказалось, что траектории максимумов солитонов и траектории соответствующих им в цепочке максимумов конечных разностей хорошо совпадают. В этом состоит объяснение квазипериодичности в проблеме ФПУ с помощью концепции солитонов.

Когда  $\beta = 0$ , стоячая волна в цепочке может быть представлена в виде суммы двух бегущих навстречу друг другу волн. Введение нелинейности нарушает суперпозицию, однако, когда  $\beta$  достаточно мало, суперпозиция приближенно восполняется. Поведение бегущих волн сходно с поведением стоячих с уд-

военной амплитудой. Забуски задавал начальные условия для периодической цепочки в виде бегущей в линейном приближении волны низкой частоты. Начальный профиль для КдВ, получающегося перемещением в систему отсчёта, связанную с бегущей низкочастотной волной, имел вид  $\sim \cos Kz$

Пусть по цепочке с периодическими граничными условиями (ПГУ) бегущую в линейном приближении волну. Возникает вопрос об устойчивости этой волны. Для периодической цепочки с бегущей в нач. момент волной должен, по-видимому, существовать критерий стохастичности типа (1.1.2). Для уравнения КдВ написать такой критерий невозможно, так как  $\beta$ , входящее в коэффициент перед дисперсионным членом и во время, не меняет характера нелинейной волны, меняет только её параметры.

Таким образом, для малых нелинейностей картина в общих чертах должна быть такова: волны в цепочке с ПГУ ведут себя подобно волнам половинной амплитуды в цепочке с ПГУ, бегущим в одну сторону. А те, в свою очередь, объясняются солитонной концепцией. Для больших нелинейностей необходимо исследовать каждое звено перехода. В особенности интересна область пересечения, если таковая имеется, в которой можно написать уравнение КдВ, но соответствующая ему цепочка осцилляторов находится за границей стохастичности (подробнее в § 3).

## § 2. Методы обработки результатов

Система уравнений (II.1.1) считалась с помощью той же самой вычислительной схемы, что и система для цепочки с фиксированными концами. Было положено  $K = m = 1$ . При исследовании задачи производился переход к нормальным модам, определенным по формулам:

$$A_m = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{e=0}^{N-1} x_e \sin \frac{2\pi e m}{N}$$

$$B_m = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{e=0}^{N-1} x_e \cos \frac{2\pi e m}{N} \quad m = 0, \dots, N/2 \quad (\text{II.2.1})$$



Начальные условия задавались в нормальных модах  $A_k, \dot{A}_k, B_k, \dot{B}_k$ . Для бегущей волны в качестве начальных условий брались  $A_k = A, B_k = 0, \dot{A}_k = 0, \dot{B}_k = -\omega_k A$

$$\omega_k = 2 \sin \frac{j_k \pi}{N}, \text{ частота } k \text{ -ой гармоники} \quad (\text{II.2.2})$$

Энергия  $k$  -ой гармоники вычислялась по формуле:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ \dot{A}_k^2 + \dot{B}_k^2 + \omega_k^2 (A_k^2 + B_k^2) \right] \quad (\text{II.2.3})$$

Уменьшение числа частот гармоник для периодической цепочки связано с периодичностью, запрещающей полуволны. Однако для цепочки с ПГУ возможны бегущие в разные стороны волны, отвечающие одной частоте  $\omega_k$ .

Обратное преобразование  $x_e$  производилось при вводе по формулам:

$$x_e = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=1}^{N/2-1} \left\{ A_m \sin \frac{2\pi \ell_m}{N} + B_m \cos \frac{2\pi \ell_m}{N} \right\} \quad (\text{II.2.4})$$

$N/2$  и нулевая мода не возбуждалась.

Для наблюдения стохастичности в цепочке с ПГУ применялись те же самые методы, что и для цепочки с НГУ. К ним был добавлен метод "коэффициента стоячести". При исследовании цепочки с ПГУ было установлено наличие критического значения нелинейности, после которого наблюдался резкий переход энергии возбужденной гармоники в другие. Было сделано предположение, что в процессе эволюции бегущей волны образуется встречная волна, которая складываясь с начальной даёт стоячую волну (наше внимание на эту возможность обратил Б.В.Чириков). Чтобы измерять "стоячесть" использовался "коэффициент стоячести", определенный как отношение энергии, заключенной в стоячей волне  $k$  -ой гармоники к полной энергии этой гармоники. Энергия стоячей волны и полная энергия определялись по линейным формулам. Коэффициент стоячести по  $k$  -ой гармоники имеет вид:

$$\mathcal{E}_k = \text{sign}(\dot{A}_k B_k - \dot{B}_k A_k) \frac{\sqrt{E_k^2 - (\dot{A}_k B_k - \dot{B}_k A_k)^2 \omega_k^2}}{E_k}$$

(II.2.5)

$\text{Sign}(A_k B_k - B_k A_k)$  указывает на направление рас-  
пространения бегущей  $K$ -ой волны.

Коэффициент стоячности по отдельным гармоникам удобен, когда возбуждена одна мода. Если возбуждена группа мод, или все моды, удобно пользоваться "полным коэффициентом стояче-  
сти":

$$\chi = \frac{\sum |x_k| E_k}{\sum E_k} \quad (\text{II.2.6})$$

который есть отношение полной энергии стоячих волн к полной энергии мод.

### § 3. Результаты экспериментов

Как уже говорилось, для бегущих волн с большой длиной волны может быть написано КдВ (при малых нелинейностях). Для исследования устойчивости бегущих волн, была проведена серия экспериментов с  $N = 32$ ,  $K = 1$ . На рис.14 сопоставля-  
ются графики энергии возбужденной моды и коэффициента стоя-  
чести 1-ой моды. Изменение  $E_1$  носит ярко выраженный ква-  
зипериодический характер, это указывает, что система находится  
в устойчивой области. Соответствующая 1-ой гармонике величи-  
на коэффициента стоячности не превышает 5%;  $\beta = 1$ , меньше  
критического (на то, что оно существует, указывает следующий  
график). На рис.15 также показаны энергия первой моды, ко-  
эффициенты стоячности: полный и для  $K = 1$  (пунктиром). Энер-  
гия первой моды, совершив два колебания, переходит в другие.  
Из нижнего графика видно, что в момент перехода резко под-  
скакивает коэффициент стоячности, сначала по 1-ой моде, а за-  
тем и общий. Коэффициент стоячности 1-ой моды ведёт себя  
нерегулярно как для малых значений, так и для значений, близ-  
ких к 1. Полный коэффициент стоячности изменяется более плав-  
но. В этом, и ряде других экспериментов, мы установили сле-  
дующие свойства коэффициента стоячности: 1) коэффициент стоя-  
чести остаётся малым для волны или группы волн в устойчивой  
области. Величина полного коэффициента стоячности не превыша-  
ет при этом значения 0.2 - 0.3. 2) Для движения в стохастиче-  
ской области полный коэффициент стоячности принимает значе-  
ние  $\sim 0.8$  и мало изменяется около него. Коэффициенты стоя-  
чести для гармоник изменяются сильнее, достигая порой значе-

ния 1. Направление распространения соответствующих бегущих волн бывает и положительным и отрицательным. 3) Переход энергии возбужденной моды в другие и скачок коэффициентов стоячности происходит одновременно (на рис.15 в момент  $t \sim 1200$ ). На рис.16 представлены коэффициенты стоячности и энергии для случая начального возбуждения 3-х мод. В момент времени  $t \sim 1400-2000$  происходит увеличение коэффициентов стоячности и переход энергий  $E_9$ ,  $E_{11}$ ,  $E_{13}$  в другие моды.

18.2. Качественное соответствие поведения волн в цепочке с ПГУ с поведением в цепочке с НГУ (квазипериодичность при  $\beta < \beta_{кр}$  стохастический обмен при  $\beta > \beta_{кр}$ , существование  $\beta_{кр}$ ) вызвало необходимость детально сравнить критические экспериментальные значения коэффициентов нелинейности для цепочки с ПГУ и для соответствующей цепочки с НГУ. Кроме того, оказалось, что критический параметр  $\beta_{кр}$  для периодической цепочки совпадает по порядку величины со значением, даваемым критерием для цепочки с НГУ (аналитического критерия для цепочки с ПГУ пока нет).

Детальное сравнение экспериментальных критических значений нелинейности проведено для  $N = 500$ ,  $K = 100, 101$ , ПГУ;  $K = 200, 202$ , НГУ. Переход к экспериментам с большим числом частиц объясняется тем, что уравнение КдВ получается из волнового уравнения (II.1.4) в пределе  $\beta h^2 \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \rightarrow 0$

Критерий стохастичности для низких мод:  $\beta_{кр} \frac{E}{N} \sim \frac{1}{K}$

Качественное подобие поведения волн при ПГУ и НГУ позволяет использовать этот критерий для периодической цепочки. Для непрерывной модели критерий стохастичности имеет вид:

$$\beta_{кр} h^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)_{max}^2 \sim \frac{1}{K} \quad (II.3.1)$$

Для больших  $k$  (но  $\ll N$ , при больших  $N$ ) мы можем надеяться, что выполнится условие перехода к КвД, но система будет в области стохастичности. Начальные условия в эксперименте выглядели таким образом:  $B_k = 0$ ,

$A_k = A$ ,  $A_k = 0$ ,  $B_k = -\omega_k A$  (ПГУ);  $Q_{2k} = \sqrt{2} A$ ;  $Q_k = 0$  (НГУ). Этим обеспечивалось равенство энергий гармоник в начальный момент времени. Определение критического значения производилось методом локальной неустойчивости. Получившиеся значения  $\beta_{кр}$  для цепочек с НГУ и ПГУ равны  $\sim 0,03$  и

0.006 соответственно. Эти и другие экспериментальные данные представлены в таблице.

| $N^{\circ}$ | $N$ | $K$                             | $E^{\circ}$                           | НГУ<br>$\beta_{кр}$ | ПГУ<br>$\beta_{кр}$ |
|-------------|-----|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------|---------------------|
| 1           | 500 | НГУ : 200<br>ПГУ : 100          | $E_{\text{норм}}^{\circ} \approx 700$ | 0.03                | 0.006               |
| 2           | 200 | НГУ : 18,20,22<br>ПГУ : 9,10,11 | $E_{\text{норм}}^{\circ} \approx 16$  | 0.4                 | 0.4                 |
| 3           | 32  | НГУ : 18<br>ПГУ : 9             | $E_{\text{норм}}^{\circ} \approx 39$  | 3.3                 | 2.2                 |

2-ой эксперимент поставлен с возбуждением 3-х близких мод. Дело в том, что возбуждение нескольких мод облегчает обмен энергией между модами. Но для определения  $\beta_{кр}$  для цепочки с ПГУ пришлось просчитывать вдвое больше вариантов, чем обычно, так как заправку пришлось помещать в амплитуды возбуждаемых мод. Большая погрешность этого способа не позволила выяснить какое из  $\beta_{кр}$  меньше. В 3-ем эксперименте производилось сравнение  $\beta_{кр}$  для высоких мод. Отличие между  $\beta_{кр}$  всего в 1.5 раза. Хотя в этих экспериментах и получен однозначный результат (а именно  $\beta_{кр}^{\text{НГУ}} > \beta_{кр}^{\text{ПГУ}}$ ) было бы целесообразно поставить еще несколько экспериментов по сравнению  $\beta_{кр}$  при самых различных начальных условиях.

