И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 16 - 70

О.Я.Савченко

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск

1970

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

О.Я.Савченко

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АННОТАЦИЯ

В нерелятивистском приближении найден тензор диэлектрической и магнитной проницаемости электронного газа в поле плоской электромагнитной волны, которая распространяется под углом к направлению магнитного поля.

Новосибирск
1970

В работе /1/ в нерелятивистском приближении найден тензор диэлектрической проницаемости системы электронов с суммарным спиновым магнитным моментом равным нулю. В этом случае теряются особенности взаимодействия системы электронов с излучением, которые связаны с наличием у каждого электрона спинового магнитного момента: диэлектрическая проницаемость электронного газа с скомпенсированным спиновым магнитным моментом такая же, как и у системы частиц без спина. В предлагаемой статье рассмотрена система электронов с суммарным спиновым магнитным моментом не равным нулю и найдена часть тензора диэлектрической и магнитной проницаемости электронного газа, которая связана с наличием у системы нескомпенсированного спинового магнитного момента.

Тензор диэлектрической и магнитной проницаемости электронного газа в поле плоскополяризованной электромагнитной волны, распространяющейся под углом к направлению магнитного поля, определяется характером изменения стационарных волновых функций электронов при адиабатическом включении электромагнитного поля /2/. При пренебрежении взаимодействием электронов полным классом волновых функций системы являются антисимметричные суммы произведений волновых функций, каждая из которых при наличии поля излучения удовлетворяет следующему уравнению Дирака / 3 /:

$$\mathfrak{D}_{+}\Psi = 0$$

$$\mathfrak{D}_{\pm} = \gamma_1^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{e}{i\hbar c}A^H_{x_n} + \frac{e}{i\hbar\omega}E^0_{x_n}\sin\omega\left(t+\frac{z_n}{c}\right)\right] + \gamma_2^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial y_n} + \right. \quad (1)$$

$$\left. + \frac{e}{i\hbar c}A^H_{y_n} + \frac{e}{i\hbar\omega}E^0_{y_n}\sin\omega\left(t+\frac{z_n}{c}\right)\right] + \gamma_3^{(n)}\left(\frac{\partial}{\partial z_n} + \frac{e}{i\hbar c}A^H_{z_n}\right) \pm k_0 .$$

$\vec{A}_H$ – вектор – потенциал постоянного магнитного поля;

$\vec{E}^0$ – амплитуда электрического поля волны, ω –круговая частота волны $m_0 = c^{-1}\hbar k_0$, e –масса и заряд электрона; индекс n указывает на принадлежность величины n –му электрону. Общее решение (1) имеет следующий вид (индекс опущен):

$$\Psi = \mathfrak{D}_{-}\{C_1[(1+i\gamma_{12})\hat{L}_{+}+(1-i\gamma_{12})]f\Gamma_{\pm}+C_2[(1+i\gamma_{12})\hat{L}_{+}-(1-i\gamma_{12})]f\Gamma_{\mp}+$$

$$+C_3[(1+i\gamma_{12})+(1-i\gamma_{12})\hat{L}_{-}]f^{*}\Gamma_{\pm}+C_4[(1+i\gamma_{12})-(1-i\gamma_{12})\hat{L}_{-}]f^{*}\Gamma_{\mp}\}, \qquad (2)$$

где

$$\Gamma_{\pm}=\frac{1}{16}(1+i\gamma_{31})(1-\gamma_{1234}), \qquad (3)$$

$$\hat{L}_{\pm}=\frac{\hbar c}{e(H_x \mp iH_y)}\left(\Box_{H} \mp \frac{e}{\hbar c}H_z\right),$$

