18

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 37 - 70

А.А.Бехтенев, В.И.Волосов, Р.А.Эллис*, Ю.Н.Юдин

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ПЛАЗМЕ МЕТОДОМ ДИАГРАММ РАССЕЯНИЯ

Новосибирск

1970

А.А.Бехтенев, В.И.Волосов, Р.А.Эллис[x)], Ю.Н.Юдин

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ПЛАЗМЕ МЕТОДОМ ДИАГРАММ РАССЕЯНИЯ

При изучении колебаний плазмы одним из методов диагностики, дающим информацию о структуре колебаний (длинах волн, частотах), а также о турбулентных потоках плазмы, являются корреляционные измерения. Эти измерения обычно сводятся к определению коэффициента корреляции R между двумя сигналами, поступающими из плазмы. В данной работе рассматривается простой метод определения коэффициента корреляции по диаграммам рассеяния двух сигналов.

Как известно, коэффициент корреляции между двумя случайными величинами x и y определяется выражением:

$$R = \frac{\langle (x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle}{\sqrt{\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle \langle (y-\langle y\rangle)^2\rangle}} \qquad (1)$$

Предположим, что эксперимент позволяет найти диаграмму рассеяния двух сигналов или двумерную плотность вероятности $w(x,y)$. В этом случае можно определить R как некоторую функцию $w(x,y)$.

Определим R, когда $x(t)$ и $y(t)$ – гармонические колебания с частотой ω: $x = x_0 \cos\omega t$ $y = y_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Подставляя выражение для x и y в (1) нетрудно убедиться, что

$$R = \cos\varphi \qquad (2)$$

где φ – сдвиг по фазе между двумя сигналами x и y.

Можно показать, что в этом случае функция $x(y)$ или

---

x) Лаборатория физики плазмы, Принстонский университет, США. (По научному обмену между АН СССР и Национальной Академией наук США).

y (x) является эллипсом

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{xy}{x_0 y_0}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

большая и малая полуоси этого эллипса равны соответственно (при $x_0 = y_0$)

$$a = x_0\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi}} \qquad b = x_0\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos\varphi}}$$

откуда получаем

$$\cos\varphi = \frac{1-b^2/a^2}{1+b^2/a^2} = R \tag{3}$$

т.е. в этом простейшем случае зная лишь зависимость x (y) или y (x) можно определить коэффициент корреляции между сигналами.

Рассмотрим две случайные функции x и y с гауссовым распределением амплитуд /1/, /2/.

Функция плотности вероятности имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} C_x} \exp\left[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2C_x^2}\right] \\ f(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} C_y} \exp\left[-\frac{(y-\langle y\rangle)^2}{2C_y^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где C_x^2 , C_y^2 – дисперсия, и функция совместной плотности вероятности:

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi C_x C_y (1-R^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R^2)}\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{x-\langle x\rangle}{C_x}\right)^2 - 2R\left(\frac{x-\langle x\rangle}{C_x}\right)\left(\frac{y-\langle y\rangle}{C_y}\right) + \left(\frac{y-\langle y\rangle}{C_y}\right)^2\right]\right\} \tag{5}$$

Можно дать геометрическую интерпретацию двумерной плотности (5). Функция $z = w(x,y)$ может быть изображена в системе координат x , y , z поверхностью, которая носит название поверхности нормального распределения. Сечение этой поверхности плоскостью $z = z_0 = const$ даёт уравнение кривой

$$\left(\frac{x-\langle x\rangle}{C_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\langle y\rangle}{C_y}\right)^2 - 2R\left(\frac{x-\langle x\rangle}{C_x}\right)\left(\frac{y-\langle y\rangle}{C_y}\right) = C_0 \tag{6}$$

на которой лежат точки с равной плотностью вероятности (эквивероятностная кривая). Полученное уравнение есть уравнение эллипса. В случае $C_x = C_y = C$ и $R = 0$ эллипс переходит в окружность. Эквивероятностные кривые будут в зависимости от величины R прямой линией, эллипсом или окружностью. Из выражения (6) при условии $\langle x\rangle = \langle y\rangle = 0$; $C_x = C_y$ находим коэффициент корреляции:

$$R = \pm\frac{1-b^2/a^2}{1+b^2/a^2} \tag{7}$$

где b и a – малая и большая полуоси эллипса соответственно. При этом угол наклона большой оси эллипса к оси x $\alpha = 45^0$, если $R > 0$ и $\alpha = -45^0$, если $R < 0$ (заметим, что (7) совпадает с (3)).