На основании экспериментальных данных этой главы можно заключить, что для периодической цепочки с начальными условиями в виде бегущих синусоидальных волн существует критическое значение коэффициента нелинейности. Его величина совпадает по порядку величины со значением, которое дает критерий для цепочки с нулевыми граничными условиями. Детальное сравнение коэффициентов нелинейности для бегущих волн в периодической цепочке и волн той же энергии в цепочке с нулевыми граничными

условиями показало, что они величины одного порядка, первый лишь несколько меньше второго. При нелинейностях, больших критической в периодической цепочке с начальным возмущением в виде бегущих волн, появляются стоячие волны. Их появление связано со стохастичностью движения.

В заключение, считаем своим приятным долгом поблагодарить Б.В.Чирикова за многочисленные и содержательные дискуссии и Е.М.Крушкаль за большую помощь на начальном этапе работы.

## Л и т е р а т у р а

1. Ф.М.Израйлев, А.И.Хисамутдинов, Б.В.Чириков.  
Численные эксперименты с нелинейной цепочкой, препринт ИЯФ.
2. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. *Studies of Non-linear Problems I*. L-A -1940 -1950
3. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН, 166, 57 (1966).
4. Б.В.Чириков. Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Докторская диссертация, Новосибирск, 1969.
5. N. Zabusky, M. D. Kruskal. *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965)
6. M. Toda, *Journal of the Physical Society of Japan* vol 22, N2, p 431-436; vol 22, N3, p 501-506
7. R. S. Northcote and R. B. Potts. *Journal of Math. Phys.* 5 (1964) 383
8. Hirooka, Saito. *Journal of the Phys. Soc. of Japan* vol 26, N3 (1969), vol 27 No4 (1969)
9. N. Zabusky. *Proceedings of the international conference on statistical mechanics Kyoto, 1968*
10. Gardner, Green, Kruskal, Miura  
*Phys. Rev, Lett.* 1095 (1967)

Т а б л и ц а 1

| № | N   | K     | E°                         | r <sub>кр</sub> |                    | Наклон                    |                   | Погрешность                      |
|---|-----|-------|----------------------------|-----------------|--------------------|---------------------------|-------------------|----------------------------------|
|   |     |       |                            | по нач. модам   | теор. по рас. паду | теор.:                    | эксп.             |                                  |
| 1 | 200 | 9, 10 | $E_9^0 = 10^{-16}$         | 1.1             | 0.4                | 0.5 ± 0.1                 | $7 \cdot 10^{-3}$ | $\Delta E/E = 3 \cdot 10^{-2}\%$ |
|   |     |       | $E_{10}^0 = 11.1$          |                 |                    |                           |                   |                                  |
|   |     |       | $E_{полн}^0 = 12$          |                 |                    |                           |                   |                                  |
| 2 | 200 | 4, 5  | $E_4^0 = 2 \cdot 10^{-17}$ | 9.4             | 2.8                | 1.4 ± 0.2                 | $4 \cdot 10^{-3}$ | 0.1%                             |
|   |     |       | $E_5^0 = 2.8$              |                 |                    |                           |                   |                                  |
|   |     |       | $E_{полн}^0 = 3$           |                 |                    |                           |                   |                                  |
| 3 | 200 | 1, 2  | $E_1^0 = 10^{-18}$         | 130             | 28                 | 12 ± 2                    | $5 \cdot 10^{-3}$ | 0.5%                             |
|   |     |       | $E_2^0 = 0.45$             |                 |                    |                           |                   |                                  |
|   |     |       | $E_{полн}^0 = 0.5$         |                 |                    |                           |                   |                                  |
| 4 | 300 | 1, 2  | $E_1^0 = 0.18$             | 110             | 120 ± 20           | $3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$ | $6 \cdot 10^{-3}$ | 0.5%                             |
|   |     |       | $E_2^0 = 3 \cdot 10^{-18}$ |                 |                    |                           |                   |                                  |
|   |     |       | $E_{полн}^0 = 0.18$        |                 |                    |                           |                   |                                  |
| 5 | 500 | 8, 10 | $E_8^0 = 10^{-17}$         | 17              | 5                  | 12 ± 2                    | $2 \cdot 10^{-3}$ | $5 \cdot 10^{-2}\%$              |
|   |     |       | $E_{10}^0 = 1.8$           |                 |                    |                           |                   |                                  |
|   |     |       | $E_{полн}^0 = 1.8$         |                 |                    |                           |                   |                                  |

Продолжение таблицы № 1

| № | N   | K           | f°   | βкр                        |                            | βкр<br>эксп.                    | Наклон                       |         | Погреш-<br>ность |
|---|-----|-------------|--|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|------------------------------|---------|------------------|
|   |     |             |  | по нач.<br>модам           | теор.<br>по рас-<br>паду   |                                 | теор.                        | эксп.   |                  |
| 6 | 500 | 200,<br>202 | $E_{200}^{\circ} = 684$<br>$E_{202}^{\circ} = 10^{-14}$<br>$E_{\text{полн}}^{\circ} \approx 700$ | $2.10^{-3}$<br>$2.10^{-3}$ | $2.10^{-3}$<br>$2.10^{-3}$ | $0,03$<br>$+0,06$               | $2.10^{-3}$<br>$10^{-2}$     | $0,1\%$ |                  |
|   |     |             |  |                            |                            |                                 |                              |         |                  |
| 7 | 32  | 18,<br>20   | $E_{18}^{\circ} = 38$<br>$E_{20}^{\circ} = 2,5.10^{-16}$<br>$E_{\text{полн}}^{\circ} \approx 39$ | $8.10^{-4}$<br>$8.10^{-4}$ | $8.10^{-4}$<br>$8.10^{-4}$ | $3,3.10^{-3}$<br>$+0,3.10^{-3}$ | $3,1.10^{-2}$<br>$5.10^{-3}$ | $0,2\%$ |                  |
|   |     |             |  |                            |                            |                                 |                              |         |                  |

Рис.2. Давные рк.1, но β - 0,6; переходная область.



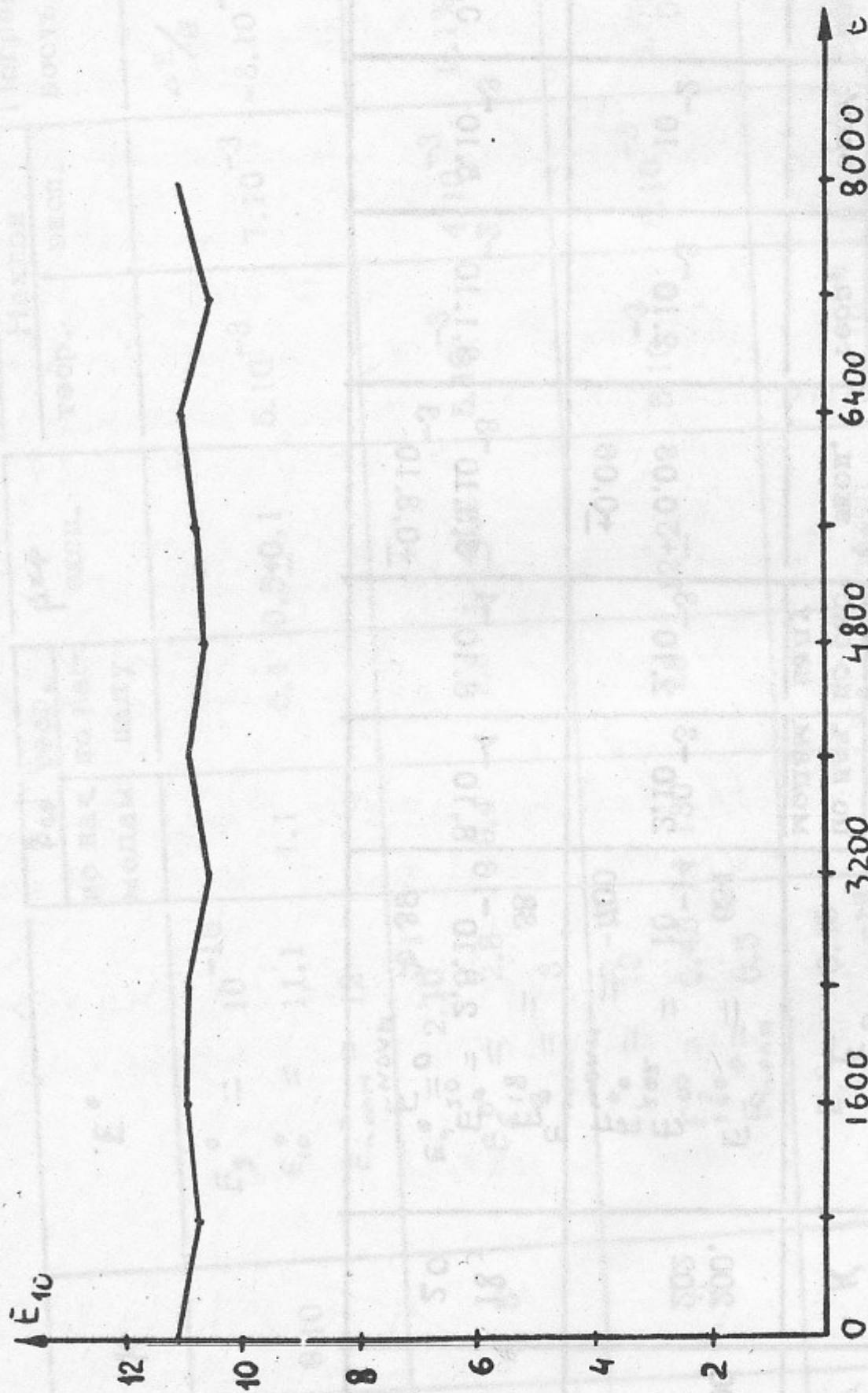


Рис.1.