C_i -произвольные постоянные, не включающие в себя гиперкомплексные числа, H_α -составляющие вектора магнитного поля в системе координат, в которой ось z направлена вдоль распространения излучения; f -часть волновой функции электрона, которая определяется уравнением:

$$\left[\Box_{H}^{2}-\frac{e^{2}}{\hbar^{2}c^{2}}\left(\vec{H}^{2}+2\vec{E}\vec{H}+2i\vec{n}\,\vec{E}\vec{H}\right)\right]f=0 \qquad (4)$$

$\Box_{H}$ - оператор уравнения Клейна-Гордона для рассматриваемой системы /3/, $\vec{E}$ -вектор электрического поля излучения, $\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\vec{n}$ -единичный вектор в направления распространения излучения. В сумме (2) две первые функции относятся к состояниям, в которых мнимый дипольный момент электрона, умноженный на мнимую единицу, направлен вдоль спинового магнитного момента электрона, а две последние функции относятся к состояниям, в которых эти вектора направлены в разные стфроны.

В случае, если оператор взаимодействия излучения с электронами взять в нерелятивистском приближении, решение уравнения (4) может быть найдено в виде следующего произведения /1,4/:

$$f=Q(\vec{z}+\vec{K})\cdot S(\eta)e^{i\varphi}, \quad \eta=t+\frac{z}{c} \qquad (5)$$

$Q(\vec{r}+\vec{K})$ -функция, имеющая вид стационарной волновой функции; $Q(\vec{r})$ -движущейся по траектории классического электрона /1,4/; $Q(\vec{r})$ -стационарное решение уравнения Клейна-Гордона в отсутствии поля излучения, φ -вещественная функция, S -функция, которая определяется из уравнения:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{1}{4}\omega^2+\frac{1}{2}\left(\vec{\omega}_E\vec{\omega}_H+i\vec{n}\,\vec{\omega}_E\vec{\omega}_H\right)\right]S=0 \tag{6}$$

В уравнении (6) введены следующие обозначения:

$$\vec{\omega}_H=\frac{e}{\hbar(k_4-k_z)}\cdot\vec{H}$$

$$\vec{\omega}_E=\frac{e}{\hbar(k_4-k_z)}\vec{E} \tag{7}$$

$k_4\hbar c$ -полная энергия электрона, $k_z\hbar$ -составляющая его импульса в направлении распространения излучения. Определение тензора диэлектрической и магнитной проницаемости в электромагнитном поле сводится к определению зависимости от излучения тех из функций Q и S, которые при адиабатическом выключении поля излучения переходят в стационарные волновые функции /2/. Значения вектора $\vec{K}$ для таких функций приведено в /1/ в линейном приближении по $\vec{E}$ легко находится из (6):

$$S_{\pm}=e^{\pm\frac{1}{2}i\omega_H\eta}\left[1+\frac{1}{4\omega}\left(\vec{n}\,\vec{\omega}_E\vec{\omega}_H-i\vec{\omega}_E\vec{\omega}_H\right)\left(\frac{1}{\omega\mp\omega_H}e^{i\omega\eta}-\frac{1}{\omega\pm\omega_H}e^{-i\omega\eta}\right)\right]. \tag{8}$$

Функция S_+ соответствует состоянию, которое при адиабатическом выключении электромагнитного поля переходит в стационарное состояние со спином, ориентированным вдоль постоянного магнитного поля. Функция S_- принадлежит состоянию, спин которого ориентируется против направления магнитного поля.

Поэтому в дальнейшем эти состояния будут называться ориентированными вдоль и против магнитного поля. Полный ток каждого из этих состояний складывается из тока проводимости /1/

$$\vec{j} = e\sum_{i=1}^{4}|c_i|^2\left[\frac{\hbar}{2im_0}\left(f_i^* \operatorname{grad} f_i - f_i \operatorname{grad} f_i^*\right) - \frac{e}{m_0 c} f_i f_i^* \vec{A}\right], \tag{9}$$

и тока поляризации /3,5/

$$\vec{j}_p = e \cdot \operatorname{rot}\vec{M} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P} \tag{10}$$