Перейдем к случаю двух производных функций, не делая каких-либо предположений о характере распределения амплитуд. Введем предварительно некоторые определения из математичес -

кой статистики. Рассмотрим произвольную функцию $\varphi(\xi)$ от исследуемой случайной величины ξ. Очевидно и сама функция $\varphi(\xi)$ будет тоже случайной величиной. Математическим ожиданием функции ( ) называется выражение:

$$M(\varphi(\xi)) = \int\limits_x \varphi(x) f(x)\,dx$$

где $f(x)$ - распределение плотности вероятности исследуемой случайной величины (интегрирование проводится по всем возможным значениям $\varphi(x)$). Если в качестве функции $\varphi(x)$ задаться функциями вида

$$\varphi^{(k)}(\xi) = \xi^{(k)}$$

или

$$\varphi_0^{(k)}(\xi) = (\xi - M(\xi))^k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

то соответствующие им математические ожидания носят название начальных моментов k -го порядка (для $\varphi^{(k)}(\xi)$) и центральных моментов k -го порядка для $\varphi_0^{(k)}(\xi)$. В двумерном случае моменты ($i+k$)-го порядка определяются как

$$M_{ik} = M\left[(\xi - M(\xi))^i (\eta - M(\eta))^k\right]$$

и в случае выборочных данных

$$M_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)(y_i - \langle y\rangle)$$

M_{20} и M_{02} представляют собой дисперсии C_1^2 и C_2^2 случайных величин ξ и η соответственно.

В принятых обозначениях коэффициент корреляции между двумя случайными величинами можно записать в виде:

$$R = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{20}M_{02}}} = \frac{M_{11}}{C_1 C_2} \qquad (10)$$

Для наглядности будем рассматривать диаграмму рассеяния как область распределения единичной массы с центром тяжести в точке (M_x , M_y).

Проведем через центр тяжести прямую линию

$$(x - M_x)\sin\varphi - (y - M_y)\cos\varphi = 0$$

где φ - угол между прямой и осью x. Наименьшее расстояние d между точкой (x , y), содержащую элемент массы и прямой определяется выражением

$$d = (x - M_x)\sin\varphi - (y - M_y)\cos\varphi$$

а момент инерции распределения около этой прямой есть

$$M(d^2) = M\left(\left[(x - M_x)\sin\varphi - (y - M_y)\cos\varphi\right]^2\right) =$$

$$= C_1^2\sin^2\varphi - 2RC_1C_2\sin\varphi\cos\varphi + C_2^2\cos^2\varphi \qquad (11)$$

Исследуя (11) на экстремальные значения, находим условие, накладываемое при этом на угол φ /3/:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2RC_1C_2}{C_1^2 - C_2^2} \qquad (12)$$

откуда видно, что максимальное и минимальное значения момента инерции соответствует углам с интервалом $\pi/2$.

Обозначим отношение экстремальных величин моментов:

$$\frac{M(d^2)\big|_{\varphi_1}}{M(d^2)\big|_{\varphi_1 + \pi/2}} = \rho \qquad (13)$$

из (11) и (13) получим:

$$\rho = \frac{C_1^2 \sin^2\varphi - 2RC_1C_2 \sin\varphi\cos\varphi + C_2^2\cos^2\varphi}{C_1^2\cos^2\varphi + 2RC_1C_2\sin\varphi\cos\varphi + C_2^2\sin^2\varphi}$$

полагая $C_1 = C_2 = C$ и $\varphi = 45^\circ$, имеем

$$\rho = \frac{1-R}{1+R}$$

откуда

$$R = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad (14)$$

Нетрудно показать, используя (13), что в общем случае, когда эквивероятностные сечения функции $w(x,y)$ имеют вид подобных эллипсов, коэффициент корреляции R определяется выражением (7), частными случаями таких функций являются гауссовское распределение и гармонические колебания.

Диаграмму рассеяния можно весьма просто получить в эксперименте, подавая два исследуемых сигнала на осциллограф с " X " и " y " - усилителями. Если характерный период колебаний (или шумов) много меньше, чем время послесвечения экрана (или экспозиции), то на экране осциллографа наблюдается яркостное изображение, которое и является диаграммой рассеяния или $w(x,y) = const$ для этих двух сигналов, причём амплитуда яркости пропорциональна плотности вероятности $w(x, y)$. Метод определения коэффициента корреляции по виду диаграммы рассеяния, полученной таким образом, отличаясь простотой и наглядностью позволяет в то же время вести измерение на весьма высоких частотах /2/.

В экспериментах, проводившихся на стеллараторе /4/ этот метод использовался для диагностики распадной плазмы в режимах, когда частоты колебаний были соизмеримы со временем измерения параметров плазмы. Характерное время распада плазмы $\sim$ 0,1 - 5 мсек (T_1), характерный период колебаний $\sim$ 0,02 - 0,5 мсек, частота повторения импульсов создающих плазму 50 - 0,5 гц ($T_2 = 1/f$).

Корреляционные измерения проводились на отрезках времени (T_3) меньших, чем характерное время распада плазмы ($T_3 \sim$ 0,05 - 0,4 мсек); за время T_3 основные параметры плазмы (n_e, T_e) - менялись несущественно. Для построения диаграммы рассеяния использовалась серия сигналов из нескольких ($\sim 10^2 - 10^3$) последовательных распадов плазмы. В случае, когда диаграмма рассеяния строится подобным образом - по выборочным измерениям, т.е. сигналы анализируются в течение отрезков времени много меньших, чем интервал между ними (T_2) вид функции $w(x,y)$ будет таким же, как и в случае непрерывной регистрации, если анализируемый процесс - случайный или если интервал T_2 является случайной функцией времени. Так как в описанных ниже экспериментах T_2 была постоянной величиной, то предполагалось, что фазы изучающихся колебаний были случайными; это предположение было проверено нами на эксперименте.