$N = 200$  ;  $E_9^0 \approx 10^{-16}$  ;  $E_{10}^0 \approx 11.1$  ;  $E_{10}^0 \approx 12$  ;  $\beta = 0.1$ . Область квазипериодического движения. Для всех графиков рис.1 - рис.13  $M$  и  $E^0$  одни и те же, за исключением рис.7.

Рис. 1. Данные рис. 1, но  $\beta = 5$ ; сложносинусоидальная область.



Рис. 2. Данные рис. 1, но  $\beta = 0.5$ ; переходная область.

Благодаря переходу в область

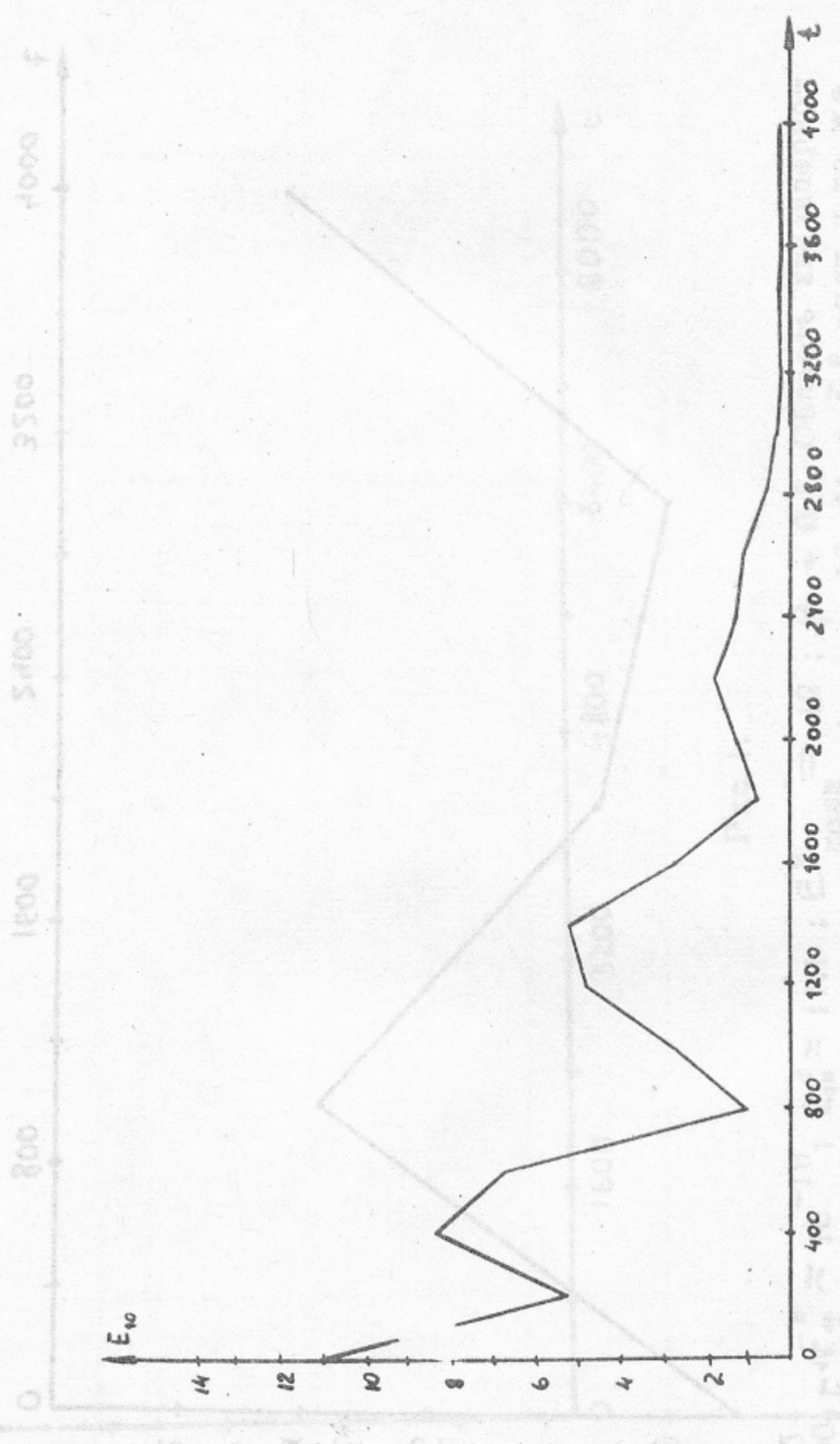


Рис.3. Данные рис.1, но  $\beta = 2$ ; стохастическая область.

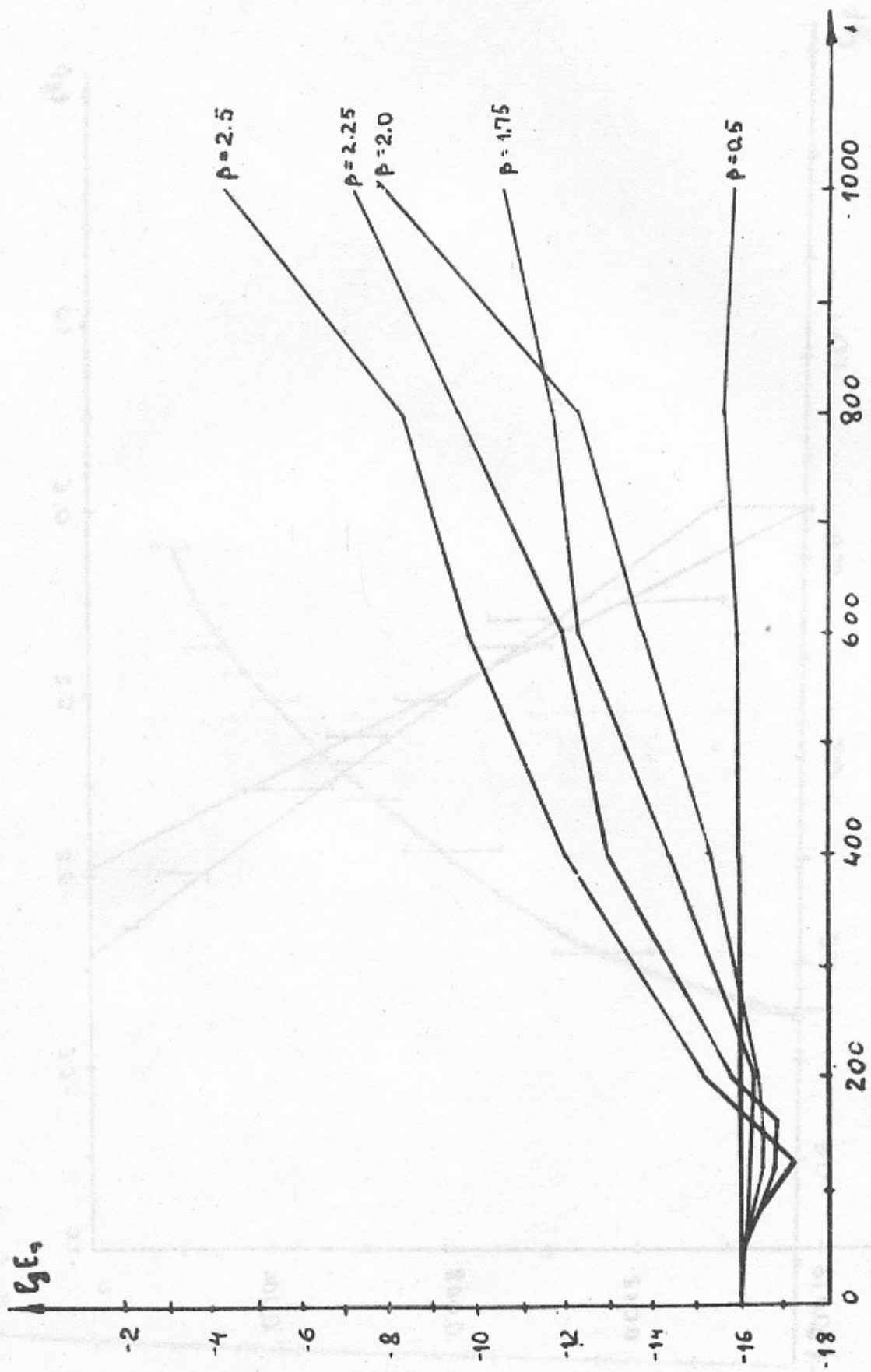


Рис.4. Локальная неустойчивость движения.  $\rho = 1.75; 2.0; 2.25; 2.5$ .

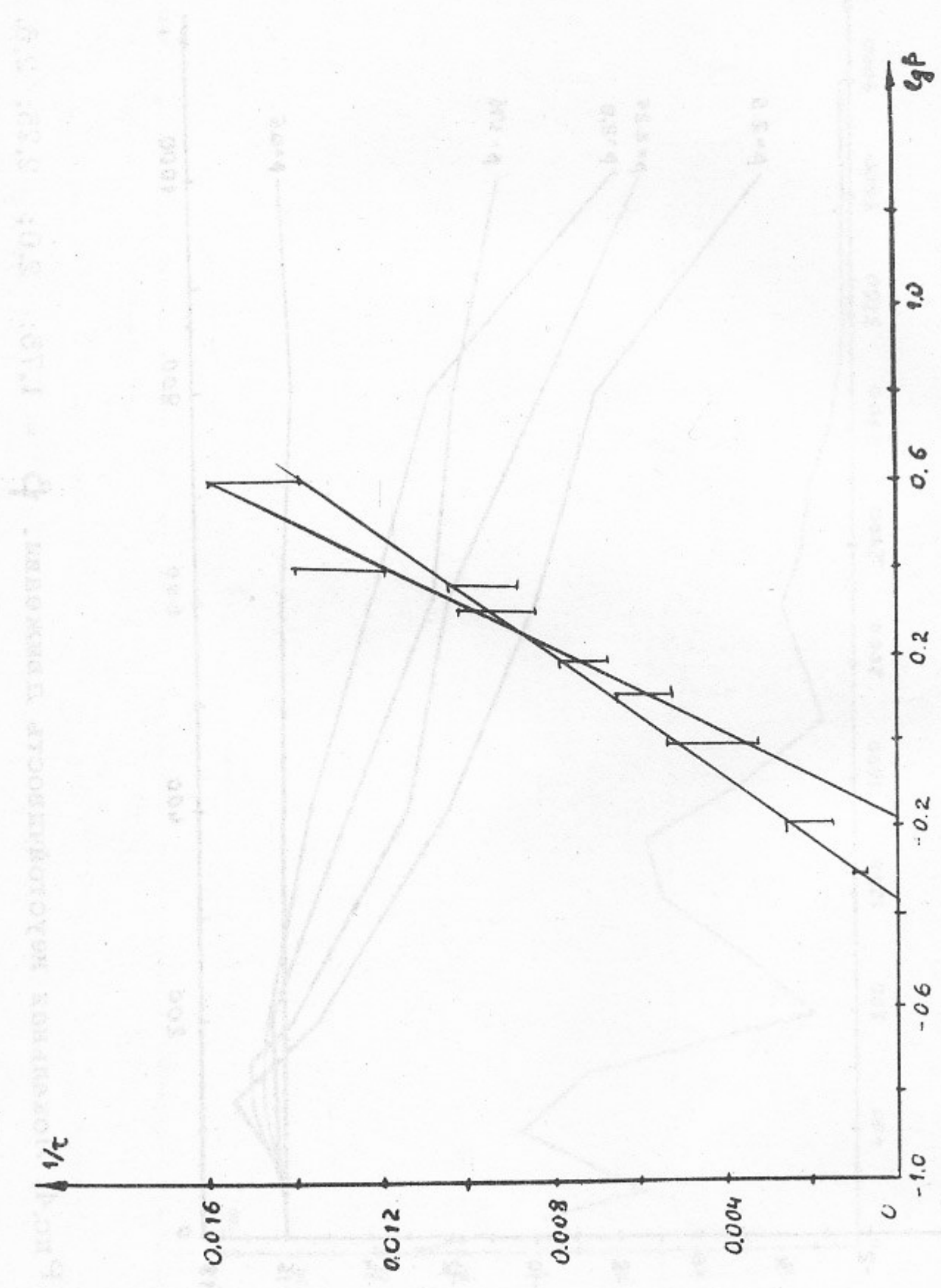


Рис.5. Определение  $\beta_{kr}$  по наклонам  $1/\epsilon$  с помощью логарифмической формулы (1.3.1).

ВРІСКИ МОМ  
 Лінійна залежність  $\ln \epsilon = 25 \ln b / \sqrt{b_0}$  для  
 номі  $\rightarrow 36^\circ$   
 $\ln \epsilon = 35^\circ E_0^{1/3} - 5^\circ E_0^{1/3} - 10^{-0.1} E_0$

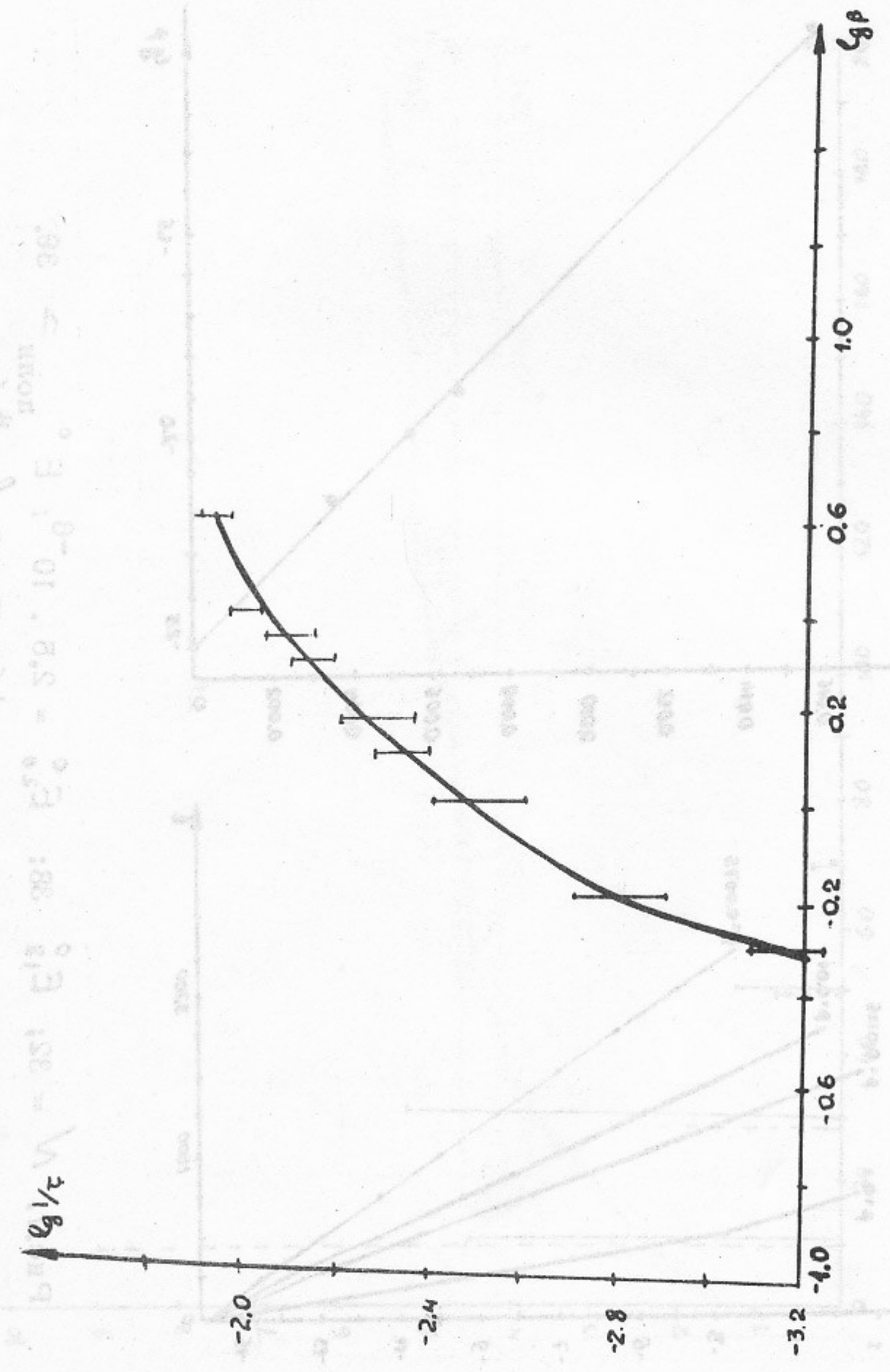


Рис. 6. Проверка зависимости  $\sqrt{G'}/\sqrt{G''} = \Omega_2 \left( \beta / \beta_{1cr} \right)^{1/3}$

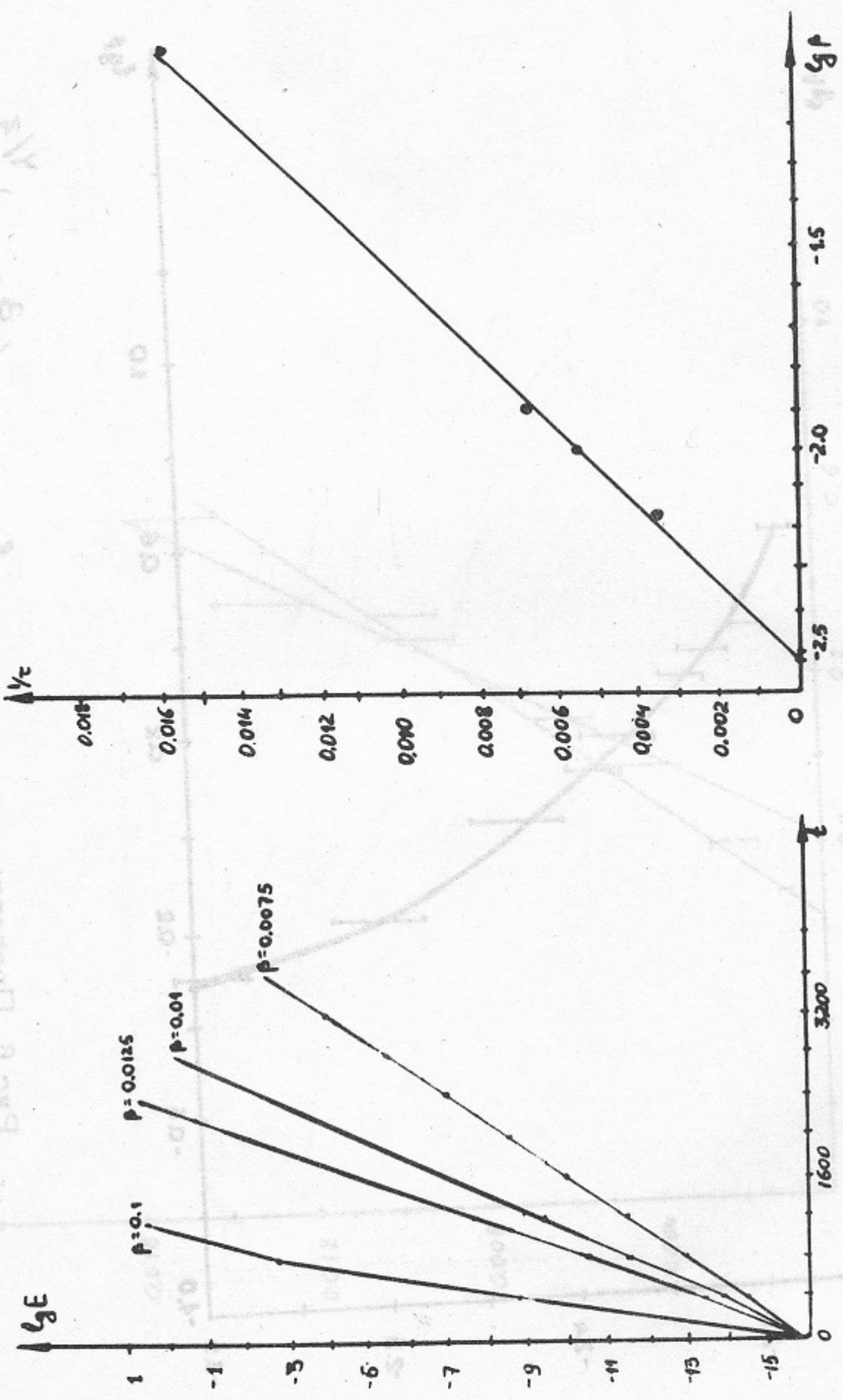


Рис.7.  $N = 32$ ;  $E_{18}^0 = 38$ ;  $E_{20}^0 = 2,5 \cdot 10^{-6}$ ;  $E^0_{\text{полн}} \approx 39$ .  
 Проверка зависимости  $\Delta \gamma z \approx \beta / \beta_{\text{кр}}$  для  
 ВЫСОКИХ МОД.

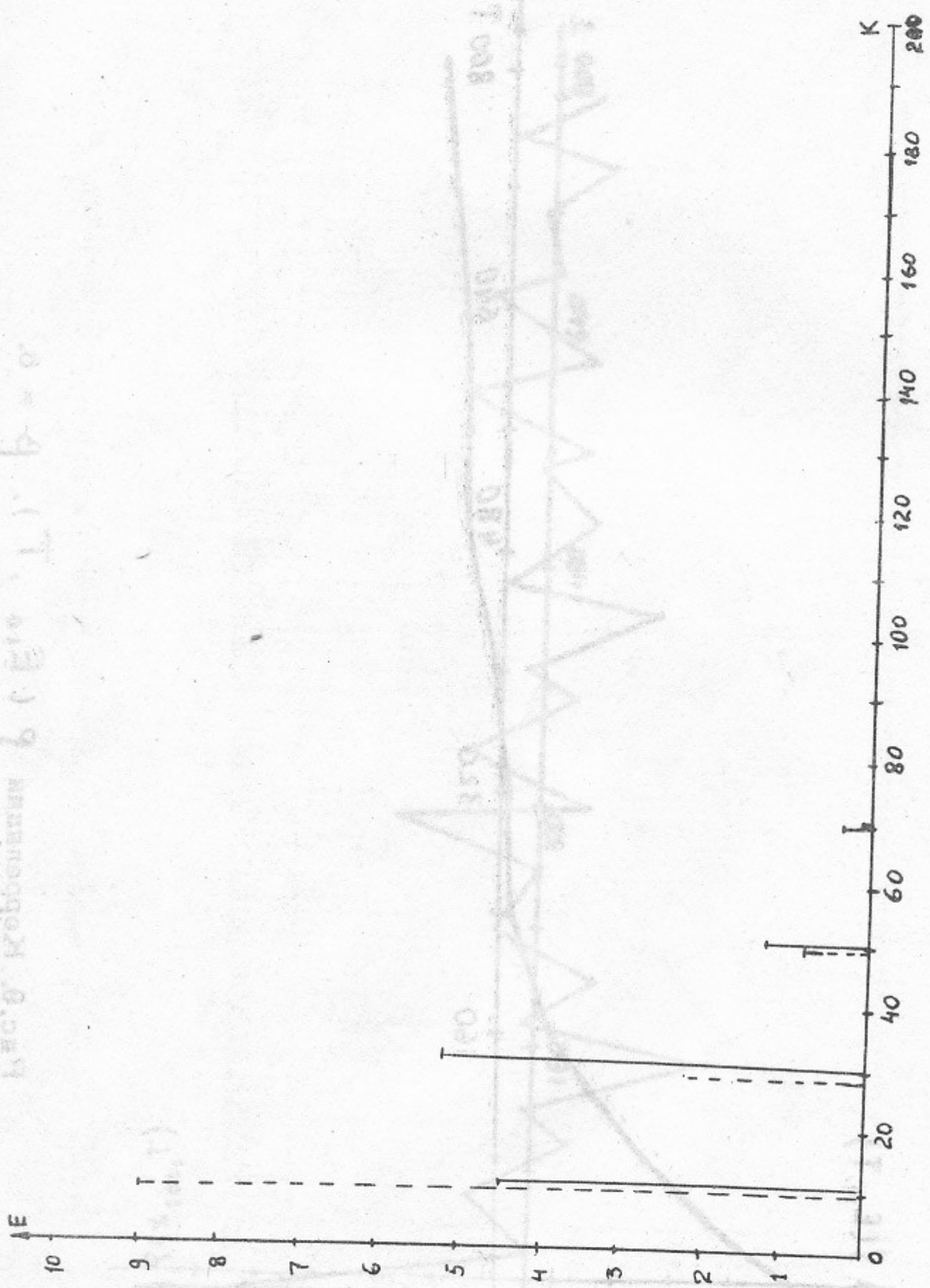


Рис.8. Спектр распада 10-й гармоники для  $\beta = 0,5$   
 —  $t = 1000$ , - - -  $t = 2000$



$E = 1000$   
 Числа в скобках 10-я степень для  $\beta = 0.9$

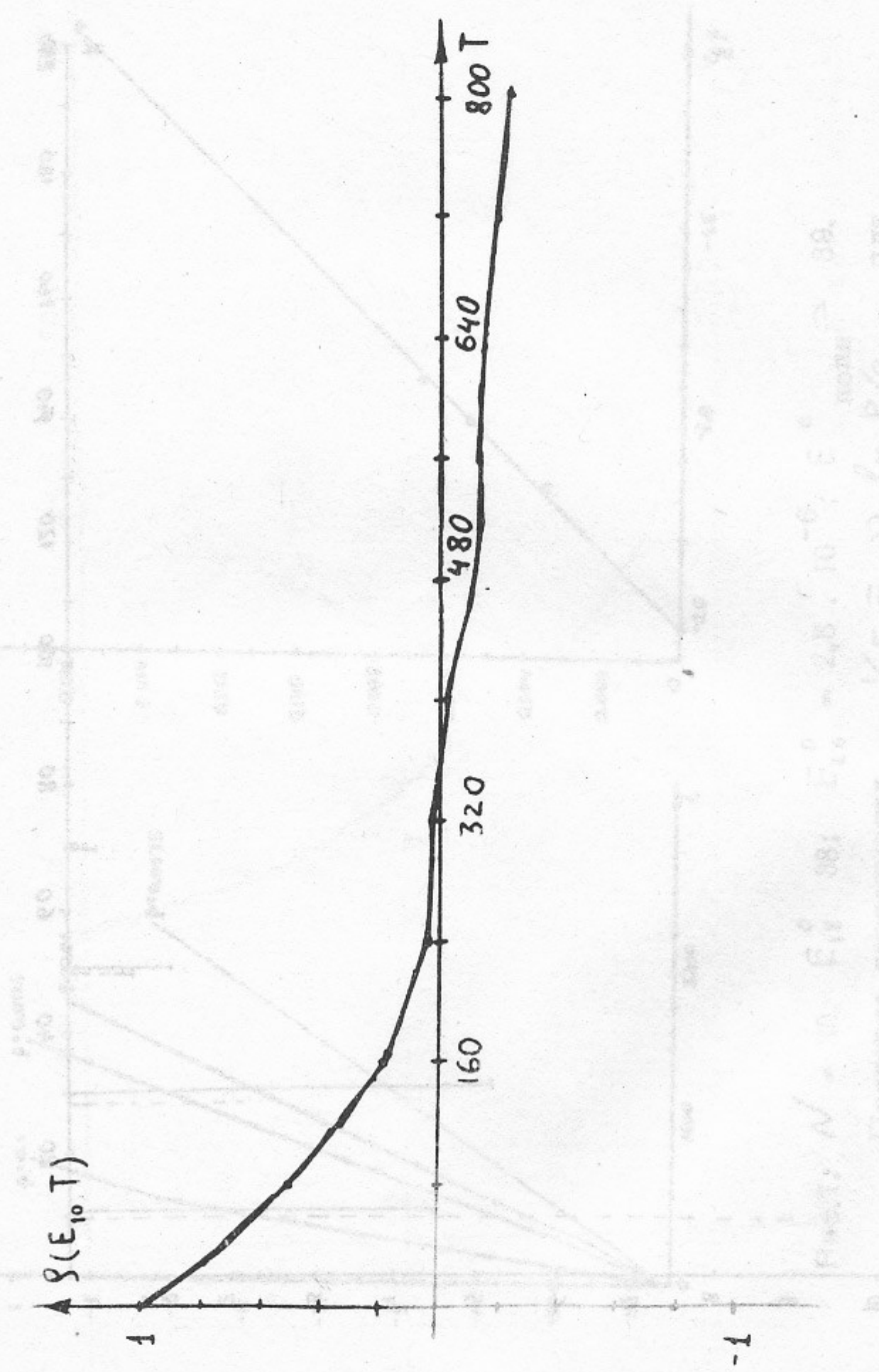


Рис.9. Корреляции  $\rho(E_{10}, T)$ ,  $\beta = 6$ .

Рис. 11. Сигнал шумли в осцилоскопическом.  $f = 5000$ ;  $\beta = 4$ .

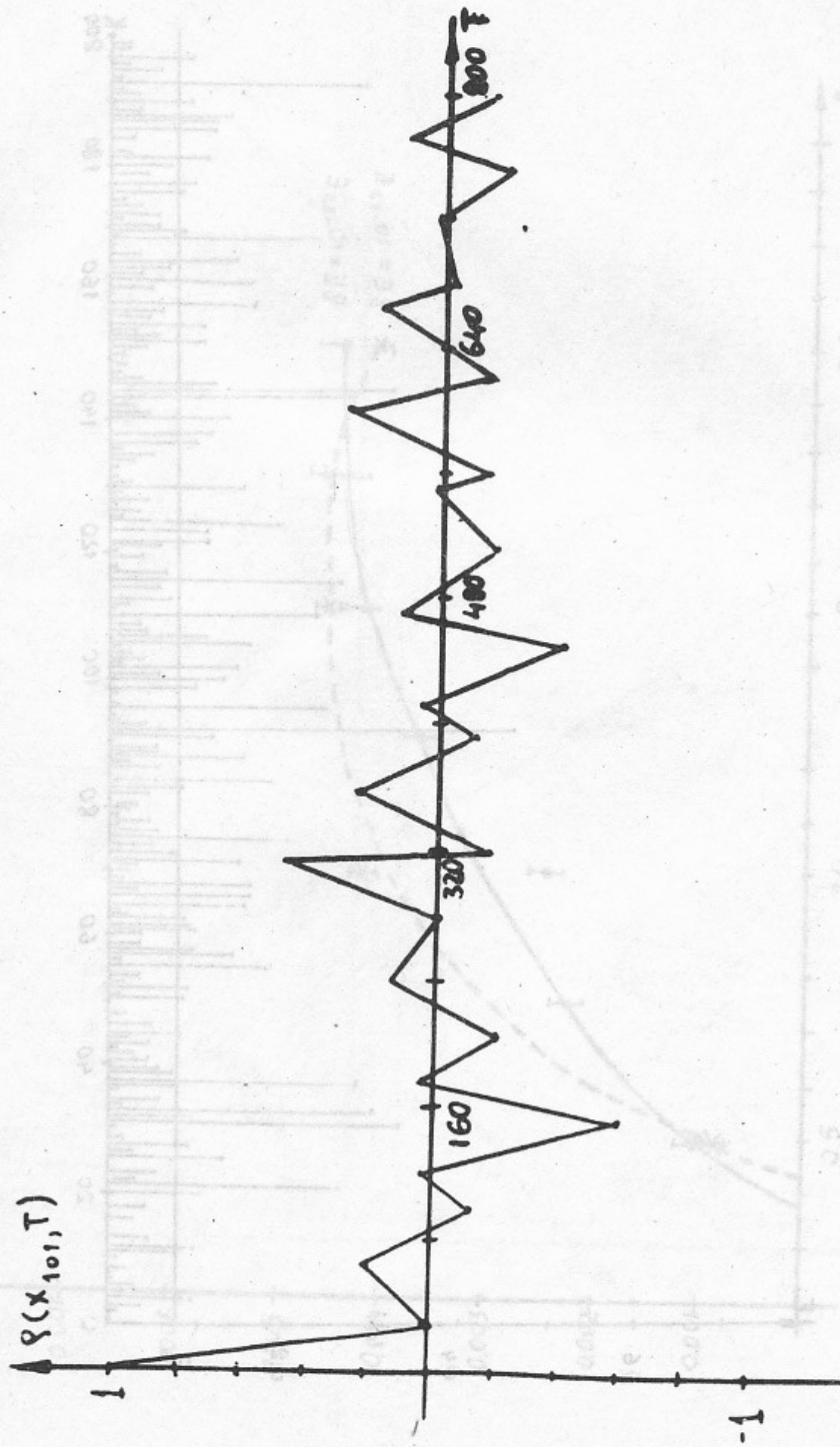


Рис. 12. Определение  $\beta$  с помощью осциллографа. Две кривые  $S(x_{101}, T)$ ,  $\beta = 6$ .

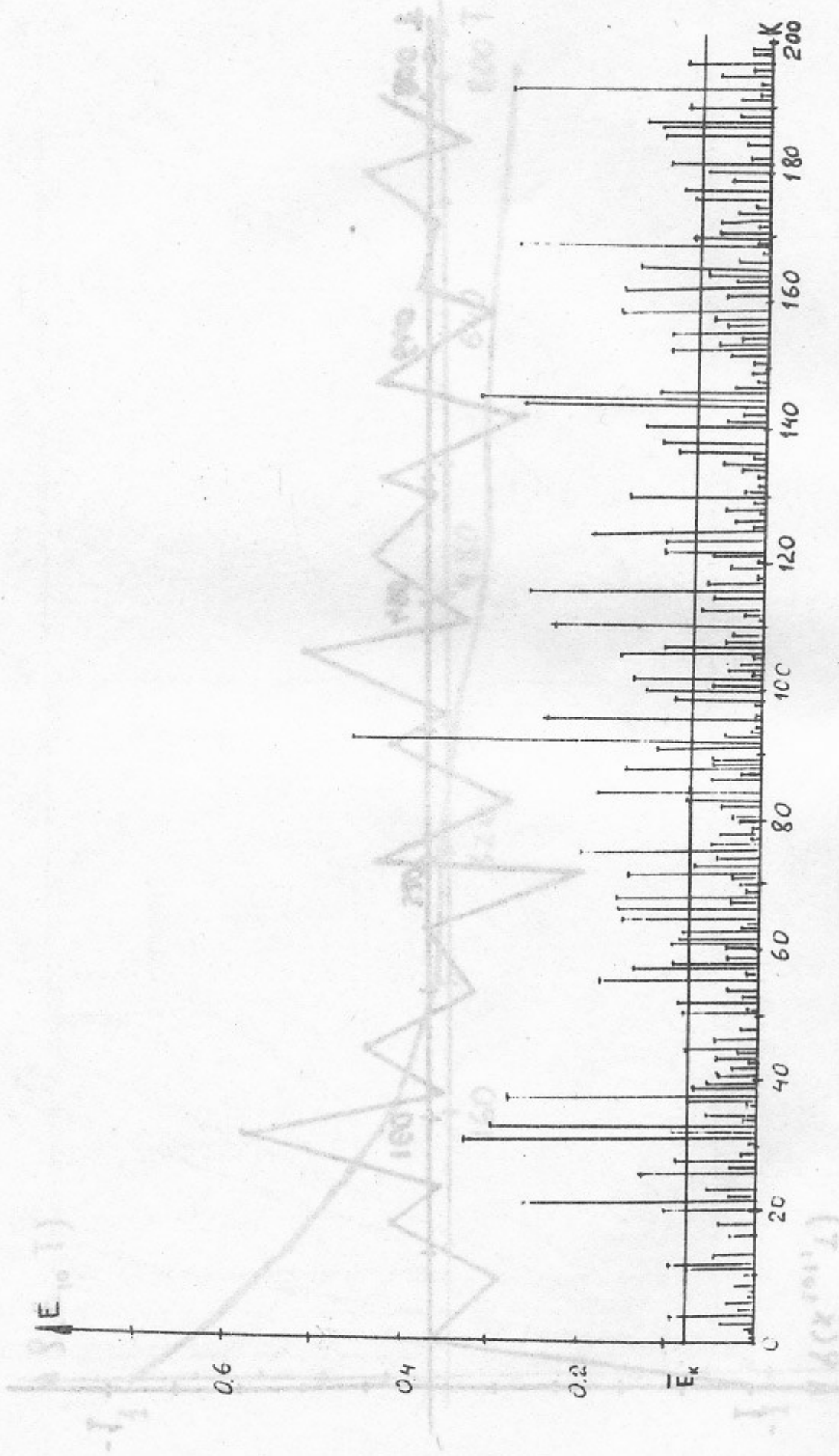


Рис.11. Спектр энергии в области стохастичности.  $t = 2000$ ;  $\beta = 4$ .

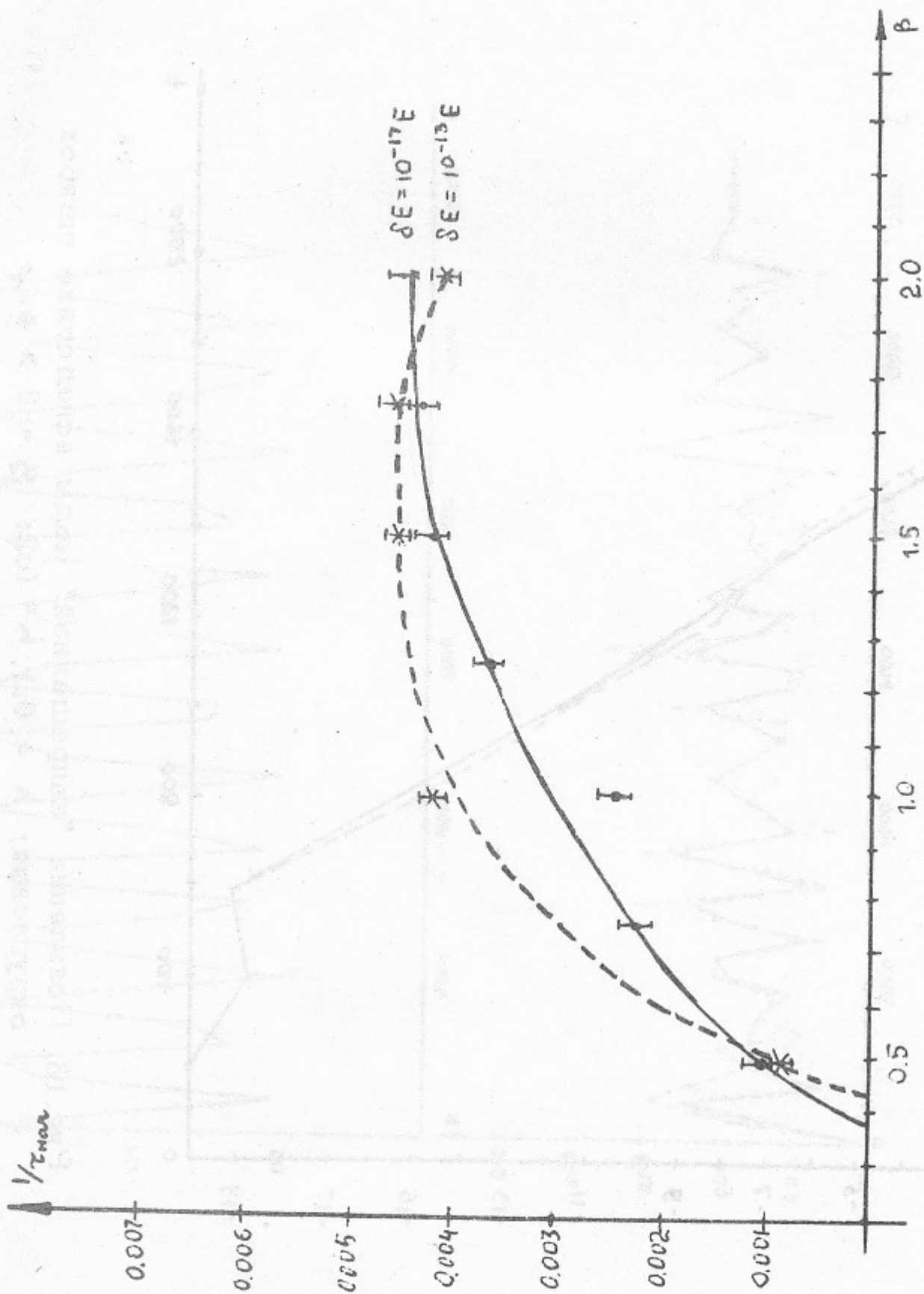


Рис.12. Определение  $\beta_0 \varphi$  с помощью начального периода. Две кривые соответствуют двум различным величинам заправки.

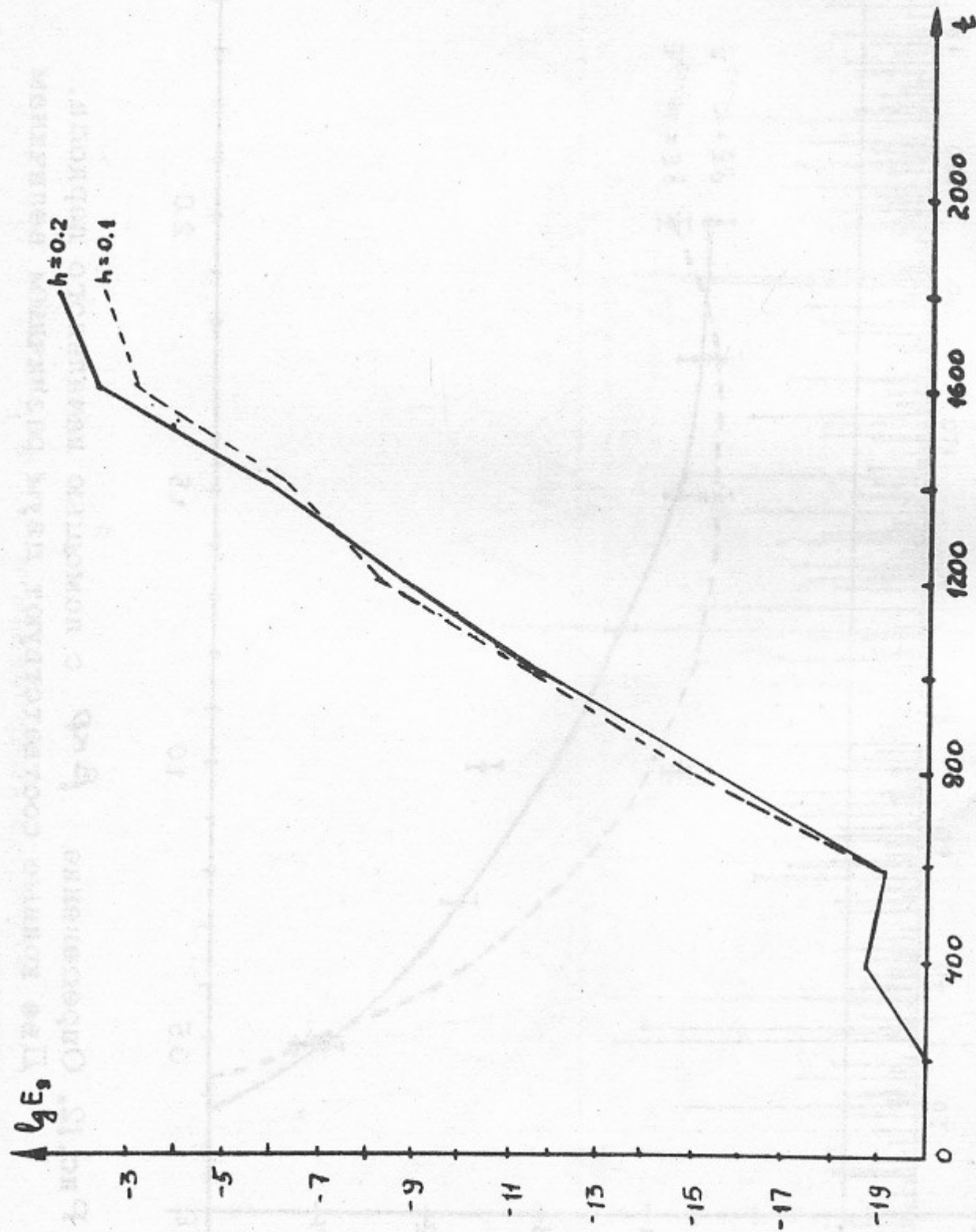


Рис.13. Появление "запрещенной" моды вследствие ошибок округления;  $h = 0.1$ ,  $h = 0.2$ ;  $\beta = 2 > \beta_{кр}$

$\Delta E/E = 0.15\%$  для  $h = 0.2$ ;  $\Delta E/E = 10^{-3}\%$  для  $h = 0.1$ .

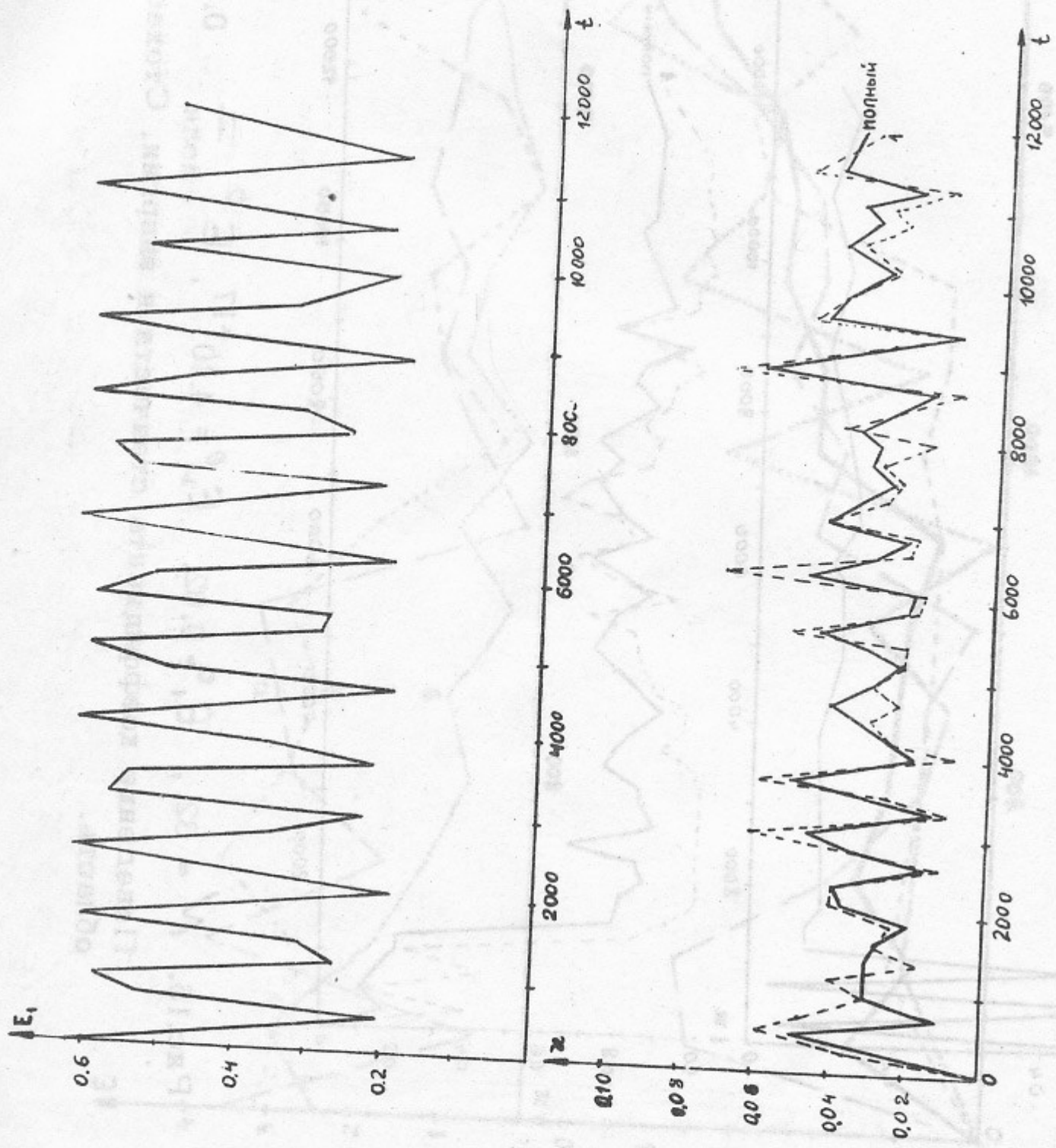


Рис. 14.  $N = 32$ .  $E_1^0 = 0.62$ ,  $E_2^0 \approx 4 \cdot 10^{-17}$ ,  $E^0 \approx 0.64$ ,  $\beta = 1$ .  
 Поведение коэффициентов стоячности и энергии. Устойчивая область.

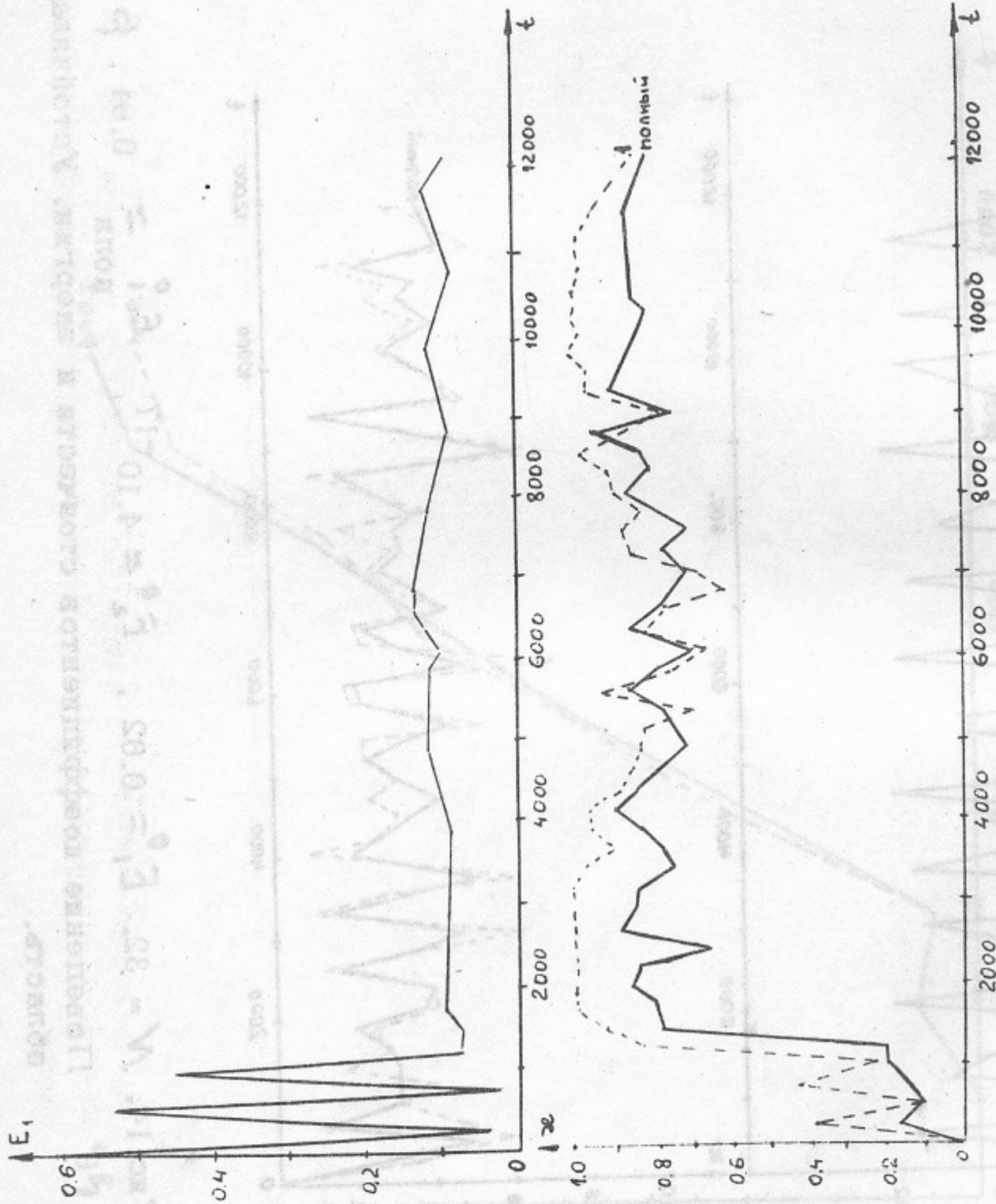


Рис.15.  $N = 32$ ,  $E_1^0 = 0.62$ ,  $E_2^0 = 4.10^{-17}$ ,  $E^0 =$  <sup>полн</sup>  $0.64$ ,  $\beta = 4$ .

Поведение коэффициента стоячности и энергии. Стохастическая область.

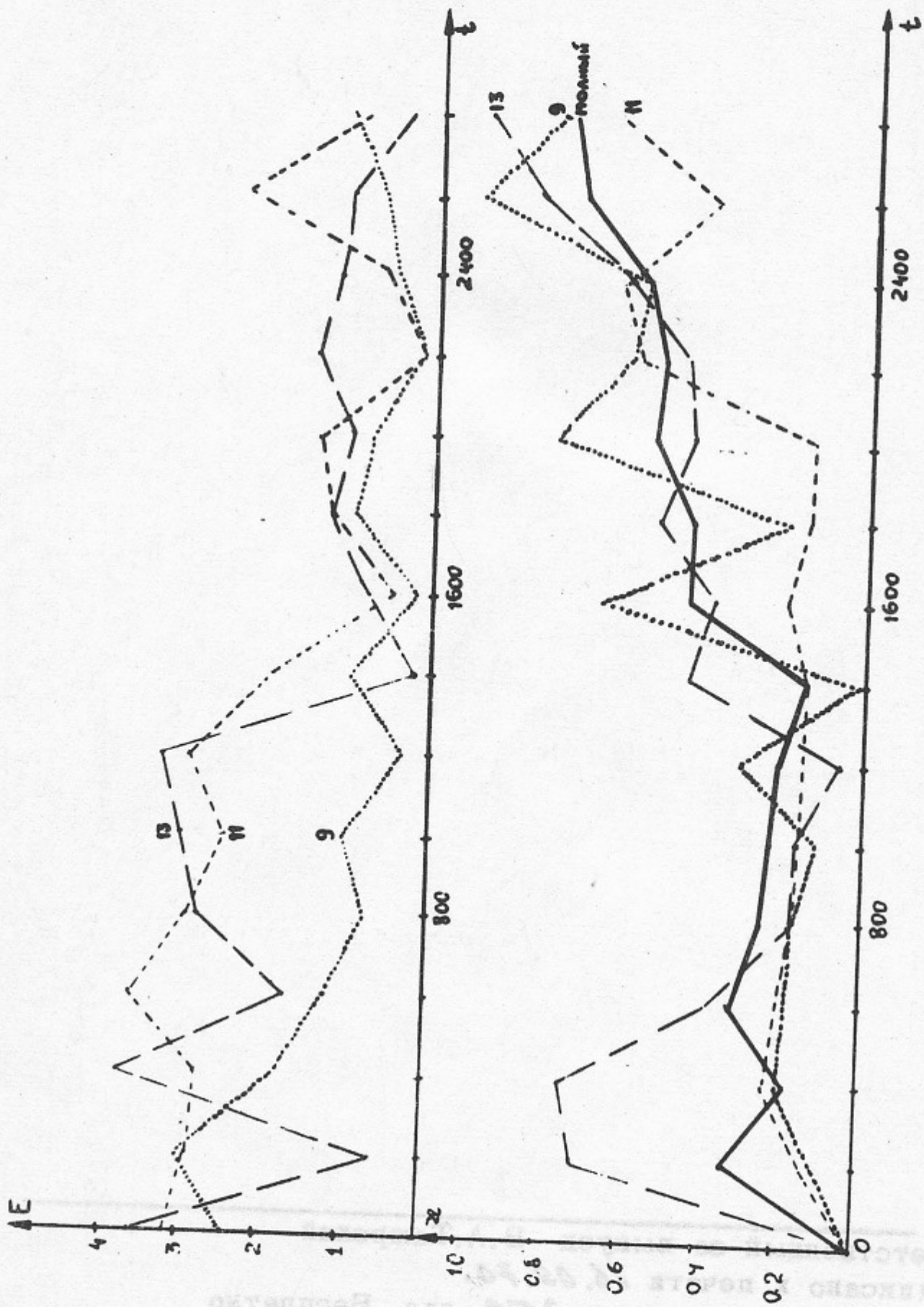


Рис.16.  $N = 32$ ,  $E_1^0 = 0.24$ ,  $E_9^0 = 0.31$ ,  $E_{13}^0 = 0.36$ ,  $\beta = 0.35$ . Поведение коэффициентов стоячей волны и энергии, в случае возбуждения трех мод.



под  
 коэффициентах сдвигов и амплитуд в случае возмущения двух  
 $\alpha = 35^\circ$   $E_0^2 = 0.54$   $E_0^2 = 0.21$   $E_0^2 = 0.12$   $E_0^2 = 0.02$



$E_0^2 = 0.54$   $E_0^2 = 0.21$   $E_0^2 = 0.12$   $E_0^2 = 0.02$   
 область

---

Ответственный за выпуск В.А.Таюрский  
 Подписано к печати 16.09.70.  
 Усл. 2 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно  
 Заказ № 78 . ПРЕПРИНТ

---

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР ,нв.