Ток проводимости не зависит от спинового состояния системы. Составляющие тока проводимости следующие /1/:

$$j_{x,y} = -\frac{e^2}{m_0} B_{x,y}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega^2-\omega_H^2}\left\{\vec{\omega}_E + \frac{1}{\omega^2}\left(\vec{\omega}_E\vec{\omega}_H\cdot\vec{\omega}_H + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\vec{\omega}_E\times\vec{\omega}_H\right]\right)\right\} \tag{11}$$

Ток электрической поляризации в рассматриваемом случае равен нулю. Для определения тока магнитной поляризации и магнитной проницаемости необходимо вычислить значение вектора спинового магнитного момента $\vec{M}$. Современная экспериментальная техника дает возможность изменять ориентацию только магнитного спинового момента, создавать определенную магнитную поляризацию электронов. Поэтому имеет смысл найти спиновой магнитный момент, усредненный по двум возможным ориентациям мнимо дипольного спинового момента. Несложные вычисления дают следующие значения проекций этого магнитного спинового момента:

$$M_{x,y} = \pm\frac{e\hbar}{2m_0 c}\left[\vec{n}_H - \frac{1}{\omega_H}\vec{n}\times\left(\vec{\omega}_E - \omega^2\cdot\vec{B}\right)\right]_{x,y} \tag{12}$$

Знак + относится к состояниям первоначально ориентированных вдоль магнитного поля, знак − к состояниям с противоположной ориентацией, $\vec{n}_H$ −единичный вектор в направлении магнитного поля. Через магнитное поле электромагнитной волны (12) переписывается в виде составляющих вектора

$$\vec{M}' = \pm \frac{e\hbar}{2m_0 c}\left[\vec{n}_H - \frac{1}{\omega_H}(\vec{\omega}_E - \omega^2 \cdot \vec{B})\right], \tag{13}$$

в котором вместо напряженности электрического поля стоит напряженность магнитного поля излучения. Поэтому тензор магнитной проницаемости состояний ориентированных вдоль и против магнитного поля имеет следующие составляющие:

$$\mu_{xx} \simeq 1 \pm \frac{e\hbar N}{2m_0 cH}\left(1 - \frac{1-h_x^2}{1-\vec{h}^2}\right),$$

$$\mu_{yy} \simeq 1 \pm \frac{e\hbar N}{2m_0 cH}\left(1 - \frac{1-h_y^2}{1-\vec{h}^2}\right), \tag{14}$$

$$\mu_{xy} = \mu_{yx}^{*} \simeq \mp \frac{e\hbar N}{2m_0 cH}\,\frac{h_x h_y - i h_z}{1-\vec{h}^2},$$

$$\vec{h} = \frac{e}{m_0 c\omega}\vec{H} \simeq \frac{\vec{\omega}_H}{\omega} \tag{15}$$

N −число электронов в единице объема. Таким образом тензор магнитной проницаемости электронного газа с ориентированными магнитными спиновыми моментами вблизи резонанса с точностью до множителя совпадает с тензором диэлектрической проницаемости системы бесспиновых частиц /1/. Часть тензора диэлектрической проницаемости, связанная с током магнитной поляризации имеет следующие составляющие:

$$\varepsilon'_{xx} = \pm \frac{e\hbar N}{2m_0cH}\left(1 - \frac{1-h_x^2}{1-\vec{h}^2}\right),$$

$$\varepsilon'_{yy} = \pm \frac{e\hbar N}{2m_0cH}\left(1 - \frac{1-h_y^2}{1-\vec{h}^2}\right),$$

$$\varepsilon'_{xy} = \varepsilon'^{\,*}_{yx} = \pm \frac{e\hbar N}{2m_0cH}\,\frac{h_xh_y + ih_z}{1-\vec{h}^2} \qquad (16)$$