Блок-схема измерений представлена на рис.1. Сигналы с зондов через фильтры поступали на вход X Y - осциллографа. Для выделения нужного участка распада применялась модуляция луча осциллографа импульсом подсветки, длительность которого можно менять в пределах 1 μсек - 2 мсек. Для построения $w(x,y)$ по многим импульсам обычно использовалась осциллографическая трубка с послесвечением (осциллограф С1-30); другой метод, использовавшийся для этой цели - фотографирование экрана осциллографа в течение 100-1000 - импульсов; результаты, полученные этими двумя методами практически не отличались.

Для контроля случайности исследуемых сигналов построение функции $w(x,y)$ проводилось при различных значениях T_2, T_3 и времени от начала распада плазмы; практически всегда функция $w(x, y)$ не зависела от этих переменных.

Для измерения турбулентных потоков плазмы использовались три ленгмюровских зонда: два крайних - измеряли плавающий потенциал, по разности которых определялась величина E_φ, а центральный зонд - плотность. Схема расположения зондов показана на рис.2. Турбулентный поток определяется выражением

$$\Gamma = \langle n v_{\tau} \rangle = \frac{1}{B_z} \langle n E_\varphi \rangle$$

Измеряя коэффициент корреляции

$$R = \frac{\langle n E_\varphi \rangle}{\sqrt{\langle n^2 \rangle \langle E_\varphi^2 \rangle}}$$

и определяя $\langle n^2 \rangle$ и $\langle E_\varphi^2 \rangle$ получаем величину потока плазмы. В нашем случае измерения велись на частоте 4 кгц и сигнал, поступающий на осциллограф был близок к синусоидальному $n = n_A \sin \omega t$, $E_\varphi = E_{A\varphi} \sin(\omega t - \varphi)$.

Тогда

$$\sqrt{\langle n^2 \rangle} = \frac{n_A}{\sqrt{2}} \qquad \sqrt{\langle E_\varphi^2 \rangle} = \frac{E_{A\varphi}}{\sqrt{2}}$$

коэффициент корреляции между сигналами с двух крайних зондов при расстоянии между ними $\tau \sim 7$ мм был $\sim 0,6 - 0,9$ и при увеличении этого расстояния медленно падал. Это говорит о том, что τ было меньше длины волны.

При изменении знака магнитного поля менялся знак коэффициента корреляции (рис.3); знак R также менялся при переходе от измерений на ионной ветви зондовой характеристики к измерениям на электронной ветви. В качестве примера на рис.4 приведены результаты измерений потока для двух различных значений магнитного поля. Видно, что время жизни плазмы, вычисленное по потокам, по порядку величины совпадает с временем жизни, определенным по распаду плотности.

В заключение авторы благодарят Р.З.Сагдеева и А.В.Комина за интерес к работе и Г.Ф.Абдрашитова, В.Н.Бочарова и В.М.Панасюка за ценные замечания и помощь в работе.

Литература

1. G.R. Sugar, J. Appl. Phys. 25, 354 (1954).

2. T.H. Jensen and R.W. Moore, Jr. Rev. Sci. Instrum 40, 772 (1969).

3. T.M. Burford, J. Appl. Phys. 26, 56 (1955).

4. В.Н.Бочаров, В.И.Волосов, А.В.Комин, В.М.Панасюк, Ю.Н. Юдин, Доклад на III Международной конференции по исследованиям в области физики плазмы и управляемых термоядерных реакций CN - 24/Д-7, г.Новосибирск (1968).

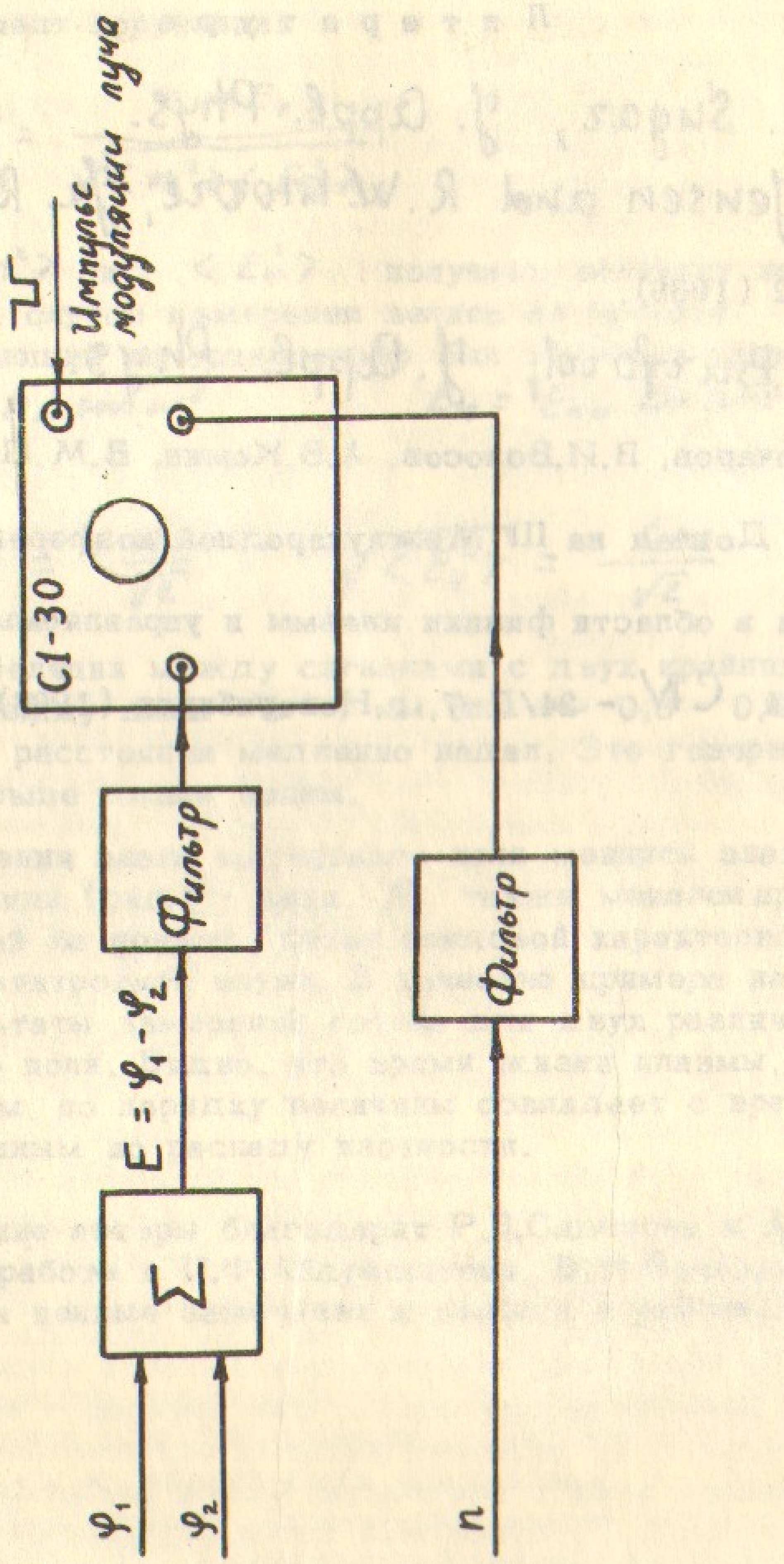

Импульс модуляции луча
С1-30
$E = \varphi_1 - \varphi_2$
Фильтр
Фильтр
Σ
φ_1
φ_2
n

Рис.1.

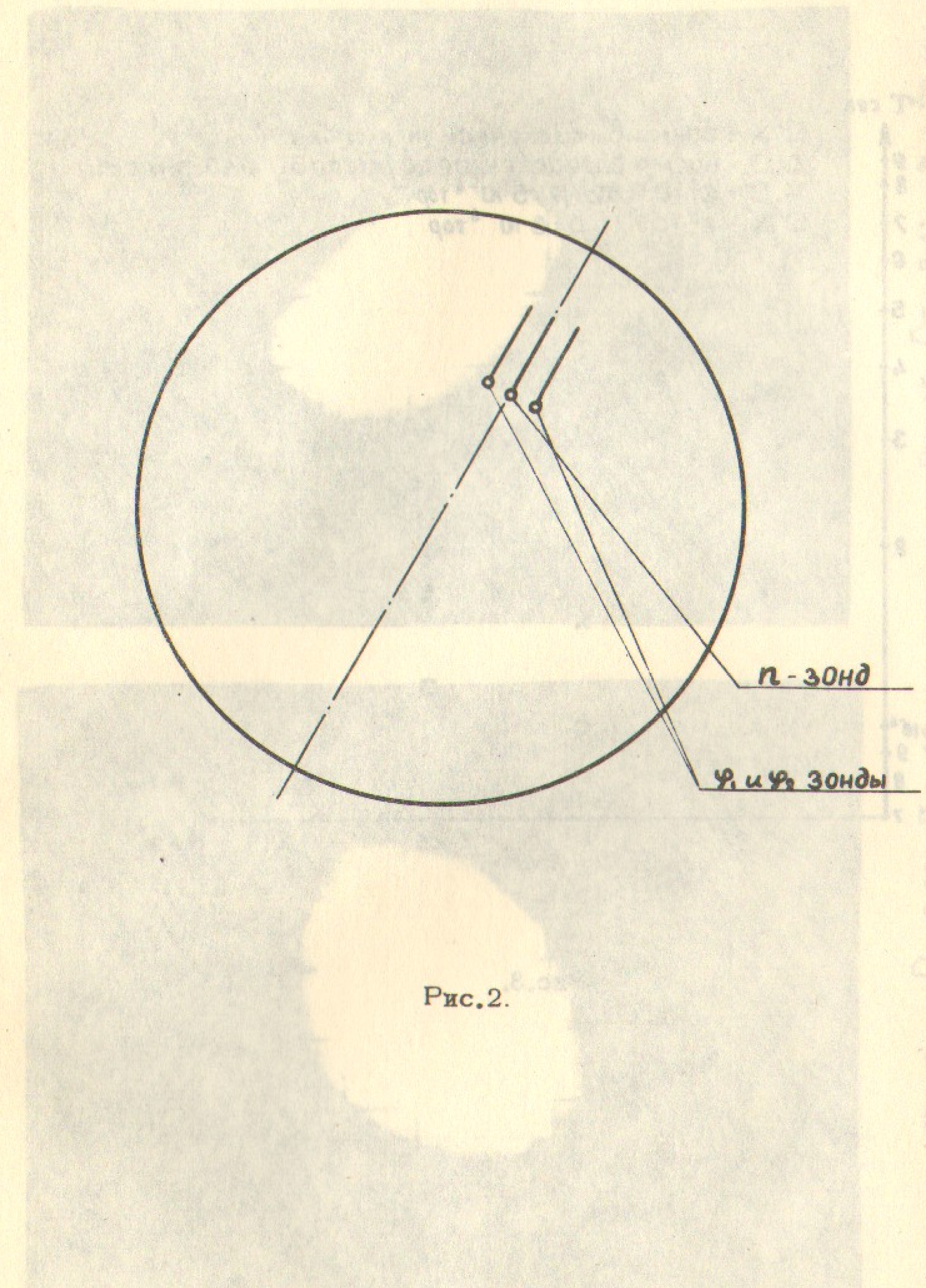

n - зонд
φ_1 и φ_2 зонды

Рис.2.

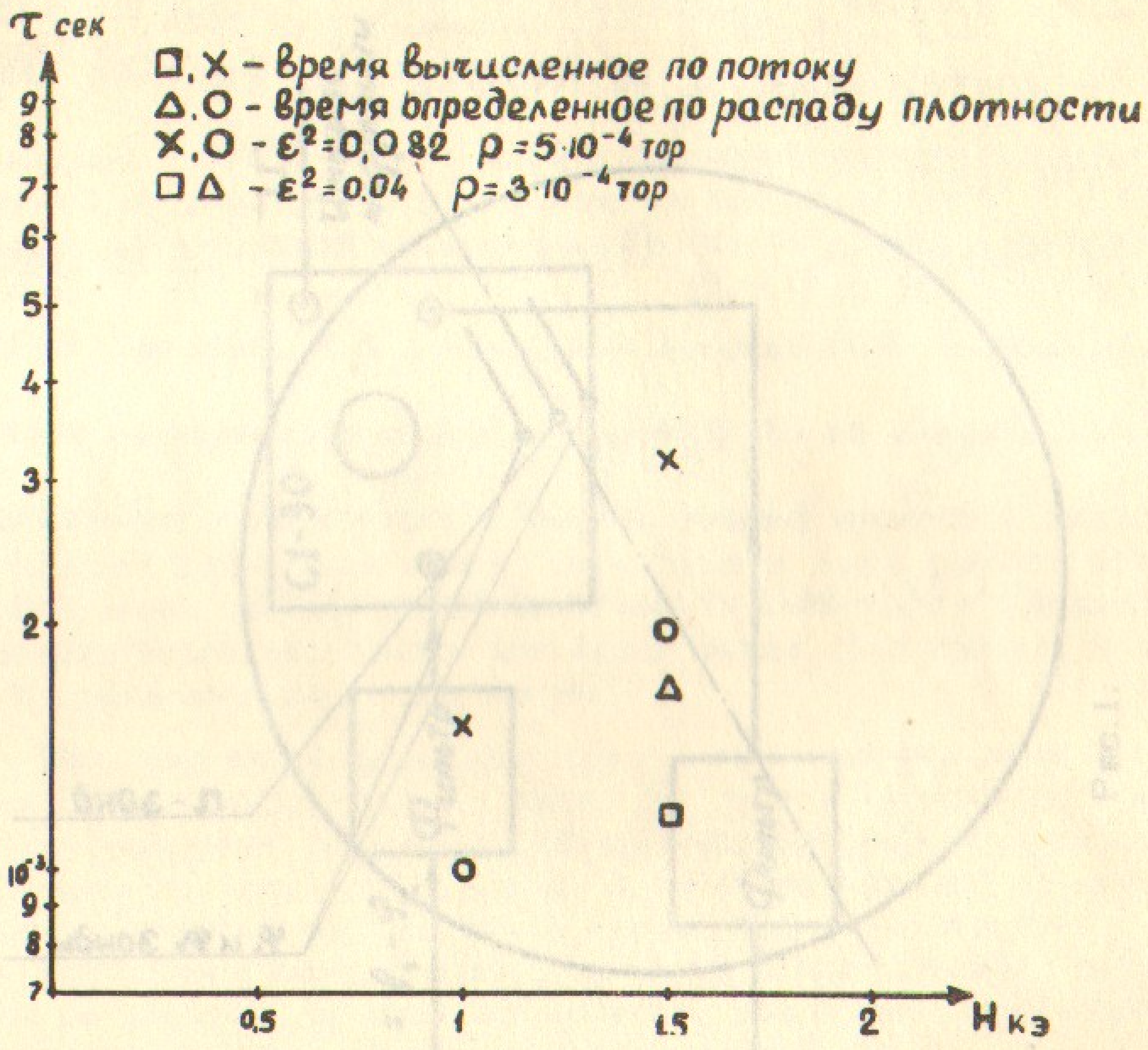


Рис.3.

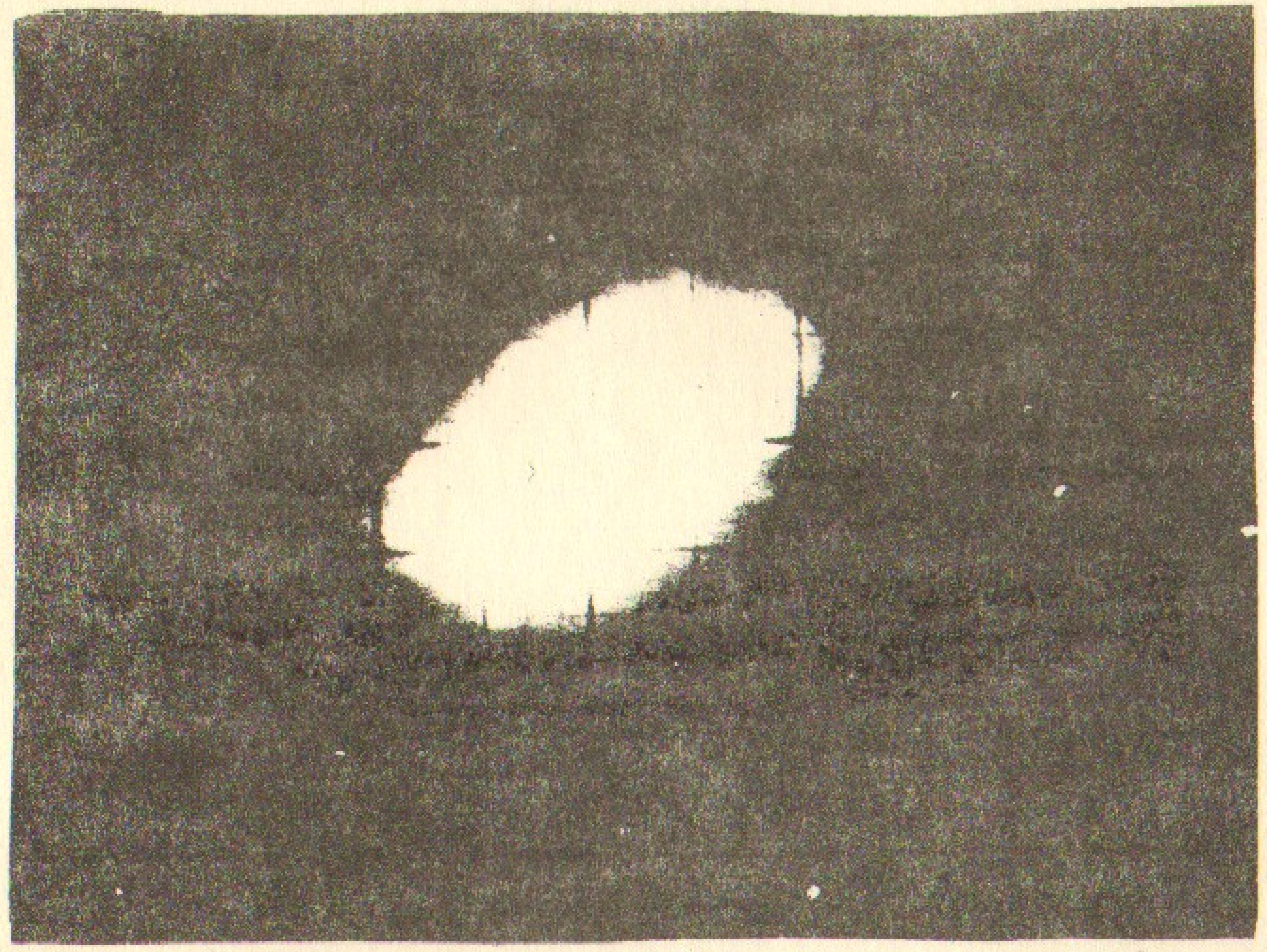


Рис.4б. R = – 0,41 r = 22 мм

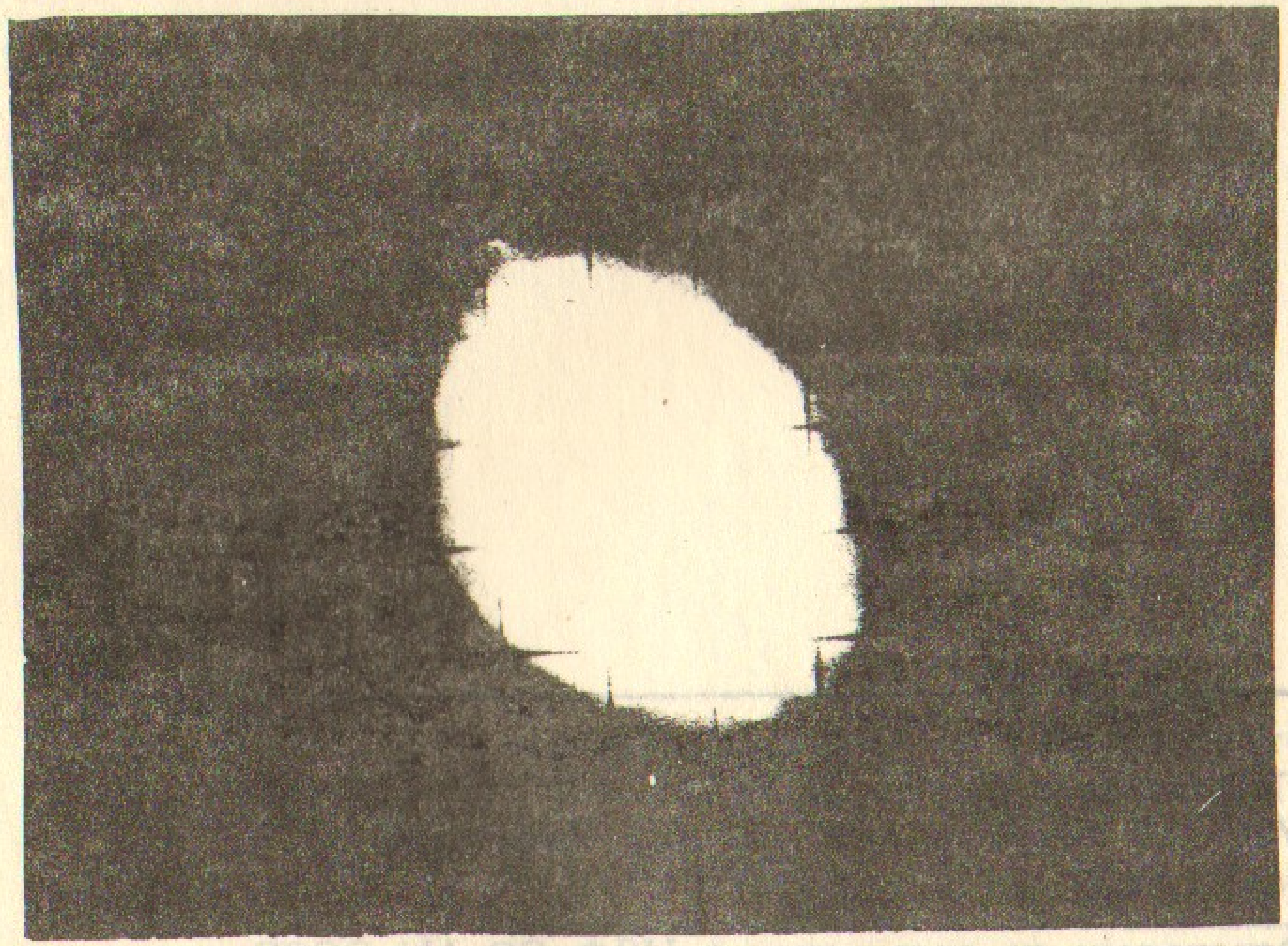
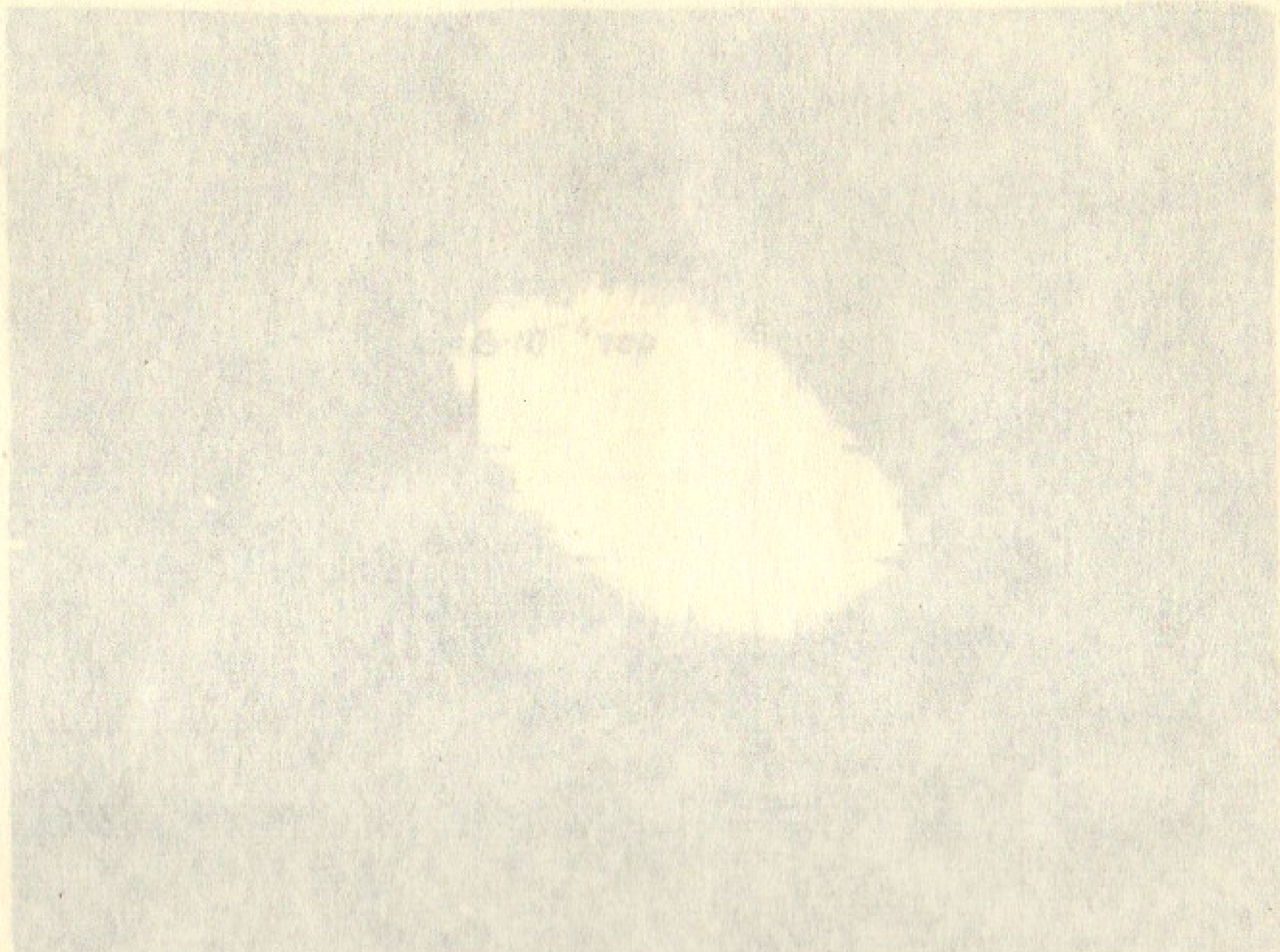
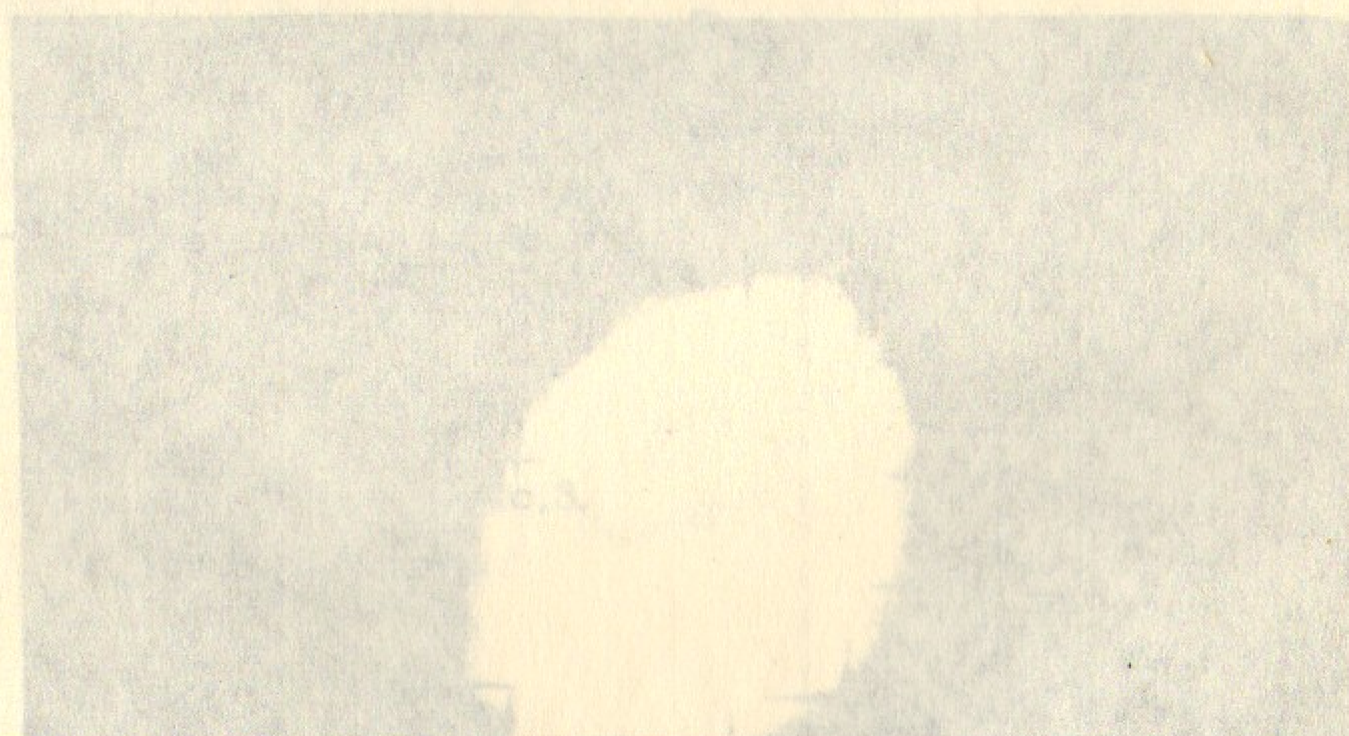


Рис.4а. R = 0,36 r = 18 мм

r – расстояние зонда от оси камеры.





Ответственный за выпуск Ю.Н.Юдин
Подписано к печати 25.У-70г. - 8
Усл. 0,8 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ № 37.   ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР