И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

И Я Ф 10 - 70

Е.В.Мишин

СТАБИЛИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Новосибирск

1970

Е.В.Мишин

СТАБИЛИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются нормальные моды "универсальной неустойчивости" плазмы в магнитном поле с большим "shear'ом" ($\Theta > \frac{a_i}{R_p}$). Получен критерий стабилизации данных мод "shear'ом" ($\Theta > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} k_y a_i$), отличающийся от найденного недавно в работе Берка и Перлстейна /3/.

Большую опасность с точки зрения удержания плазмы в магнитных ловушках представляют дрейфовые неустойчивости. Длительное время считалось, что поворот силовых линий магнитного поля ("shear"), определяющийся отношением характерной длины изменения плотности плазмы к длине поворота ($\Theta = \frac{R_p}{L_s}$), легко стабилизирует так называемую "универсальную" моду дрейфовой неустойчивости плазмы. В работах /1, 2/ было показано, что соответствующая задача об устойчивости плазмы по отношению к дрейфовым волнам сводится к проблеме собственных значений уравнения типа уравнения Шредингера с комплексным потенциалом. Исследование этого уравнения обычно ограничивали случаем $\Theta \le \frac{a_i}{R_p}$ (a_i - ларморов радиус ионов). В противоположном случае действительная часть потенциала, вообще говоря, не имеет форму ямы. Отсюда - делался вывод, что при $\Theta > \frac{a_i}{R_p}$ отсутствуют нормальные моды дрейфовой неустойчивости.

Недавно Берк и Перлстейн /3/ заметили, что этот вывод не обоснован и попытались найти нормальные моды дрейфовой неустойчивости при сравнительно большом $\Theta > \frac{a_i}{R_p}$. При этом финитность решения должна была достигаться за счёт мнимой части потенциала. В итоге они пришли к чрезвычайно жесткому критерию стабилизации нормальных мод "shear'ом":

$$\Theta > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} (k_y a_i)^{2/3} \tag{1}$$

Цель этой заметки - показать, что хотя исходные предпосылки /3/ разумны, последовавшее затем решение и критерий (1) неверны. Решение, которое предлагается ниже, приводит к весьма мягкому критерию стабилизации $\Theta > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \cdot k_y a_i$

1. Известное уравнение второго порядка для возмущения электрического поля $\phi(x)\exp(-i\omega t + ik_y y)$ имеет вид /3/ (в обычном предположении $k_x^2 \ll k_y^2$):

$$\bar{a}_i^{\,2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \left[Q_R(x) + iQ_I(x)\right]\phi(x) = 0 \tag{2}$$

Здесь

$$Q_R(x) = -1 + \frac{1+\eta}{I_0 e^{-b}} \frac{\omega}{\omega - \omega_i^*} \left[1 - \left(\frac{K_y V_{Ti}}{\omega L_s} x \right)^2 \right]$$

$$Q_I(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\eta}{I_0 e^{-b}} \frac{\omega}{\omega - \omega_i^*} \left[\frac{\eta}{1+\eta} \frac{\omega - \omega_e^*}{|K_\parallel V_{Te}|} + \frac{\omega}{|K_\parallel V_{Ti}|} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2K_\parallel^2 V_{Ti}^2}\right) \right]$$

$$\eta = \frac{T_i}{T_e}, \quad \omega_j^* = K_y \frac{cT_j}{e_j H} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx},$$

$$\frac{\omega}{V_{Ti}} \gg K_\parallel \equiv K_y \frac{x}{L_s} \gg \frac{\omega}{V_{Te}}$$

$$\bar{a}_i^2 = -a_i^2 \frac{d}{db} \ln I_0(b) e^{-b}, \quad b = K_y^2 a_i^2$$

a_j, V_{Tj} – ларморовский радиус и тепловая скорость частиц,

$I_0(b)$ – модифицированная функция Бесселя.

В отличие от работы /3/ кроме взаимодействия возмущения с резонансными электронами мы учли также и затухание Ландау на ионах. Хорошо известно решение уравнения (2), если пренебречь мнимой частью потенциала ($Q_I(x) \equiv 0$):

$$\phi_R(x) = H_n\left((i\sigma)^{1/2} x\right) e^{-i\sigma \frac{x^2}{2}} \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad (3)$$

$H_n(\xi)$ – полиномы Эрмита

$$\sigma = \sigma_0 + i\delta\sigma = \frac{1}{\bar{a}_i} \left[\frac{1+\eta}{I_0 e^{-b}} \frac{\omega}{\omega - \omega_i^*} \right]^{1/2} \frac{K_y V_{Ti}}{\omega L_s}$$

$$\omega = \omega_0 + i\,\mathrm{Im}^{(\omega)}\omega = \frac{-\omega_i^* I_0 e^{-b}}{1+\eta - I_0 e^{-b}} - i \frac{\bar{a}_i}{L_s} K_y V_{Ti} \frac{1+\eta}{1+\eta - I_0 e^{-b}} (2n+1)$$

Мы видим, что полученное решение затухает во времени из-за оттока энергии и является инфинитным в пространстве. Для вычисления работы частиц в поле волны более удобно воспользоваться финитным решением, которое получается при учёте затухания Ландау на ионах.

Финитное решение уравнения (2) мы будем искать в виде

$$\phi(x) = \phi_R(x)\ \phi_I(x) \tag{4}$$

где $\phi_I(x)$ медленно меняющаяся функция по сравнению с $\phi_R(x)$. Подставляя (4) в (2), получим следующее уравнение для $\phi_I(x)$:

$$2\sigma x \frac{d\phi_I(x)}{dx} + \frac{1}{\bar{a}_i^2} Q_I^{(i)}(x)\, \phi_I(x) = 0$$

Здесь мы пренебрегли членом со второй производной от медленно меняющейся функции и ограничились рассмотрением наиболее неустойчивой моды $n = 0$.

После интегрирования этого уравнения получим (положив в $Q_I(x)$ $\omega = \omega_0$):

$$\phi_I(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\Theta_{eff}} J_i\left(\frac{x}{\alpha_i}\right)\right)$$

где

$$\Theta_{eff} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma_0 \bar{a}_i^2\,, \quad J_i(\xi) = \int\limits_{1/|\xi|}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,, \quad \alpha_i = \frac{\omega_i L_s}{K_y V_{Ti}}$$

2. Для определения критерия стабилизации воспользуемся уравнением баланса энергии для возмущений. Последнее получается домножением уравнения (2) на $\phi^*(x)$ и последующим интегрированием от 0 до ∞. Интегрируя далее член со второй производной по частям, представляем баланс энергии в виде:

$$\frac{\bar{a}_i^2}{2i}\left(\phi^* \frac{d\phi}{dx} - \phi \frac{d\phi^*}{dx}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty} \left[Q_I^{(i)}(x) + Q_I^{(e)}(x)\right]_{\omega=\omega_0} |\phi|^2 dx -$$

$$- \int_0^\infty \mathrm{Im}\,\omega \left[\frac{\partial Q_e(x)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} |\phi|^2 dx = 0 \qquad (5)$$

Первый член в этом уравнении отвечает за отток энергии из области раскачки колебаний, а второй - определяет величину обмена энергией между резонансными частицами и возмущением. Вклад электронов в баланс энергии логарифмически расходится на малых x. Однако, при $x < x_A = \frac{\omega_0 L_s}{K_y V_A}$ (V_A - альфвеновская скорость) колебания становятся непотенциальными, т.к. при $x < x_A$ $\frac{\omega}{K_\parallel} > V_A$. Известно, что в этом случае дрейфовые волны затухают. Поэтому представляется разумным интеграл в (6) обрезать на $x = x_A$. В результате критерий стабилизации можно записать в виде:

$$\Theta \Lambda(\Theta_{eff}) > \left(\frac{m\eta}{M}\right)^{1/2} \frac{a_i}{\bar{a}_i} \frac{1 - I_0 e^{-b}}{1+\eta - I_0 e^{-b}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{\beta\eta}}^{\infty} \frac{dt}{t} \exp\left(-\frac{1}{\Theta_{eff}} J_1(t)\right) \qquad (6)$$

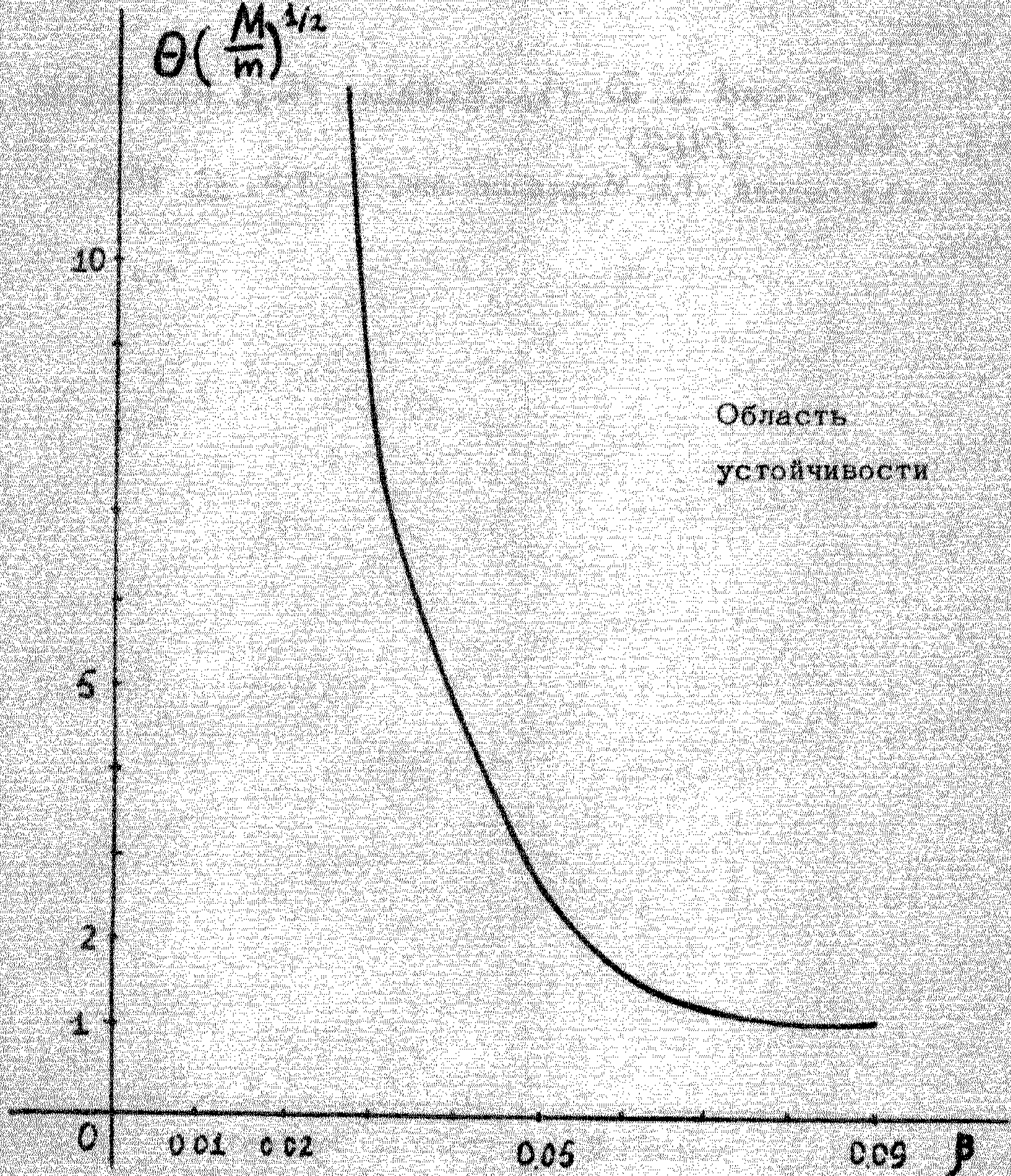
где

$$\Lambda(\Theta_{eff}) = \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{1}{\Theta_{eff}} J_1(t)\right), \quad \beta = \frac{8\pi n T_e}{H^2}$$

С другой стороны, как следует из /4/ при конечных β универсальная неустойчивость стабилизируется даже при $\Theta = 0$.

В /4/ найдена функция $\beta = \beta(K_y a_i)$, разделяющая области устойчивости и неустойчивости на плоскости (β , $K_y a_i$). Будем считать, что соответствующая область устойчивости во всяком случае остается устойчивой и при $\Theta \neq 0$. Тогда, исключая $K_y a_i$ из $\beta = \beta(K_y a_i)$ работы /4/ и подставив в (6) получим искомое условие устойчивости $\Theta = \Theta(\beta)$. В явном виде это условие имело бы весьма громоздкий вид. На рис.1 изображена зависимость $\Theta = \Theta(\beta)$, найденная численным интегрированием для дейтериевой плазмы $\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} = 60$ и $\eta = 1$.

Автор благодарит А.А.Галеева, Р.З.Сагдеева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.



$\theta\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$
10
5
2
1
0
0.01
0.02
0.05
0.09
β
Область
устойчивости

Рис. 1.

Литература

/1/ А.А.Галеев, ЖЭТФ, 44, 1920 (1963).

/2/ А.Б.Михайловский, Л.В.Михайловская, Ядерный синтез, 3, 28 (1963).

/3/ H.L. Berk and L.D. Pearlstein, Phys. Rev. Letters, 23, 220 (1969)

/4/ А.Б.Михайловский, Л.В.Михайловская, ЖЭТФ, 45, 1566, (1963).

Ответственный за выпуск Е.В.Мишин
Подписано к печати 18.П.1970 г.
Усл. 0,3 печ.л., тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 10
ПРЕПРИНТ
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,нв