Если диагональные составляющие тензора диэлектрической и магнитной проницаемости близки к единице, оптические свойства среды будут определяться тензором, равным полусумме тензора диэлектрической и магнитной проницаемости. Составляющие этого тензора следующие:

$$\frac{1}{2}(\mu_{xx} + \varepsilon_{xx}) \simeq 1 - \frac{e^2N}{2m_0\omega^2}\cdot\frac{1-h_x^2}{1-\vec{h}^2} \pm \frac{e\hbar N}{4m_0cH}\left(1 - \frac{1-h_z^2}{1-\vec{h}^2}\right),$$

$$\frac{1}{2}(\mu_{yy} + \varepsilon_{yy}) \simeq 1 - \frac{e^2N}{2m_0\omega^2}\,\frac{1-h_y^2}{1-\vec{h}^2} \pm \frac{e\hbar N}{4m_0cH}\left(1 - \frac{1-h_z^2}{1-\vec{h}^2}\right),$$

$$\frac{1}{2}(\mu_{xy} + \varepsilon_{xy}) \simeq \frac{e^2N}{2m_0\omega^2}\,\frac{ih_z - h_xh_y}{1-\vec{h}^2} \pm \frac{e\hbar N}{2m_0cH}\cdot\frac{ih_z}{1-\vec{h}^2} \qquad (17)$$

Диагональные составляющие этого тензора совпадают с коэффициентом преломления среды, мнимые части недиагональных составляющих определяют эффект Фарадея. Поэтому из (17) вытекает следующее изменение в оптических свойствах электронного газа при наличии нескомпенсированных спиновых магнитных моментов: коэффициент преломления лево- и правоциркулярной волны изменится на величину:

$$\Delta n_{\pm} \simeq \frac{\pi \varkappa e\hbar}{m_0c}\cdot\frac{N}{H}\cdot\left[1 - \frac{(1\pm h_z)^2}{1-\vec{h}^2}\right] \qquad (18)$$

$\varkappa$ -степень ориентации спинов. Следовательно при

$$\omega^2 < \varkappa\, \omega_H \omega_{m_0}, \qquad \omega_{m_0} = \frac{m_0 c^2}{\hbar}, \tag{19}$$

эффект Фарадея определяется только суммарным спиновым моментом системы. В этом случае вращение плоскости поляризации перестает зависить от частоты излучения:

$$\Delta\alpha \simeq \varkappa N \cdot \frac{4\pi \hbar e^2}{m_0^2 c^3} \simeq 1{,}3 \cdot 10^{-22}\, \varkappa N \cdot \text{рад} \cdot \text{см}^{-1} \tag{20}$$

Формулы (17) - (20) получены в нерелятивистском приближении. Кроме этого в проведенном расчете не учитывалось влияние спина на движение волнового пакета по траектории. Однако ошибки, связанные с этими пренебрежениями незначительны - расчет в полурелятивистском приближении дает следующие поправки к части тензора диэлектрической проницаемости, связанного с движением волнового пакета (см.дополнение):

$$\Delta\varepsilon_{xx} \simeq \beta \frac{e^2 N}{m_0 \omega^2} \cdot \frac{\vec{n}\vec{n}_H}{1-\vec{h}^2},$$

$$\Delta\varepsilon_{xy} \simeq -\beta \frac{e^2 N}{m_0 \omega^2} \cdot \frac{i|\vec{h}|}{1-\vec{h}^2} \pm$$

$$\pm \frac{e^2 N}{m_0 \omega^2} \cdot \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} \cdot \left(i + \frac{3}{1-\vec{h}^2} \right) \cdot \frac{|\vec{h}|^3 (1-\vec{n}\vec{n}_H^2)}{(1-\vec{h}^2)(1-4\vec{h}^2)},$$

$$\beta = \left| \frac{\vec{v}_H}{c} \right| \tag{21}$$

В (21) первое слагаемое - релятивистская поправка, второе - отражает влияние спина на траекторию волнового пакета. Аналогичные поправки можно получить и для части тензора диэлектрической и магнитной проницаемости, связанной с током магнитной поляризации.

К реальным системам, к которым могли бы быть приложимы результаты анализа, относятся ферромагнитные металлы Fe, Co, Ni и их сплавы. В этих системах поле излучения взаимодействует не только с электронами проводимости, но и со связанными электронами. Несложный расчет дает следующее изменение общего коэффициента преломления циркулярно-поляризованный волны в этих средах, вызванное наличием тока магнитной поляризации /6/:

$$\Delta n_{\pm} \simeq \frac{\pi \varkappa e \hbar}{m_0 c} \cdot \frac{N}{H} \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{|\vec{h}|}{1 \pm |\vec{h}|}, \qquad \vec{n}_H = \vec{h} \tag{22}$$

Знак "+" относится к правоциркулярной волне, знак "−" к левоциркулярной волне. Следовательно спиновое вращение плоскости поляризации плоско-поляризованной волны на единицу длины

$$\Delta\alpha_1 \xrightarrow[\hbar \to 0]{} 0,65\, \varkappa N \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \text{рад} \cdot \text{см}^{-1} \tag{23}$$

а спиновое вращение плоскости поляризации при отражении

$$\Delta\alpha_2 \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \frac{2kn}{(n^2+k^2-1)^2+4k^2}\left(\Delta n_+ - \Delta n_-\right) \simeq 4{,}1 \cdot 10^{-23} \cdot \frac{\varkappa \lambda N \cdot k(n^2+1)}{(n^2+k^2-1)^2+4k^2}\ \text{рад} \tag{24}$$

n, k -коэффициенты преломления и поглощения в среде без магнитного поля. Полное вращение плоскости поляризации при прохождении и при отражении света в оптической области для ферромагнитных металлов почти на два порядка больше величины спиновых составляющих, рассчитываемых по формулам (23), (24) /6/. Следовательно не ток магнитной поляризации, а связь спиновой части с координатной частью волновой функции электронов через обменное взаимодействие определяет магнитооптические свойства электронов в оптической области. Однако с увеличением частоты излучения вклад тока магнитной поляризации в общий ток увеличивается. Поэтому следует ожидать, что при достаточно большой частоте именно формулы (23), (24) будет определять эффект Фарадея и магнитооптический эффект Керра в ферромагнитных металлах.

Дополнение

В основном тексте статьи тензор диэлектрической и магнитной проницаемости получен в случае, когда оператор взаимодействия излучения в электронном газе брался в нерелятивистском приближении и не учитывалось влияние спина электрона на движение волнового пакета по траектории $\vec{K}$. В дополнении в полурелятивистском приближении определены некоторые из составляющих тензора диэлектрической проницаемости электронного газа. Сопоставление этих приближений с нерелятивистским приближением дает возможность оценить точность нерелятивистского приближения. Кроме этого в дополнении учитывается искажение классической траектории, вызываемое спином электрона.

Оператор /4/ при выборе составляющих вектора -потенциала магнитного поля в виде линейных функций от x в поле плоской волны имеет следующий вид:

$$\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e}{i\hbar\omega}E_x^0\sin\frac{\omega}{c}\eta\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{e}{i\hbar\omega}E_y^0\sin\frac{\omega}{c}\eta+\frac{e}{i\hbar c}H_z x\right)^2+\right.\right. \qquad (25)$$

$$\left.\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{e}{i\hbar c}H_y x\right)^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k_0^2\right]^2-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\left(\vec{H}^2+2\vec{E}\vec{H}+2i\vec{n}\vec{E}\vec{H}\right)\right\}f=0.$$

Такой выбор вектор-потенциал магнитного поля позволяет свести это уравнение подстановкой

$$f=\exp i(k_y y+k_z z+ck_4 t)\cdot F(x,\eta) \qquad (26)$$

к уравнению, которое включает в себя только два независимых переменных x и η. Для частицы, импульс которой $\vec{K}$ направлен вдоль магнитного поля, это уравнение имеет следующий вид:

$$\Big\{\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2e}{i\hbar\omega}E_x^0\sin\frac{\omega}{c}\eta\frac{\partial}{\partial x}-2i\Big(k_4-k_z+\frac{e}{\hbar c}H_y x\Big)\frac{\partial}{\partial\eta}-2\frac{e^2}{\hbar^2c^2\omega^2}E_y^0H_z x\sin\frac{\omega}{c}\eta-$$

$$-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2x^2-\frac{e^2}{\hbar^2\omega^2}\big(E_x^{02}+E_y^{02}\big)\sin^2\frac{\omega}{c}+2\frac{e}{\hbar\omega}k_yE_y^0\sin\frac{\omega}{c}\eta+k_4^2-\vec{k}^2-k_0^2\Big]^2-$$

$$-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\big(\vec{H}^2+2\vec{E}\vec{H}+2i\vec{n}\vec{E}\vec{H}\big)\Big\}F=0 \qquad (27)$$

В случае $H_y=0$ точное решение уравнения (21) находится в виде функции:

$$f=\exp i(k_1x+k_2x^2)\cdot F_0(l_1+l_2x)\cdot F_1(\eta). \qquad (28)$$

$F_0(x)$ -собственная функция, невозмущенная полем излучения, l_1, l_2, k_1, k_2 -функции от переменных η ,которые определяются системой уравнений:

$$(k_4-k_z)\frac{\partial}{\partial\eta}l_1-l_2k_1+\frac{e}{\hbar\omega}E_x^0\sin\frac{\omega}{c}\eta=0,$$

$$(k_4-k_z)\frac{\partial}{\partial\eta}l_2-2l_2k_2=0,$$

$$(k_4-k_z)\frac{\partial}{\partial\eta}k_1-2k_1k_2+\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2l_1l_2^3-\frac{e^2}{\hbar^2c\omega}E_y^0H_z\sin\frac{\omega}{c}\eta=0,$$

$$(k_4-k_z)\frac{\partial}{\partial\eta}k_2-2k_2^2-\frac{1}{2}\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2(l_2^4-1)=0. \qquad (29)$$

Поэтому в приближении

$$|l_2-1|=|l_2'|\ll 1,\quad |k_2|\ll k_4\omega c \qquad (30)$$

одно из решений этого уравнения имеет вид:

$$f_1 \simeq \exp i k_1 \cdot F_0 \left[x + l_1(\eta) + a x \sin\left(2\frac{\omega_2}{c}\eta + \varphi\right)\right], \quad |a| \ll 1, \qquad (31)$$

k_1 -вещественная функция, a, φ -произвольные постоянные, $l_1(\eta)$ -функция, описывающая движение классической частицы по оси x в поле плоской волны и постоянном магнитном поле, ω_2 - резонансная частота, связанная с ларморовской частотой электрона ω_H соотношением:

$$\omega_2 = k_0^{-1}(k_4 - k_2)\omega_H \qquad (32)$$

В случае $a = 0$, решение (29) совпадает с уже известным решением уравнения Клейна-Гордона /4/. Действительно, тогда с точностью до несущественного первого множителя решение (29) представляет собой стационарную волновую функцию в постоянном магнитном поле H, которая под действием электромагнитной волны перемещается в плоскости XY по классической траектории. В случае же $a \neq 0$, наряду с движением волновой функции, как целого, имеет место изменение относительных координат x этой волновой функции с удвоенной резонансной частотой и с амплитудой ax. Следовательно такая волновая функция описывает состояние, в котором вероятность обнаружить электрон в плоскости XY меняется с частотой $2\omega_2$ и амплитудой a. В первом приближении электромагнитное поле не влияет на эти колебания вероятности.

В случае $H_y \neq 0$, полурелятивистские приближения к решениям уравнения (27) являются решения уравнений:

$$\left\{\Box_H \pm \left(f_1 + f_2 x + i f_3 \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} f_\pm = 0, \qquad (33)$$

если

$$\frac{2}{i}(k_4 - k_2)\frac{\partial}{\partial \eta} f_1 + f_1^2 - 2\frac{e}{i\hbar\omega} E_x^0 f_2 \sin\frac{\omega}{c}\eta = \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}\left(\vec{H}^2 + 2\vec{E}\vec{H} + 2i\vec{n}\vec{E}\vec{H}\right).$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}f_2-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2f_3+if_1f_2=\frac{e}{\hbar c}H_y\frac{\partial}{\partial\eta}f_1\,,$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}f_3+f_2+if_1f_3=0. \qquad (34)$$

Действительно при условии (34) уравнение (25) с точностью до квадратичных членов по $f_{1,2,3}$ совпадает с уравнением:

$$\left[\Box_H\mp\left(f_1+f_2x+if_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\left[\Box_H\pm\left(f_1+f_2+if_3\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]f_\pm=0 \quad (35)$$

из которого и вытекают уравнения (33). В квазиклассическом случае пренебрежения этими квадратичными членами означает переход от точного уравнения к уравнению, которое дает решение задачи лишь в полурелятивистском приближении. Решение уравнения (33) с точностью до несущественного экспоненциального множителя с мнимым аргументом находится в виде функции типа (28). Функции ℓ_1, ℓ_2, k_1, k_2, входящие в эту функцию определяются в приближении (30) следующей системой уравнений:

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}\ell_1-k_1+\frac{e}{\hbar\omega}E_y^\circ\sin\frac{\omega}{c}\eta-\ell_2'\left(k_1-\frac{e}{\hbar\omega}E_x^\circ\sin\frac{\omega}{c}\eta\right)=f_3\,,$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}\ell_2'-k_2=\gamma\left(k_1-\frac{e}{\hbar\omega}E_x^\circ\sin\frac{\omega}{c}\eta\right),\qquad \gamma=\frac{eH_y}{\hbar c(k_4-k_2)}\,,$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}k_1-2k_1k_2+\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2\ell_1(1+3\ell_2')-\frac{e^2}{\hbar c^2\omega}E_y^\circ H_z\sin\frac{\omega}{c}\eta=\frac{1}{2}\gamma\Big(k_1^2-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2\ell_1^2+$$

$$+2\frac{ek_y}{\hbar\omega}E_y^\circ\sin\frac{\omega}{c}\eta\Big)-f_2\,,$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}k_2+2\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2\ell_2=\Gamma\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\left(c\omega^{-1}E_y^0H_z\sin\frac{\omega}{c}\eta-\vec{H}^2\ell_1\right) \quad (36)$$

Функции $f_{1,2}$, входящие в систему уравнений (36) отражают влияние спина на координатную часть волновой функции электрона.

Таким образом в отличие от нерелятивистского приближения /1/, в полурелятивистском приближении спин влияет на координатную часть волновой функции электрона. Из системы уравнений ( ) следует, что спиновые поправки, связанные с функциями f_2 и f_3, вызывают некоторые изменения в движении волновой функции как целого вдоль оси X. Теперь определение той части тензора диэлектрической проницаемости электронного газа, которая связана с перемещением волнового пакета сводится к определению зависимости величины ℓ_1, от электромагнитного поля для класса волновых функций, которые при адиабатическом выключении электромагнитного поля переходят в стационарные волновые функции /2/. Это означает, что ℓ_1 при $\vec{E}\to 0$ должна стремиться к постоянной величине. Такие функции ℓ_1 в линейном приближении по $\vec{E}$ определяются в полурелятивистском приближении системой уравнений:

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}\ell_1-k_1+\frac{e}{\hbar\omega}E_x^0\sin\frac{\omega}{c}\eta=f_3, \quad (37)$$

$$(k_4-k_2)\frac{\partial}{\partial\eta}k_1+\frac{e^2}{\hbar^2c^2}\vec{H}^2\ell_1-\frac{e^2}{\hbar^2c\omega}E_y^0H_z\sin\frac{\omega}{c}=\Gamma\cdot\frac{e}{\hbar\omega}k_yE_y^0\sin\frac{\omega}{c}\eta+f_2.$$

В предельном случае сильных магнитных полей $|\vec{H}|\gg|\vec{E}|$ нелинейная система уравнений (34) линиизируется. Поэтому в этом случае функции f_2 и f_3 могут быть найдены в явном виде. Мнимые части $f_{2,3}$ в линейном приближении по $\vec{E}$ не дают вклада в дипольный момент волновой функции. Не дают вклада в том же приближении в слагаемые $f_{2,3}$, связанные с наличием мнимого слагаемого в правой части первого уравнения системы (34). Поэтому в рассматриваемом приближении можно вместо $f_{2,3}$ в (37) подставить вещественные части функции $f_{2,3}$, которые находятся как решения системы (34) при исключении из первого уравнения в правой части мнимого слагаемого. Эти функции имеют следующий вид:

$$Re\,f_2' = \pm \frac{e}{\hbar c^2}\sin^2\vartheta \cdot \frac{\omega_z^2}{\omega_z^2-4\omega^2} E_y \sin\frac{\omega}{c}\eta, \qquad \cos\vartheta = \vec{n}\vec{n}_H$$

$$Re\,f_3' = \pm \frac{3e}{m_0 c^2}\sin^2\vartheta \cdot \frac{\omega\cdot\omega_z^3}{(\omega_z^2-\omega^2)(\omega_z^2-4\omega^2)} E_y \sin\frac{\omega}{c}\eta \qquad (38)$$

Первый знак в (38) относится к состояниям, ориентированным вдоль магнитного поля, второй – против магнитного поля, ϑ –угол между направлением распространения излучения и вектором напряженности постоянного магнитного поля. Решение системы (37), когда вместо функций f_2 , f_3 стоят $Re\,f_2'$, $Re\,f_3'$ –гармонические функции, в частности

$$\ell_1' = \frac{ec}{\hbar(k_1-k_2)(\omega_z^2-\omega^2)}\left\{\left[E_x^0 \mp \frac{\hbar\omega_z}{m_0 c^2}\sin^2\vartheta \cdot E_y^0 \frac{3\omega^2\omega_z^2}{(\omega_z^2-\omega^2)(\omega_z^2-4\omega^2)}\right]\right.$$

$$\cos\frac{\omega}{c}\eta + \frac{1}{k_1-k_2}\left[\frac{e}{\hbar\omega}\left(H_z+\frac{k_y}{k_1-k_2}H_y\right) \pm \frac{1}{c}\sin^2\vartheta \cdot \frac{\omega_z^3}{\omega_z^2-4\omega^2}\right] E_y^0 \sin\frac{\omega}{c}\eta$$

(39)

В рассматриваемом приближении диэлектрическая проницаемость системы совпадает с диэлектрической проницаемостью классического электронного газа, который под действием электромагнитной волны двигался бы в направлении X по формуле (39). Следовательно часть тензора связана с движением волнового пакета в полурелятивистском приближении определяется формулами (24).

Литература

1. О.Я.Савченко. Опт. и спектр. 33, 658, 1968.
2. Я.Б.Зельдович ЖЭТФ, 51, 1492, 1966.
3. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.2, ГИТТЛ, М., 1956.
4. R.J. Redmond. J. Math. Phys., 6, 1163, 1965.
5. W. Gordon. Zs. Phys., 50, 630, 1928.
6. Physikalisch-chemische Tabellen, II, Berlin, 1923.

Ответственный за выпуск Г.В.РОСЛЯКОВ
Подписано к печати 7.X.1969 года
Усл. 1 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно.
Заказ № 16, ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг