35

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ 341

А.Б.Михайловский, А.З.Паташинский,

А.М.Фридман, Я.Г.Эпельбаум

УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРОВОГО СКОПЛЕНИЯ ЗВЁЗД С БОЛЬШИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ КРАСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ

Новосибирск

1969

А.Б.Михайловский, А.З.Паташинский,
А.М.Фридман, Я.Г.Эпельбаум

УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРОВОГО СКОПЛЕНИЯ ЗВЕЗД С БОЛЬШИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ КРАСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе исследуется устойчивость сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям масс (модель шарового скопления звёзд). Такая система , как показал Эйнштейн, может обладать большим гравитационным красным смещением и в то же время быть посчитана в ньютоновском приближении.

Поскольку вероятность парного столкновения звёзд ничтожно мала, анализ устойчивости проводится с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения Больцмана-Власова. Излагается метод решения этого уравнения для гравитирующей системы с однородной плотностью вращающихся масс аналогичный известному методу интегрирования по траекториям в физике плазмы. В случае неоднородной плотности устойчивость системы относительно радиальных возмущений оказалось удобным исследовать в приближении многопотоковой гидродинамики.

Доказанная в настоящей работе устойчивость рассматриваемой системы относительно произвольных возмущений, возможно, объясняет тот экспериментальный факт, что возраст шаровых скоплений звёзд велик по сравнению с возрастом спиральных галактик, а также свидетельствует в пользу идеализированной модели квазара, подобной рассмотренной в работе - устойчивой равновесной системы с большим гравитационным красным смещением.

Введение

В последнее время среди астрофизиков значительно возрос интерес к устойчивости сферически-симметричной системы гравитирующих масс, вследствие чего количество теоретических работ на эту тему весьма возросло. Толчком к усилению активности в области теории гравитационной устойчивости сферических масс, явился мощный поток информации, связанной с открытием и изучением квазизвездных источников. Неизменность среднего потока излучения квазара во времени указывает на отсутствие коллапса, что при характерной массе $M \sim 10^8 - 10^{10} M_\odot$ может объясняться лишь очень специальной равновесной функцией распределения плотности частиц, составляющих источник, по энергиям /1/. Выбор той или иной равновесной функции распределения для построения модели с большим гравитационным красным смещением z, прежде всего должен определяться устойчивостью системы описываемой этой функцией, относительно малых возмущений стационарного состояния.

Простейшей моделью равновесной системы с большим z является, на наш взгляд, сферически-симметричная система гравитирующих частиц, вращающихся по круговым траекториям вокруг общего центра масс (рис.1).

В настоящей работе показана устойчивость такой системы относительно произвольных малых возмущений. Эта система может одновременно служить в качестве модели шарового скопления /2/. Доказанная устойчивость шарового скопления звёзд относительно произвольных возмущений, возможно, объясняет тот экспериментальный факт, что возраст шаровых скоплений звёзд велик по сравнению с возрастом спиральных галактик.

Потенциал рассматриваемой системы тем меньше отличается от сферически-симметричного, чем больше число частиц содержит сфера произвольного радиуса, которую в данном случае можно рассматривать как дебаевскую сферу /3/. Если число частиц в дебаевской сфере велико, можно пренебречь парным взаимодействием частиц друг с другом /3/. Действительно, если в системе между N частицами имеет место только гравитационное взаимодействие, то парное взаимодействие оказывается в равновесной системе, грубо говоря, в N раз (точнее $N/\ln N$ слабее коллективного взаимодействия. Следовательно, в первом приближении задача сводится к движению частиц в коллективном самосогласованном гравитационном поле[x)]. Бесстолкновительное движение частиц описывается кинетическим уравнением Больцмана – –Власова /4–7/. В § 2 излагается метод решения кинетического уравнения аналогичный известному методу интегрирования по траекториям в физике плазмы /9/. В § 3 приведён спектр собственных частот системы, представляющий собой дискретный набор действительных чисел.

В заключении работы описываются возможные механизмы неустойчивости аналогичных систем, которые в данном случае по тем или иным причинам оказались подавленными.

В Приложении к статье обсуждается возможность описания рассмотренной выше системы в приближении многопотоковой гидродинамики. В качестве примера найден в этом описании спектр радиальных колебаний неоднородного шара.

§ 2. Вывод уравнения собственных колебаний

Пусть в единичном интервале координатно-скоростного пространства находится $f(\vec{r},\vec{v},t)$ частиц. Функция f удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\partial f/\partial t + \vec{v}\,\partial f/\partial\vec{r} + \dot{\vec{v}}\,\partial f/\partial\vec{v} = 0 \qquad (1)$$

где $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}(\varphi)$, φ – гравитационный потенциал. Последний, в свою очередь, связан уравнением Пуассона с $f(\vec{r},\vec{v},t)$

$$\Delta\varphi = 4\pi G n \qquad (2)$$

в котором

$$n = \int f\, d\vec{v} \qquad (3)$$

G – гравитационная постоянная.

---

x) Эта оценка не применима, когда имеются прямые неупругие столкновения звёзд. В дальнейшем будут рассматриваться системы, в которых неупругие столкновения настолько редки, что ими можно пренебречь (так же, как упругими).

Будем использовать сферические координаты r, θ, φ и характеризовать скорость величинами V_r, $V_\perp = (V_\theta^2 + V_\varphi^2)^{1/2}$, $\alpha = \mathrm{arctg}(V_\varphi/V_\theta)$. В этих переменных уравнения (1) записывается в виде

$$\hat{L} f + V_r\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{V_\perp}{r}\frac{\partial f}{\partial V_\perp}\right) + \left(\frac{V_\perp^2}{r} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial V_r} - \vec{\nabla}_\perp\varphi\,\frac{\partial f}{\partial\vec{V}_\perp} = 0 \qquad (4)$$

где

$$\vec{\nabla}_\perp\varphi\frac{\partial}{\partial\vec{V}_\perp} = \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial V_\perp} - \frac{1}{rV_\perp}\left(\sin\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha} \qquad (5)$$

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V_\perp}{r}\left[\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \mathrm{ctg}\,\theta\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right] \qquad (6)$$

Линеаризуем уравнения (2) – (4), обозначая равновесные величины индексом нуль, а возмущенные индексом единица. Полагаем, что в равновесном состоянии потенциал зависит только от радиуса, $\varphi_0 = \varphi_0(r)$, а частицы не имеют радиальной скорости и их число в каждой точке сферы произвольного радиуса r не зависят от θ и φ и симметрично по α, $f_0 = \delta(V_r)\cdot F(r, V_\perp)$. Для функции F из (4) получаем уравнение

$$\left(\frac{V_\perp^2}{r} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)F = 0 \qquad (7)$$

Это означает, что F δ – функциональна по $V_\perp$. Нормировочный коэффициент находим с помощью (3)

$$F = \frac{n_0}{2\pi V_0}\,\delta(V_\perp - V_0) \qquad (8)$$

где $V_0 = \left(r\, \partial\Phi_0/\partial r\right)^{1/2}$; n_0 – равновесная плотность. Последнюю считаем независимой от радиуса, что, в согласии с (2), оправдано при радиальной зависимости Φ_0 вида

$$\Phi_0 = \Omega^2 r^2/2 \tag{9}$$

где $\Omega^2 = \dfrac{4\pi G n_0}{3}$

$$\tag{10}$$

при этом $V_0 = \Omega r$

В линейном приближении из (4) следует

$$\hat{L} f_1 + V_r\left(\frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{V_\perp}{r}\frac{\partial f_1}{\partial V_\perp}\right) + \left(\frac{V_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}\right)\frac{\partial f_1}{\partial V_r} = \tag{11}$$

$$= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial f_0}{\partial V_r} + \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial f_0}{\partial V_\perp}$$

Учитывая, что $f_0 \sim \delta(V_r)\,\delta(V_\perp - V_0)$, находим, что (11) удовлетворяется при f_1 вида

$$f_1 = \delta(V_r)\left[A\,\delta(V_\perp - V_0) + B\,\delta'(V_\perp - V_0)\right] - C\,\delta'(V_r)\,\delta(V_\perp - V_0) \tag{12}$$

где штрих – производная по аргументу. Из (11) находим, что функции A,B,C удовлетворяют уравнениям:

$$\hat{L}^0 A - \frac{1}{r\Omega}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)B + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(C r) = 0 \tag{13}$$

$$\hat{L}^0 B - 2\Omega C = \frac{n_0}{2\pi\Omega^2 r^2}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_1 \tag{14}$$

$$\hat{L}^0 C + 2\Omega B = \frac{-n_0}{2\pi\Omega r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \tag{15}$$

Оператор $\hat{L}^0$ отличается от оператора $\hat{L}$ заменой $V_\perp/r$ на Ω. Согласно (3), при f_1 вида (12), возмущение плотности равно:

$$n_1 = \int_0^{2\pi}(\Omega r A - B)\,d\alpha \tag{16}$$

Путь решения уравнений (13) – (15) и отыскания n_1 состоит в следующем. Умножая обе части равенства (24) на оператор $\hat{L}^0$ и выражая с помощью (15) величину $\hat{L}^0 C$ через B и Φ_1, получаем:

$$(\hat{L}^0 + 2i\Omega)(\hat{L}^0 - 2i\Omega)B = \frac{n_0}{2\pi\Omega^2 r^2}\left[\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{L}^0\Phi_1 + 2\Omega^2 r\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right] \tag{17}$$

Отсюда

$$B = \frac{n_0}{2\pi\Omega^2 r^2}(\hat{L}^0 - 2i\Omega)^{-1}(\hat{L}^0 + 2i\Omega)^{-1}\left[\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{L}^0\Phi_1 + 2\Omega^2 r\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right] \tag{18}$$

где степень – 1 означает обратный оператор, действие которого разъясним несколько позже.

Функцию A с помощью уравнений (13) и (15) выражаем через B и Φ_1 :

$$A = \frac{1}{r\Omega}\hat{L}^{0\,-1}\left[\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)B - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{L}^0 B\right) + \frac{n_0}{4\pi\Omega^2}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_1}{r}\right)\right] \tag{19}$$

Этот результат подставим в (16),

$$n_1 = -\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\hat{L}^{0\,-1}\left[B + \frac{n_0}{2^2\pi\Omega^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi_1}{r}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left[rB + \frac{n_0}{2\pi r}\frac{\Phi_1}{\Omega^2}\right]\right\}d\alpha \tag{20}$$

Уравнение (20) совместно с (18) даёт искомую связь n_1 с Φ_1, необходимую для самосогласованного описания возмущений посредством уравнения

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G n_1(\Phi_1) \tag{21}$$

Теперь приведем вид оператора $(\hat{L}^0)^{-1}$. Пусть функция $X = X(t, \theta, \varphi, \alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}^0 X = a \tag{22}$$

где a – некоторая известная функция переменных t, θ, φ, α, равная нулю при $t = -\infty$. Оператор $\hat{L}^0$ можно представить в виде

$$\hat{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial \alpha} \tag{23}$$

где производные $d(\theta, \varphi, \alpha)/dt$ означают скорости изменения углов θ, φ, α частицы, движущейся по сфере радиуса r со скоростью $V_1 = r\Omega$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega\cos\alpha, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\Omega\sin\alpha\, ctg\,\theta \tag{24}$$

Перейдём в уравнении (22) от переменных θ, φ, α к переменным θ_0, φ_0, α_0, связанным с θ, φ, α, t соотношениями

$$\theta_0 = \theta - \Omega\int_{t_0}^{t}\cos\alpha\, dt$$
$$\varphi_0 = \varphi - \Omega\int_{t_0}^{t}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\, dt \tag{25}$$
$$\alpha_0 = \alpha + \Omega\int_{t_0}^{t}\sin\alpha\, ctg\,\theta\, dt$$

Величины θ_0, φ_0, α_0 обозначают углы $\theta(t_0)$, $\varphi(t_0)$, $\alpha(t_0)$, которыми при $t = t_0$ обладает частица, характеризующаяся в момент времени t углами $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\alpha = \alpha(t)$. В новых переменных уравнение (22) имеет вид

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{\theta_0, \varphi_0, \alpha_0} = a\left[t, \theta(t, \theta_0, \varphi_0, \alpha_0), \varphi(t, \theta_0, \varphi_0, \alpha_0) \ldots\right] \tag{26}$$

Отсюда

$$X = \int_{-\infty}^{t} a\left[t', \theta(t'), \varphi(t'), \alpha(t')\right] dt' \tag{27}$$

Возвращаясь в этом уравнении снова к переменным θ, φ, α и вспоминаем, что $X = (\hat{L}^0)^{-1} a$, находим вид обратного оператора

$$\hat{L}^{0-1} a = \int_{-\infty}^{t} a\left\{t', \theta\left[t', \theta_0(t, \theta, \varphi, \alpha), \ldots\ldots\right]\right\} dt' \tag{28}$$

где многоточием обозначены φ_0, α_0, выраженные через t, θ, φ, α. Аналогичным путём находим

$$\left[\hat{L}^0 \pm 2i\Omega\right]^{-1} a = \int_{-\infty}^{t} e^{\mp 2i\Omega(t - t')} a(t')\, dt' \tag{29}$$

Теперь опишем конкретный путь вычисления интегралов типа (28), (29). Пусть возмущение потенциала имеет вид:

$$\Phi_1 = \chi_e(r)\, \Phi_1^e(t, \theta, \varphi) \tag{30}$$

где
$$\Phi_1^l = e^{-i\omega t}\, Y_m^l(\varphi,\theta)$$
$$Y_m^l(\varphi,\theta) \equiv e^{-im(\frac{\pi}{2}-\varphi)}\, P_{m0}^l(\cos\theta) \tag{31}$$

$P_{m0}^l(\cos\theta)$ – функции, с точностью до коэффициентов совпадающие с полиномами Лежандра (см.книгу Виленкина /10/). Все нормировочные коэффициенты включены в $\chi_2(r)$.

При α, равном правой части (31), уравнения (28), (29) записываются так
$$(\hat{L}^c + iq\Omega)^{-1}\alpha = e^{-i\omega t}\int_0^\infty e^{i(\omega-q\Omega)\tau}\, Y_m^l[\varphi(t-\tau), \theta(t-\tau)]\, d\tau \tag{32}$$
$$q = 0, \pm 2$$

переменная интегрирования t' заменена на $\tau = t - t'$. Из уравнений движения (24) находим:
$$\cos\theta(t) = \cos\gamma \sin\psi(t)$$
$$tg(\tilde{\varphi}_0 - \varphi(t)) = ctg\,\psi(t)/\sin\gamma$$
$$ctg\,\alpha(t) = -ctg\,\gamma \cos\psi(t) \tag{33}$$

где $$\psi(t) = \psi_0 + \Omega(t - t_0) \tag{34}$$

Здесь введены константы $\tilde{\varphi}_0$, ψ_0, γ, которые можно выразить через θ_0, φ_0, α_0, рассмотрев (33) при $t = t_0$.

Учитывая (33) и используя теорему сложения, представим Y_m^l в виде суммы трехиндексных функций /10/:

$$Y_m^l[\theta[t-\tau, \tilde{\varphi}_0, \gamma, \psi_0], \varphi[t-\tau, \tilde{\varphi}_0, \gamma, \psi_0]] = \tag{35}$$
$$= \sum_{s=-l}^{l} T_{ms}^l\left[\tfrac{\pi}{2} - \tilde{\varphi}_0, \gamma - \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} - \psi(t)\right] P_{s0}^l(0) \int_0^\infty e^{i(\omega-q\Omega)\tau}\, d\tau$$

Здесь функция
$$T_{ms}^l[\varphi_1, \theta, \varphi_2] = e^{-im\varphi_1 - is\varphi_2}\, P_{ms}^l(\cos\theta) \tag{36}$$

С помощью (36) преобразуем правую часть (32):
$$[L^c + iq\Omega]^{-1}\alpha = e^{-i\omega t}\sum_{s=-l}^{l} T_{ms}\left[\tfrac{\pi}{2} - \tilde{\varphi}_0, \gamma - \tfrac{\pi}{2}, \tag{37}\right.$$
$$\left.\tfrac{\pi}{2} - \psi(t)\right] P_{s0}^l(0) \times \int_0^\infty e^{i[\omega-(q+s)\Omega]\tau}\, d\tau$$

Интеграл по τ вычисляется с учётом правила обхода Ландау ($\omega \to \omega + i\Delta$) $\Delta > 0$):
$$\int_0^\infty \exp\{i[\omega - (q+s)\Omega]\tau\}\, d\tau = i/\omega - (q+s)\Omega \tag{38}$$

Затем используя преобразование (являющееся так же, как и (35), следствием теоремы сложения):

$$T^{\ell}_{ms}\left[\frac{\pi}{2}-\tilde{\varphi}_0,\ \xi-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}-\psi(t)\right]=\sum_{s'=-\ell}^{\ell} T^{\ell}_{ms'}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi(t),\ \theta(t),\ \frac{\pi}{2}-\alpha(t)\right]\times e^{-is\pi}P^{\ell}_{s's}(0) \tag{39}$$

и соотношения (25), переходим от переменных $\tilde{\varphi}_0$, ξ, ψ_0 к переменным θ, φ, α. Этим завершается вычисление функции B.

Представляем результат в (20) и, интегрируя по углу α, получаем выражение для возмущенной плотности:

$$n_1= e^{-i\omega t}Y^{\ell}_m(\varphi,\theta)\frac{n_0}{\Omega^2}\left\{\left[\frac{d^2\chi_\ell}{dr^2}+2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\chi_\ell}{r}\right)\right]\right.$$
$$\times\sum_{s=-\ell}^{\ell}|P^{\ell}_{s0}(0)|^2\frac{+\Omega^2}{4\Omega^2-(\omega-s\Omega)^2}+\frac{\chi_\ell}{r^2}\sum_{s=-\ell}^{\ell}|P^{\ell}_{s0}(0)|^2\times$$
$$\left.\times\ \frac{2\omega\Omega^2+s\Omega\omega(s\Omega-\omega)}{(s\Omega-\omega)\left[(\omega-s\Omega)^2-4\Omega^2\right]}\right\} \tag{40}$$

где

$$|P^{\ell}_{s0}(0)|^2=\frac{(\ell+s)!\,(\ell-s)!}{\left[\left(\frac{\ell+s}{2}\right)!\left(\frac{\ell-s}{2}\right)!\,2^{\ell}\right]^2} \tag{41}$$

Преобразуем правую часть (40), разлагая функции частоты ω на про́стые дроби. Таким путём уравнение Пуассона (21) сводится к виду

$$(1+a_\ell)\,\Delta\chi_\ell=0 \tag{42}$$

Здесь

$$\Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\ell(\ell+1)/r^2 \tag{43}$$

$$a_0=3\Omega^2/\omega^2-4\Omega^2$$

$$a_1=\frac{(\omega^2-3\Omega^2)\,3\Omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)(\omega^2-9\Omega^2)}$$

$$a_2=\frac{3\Omega^2(\omega^2-7\Omega^2)}{(\omega^2-16\Omega^2)(\omega^2-4\Omega^2)} \tag{44}$$

$$a_\ell=\sum_{s=-(\ell+2)}^{\ell+2}\alpha^{\ell}_s\Big/\frac{\omega}{\Omega}-s;\quad \ell=3,4,5\ldots.. \tag{45}$$

Суммирование ведется по s в (45) при условии чётности числа $(\ell+s)$

$$\alpha^{\ell}_s=\frac{3}{4}\left\{|P^{\ell}_{s-2}(0)|^2-|P^{\ell}_{s+2}(0)|^2\right\}\quad |s|\le\ell-2$$
$$\alpha^{\ell}_{\pm\ell}=\mp\frac{3}{4}|P^{\ell}_{\ell-2}(0)|^2 \tag{46}$$
$$\alpha^{\ell}_{\pm(\ell+2)}=\mp\frac{3}{4}|P^{\ell}_{\ell}(0)|^2$$

Уравнение (42) удовлетворяется при произвольной радиальной зависимости φ_1, если

$$1+a_\ell=0 \tag{47}$$

Это и есть искомое дисперсионное уравнение собственных колебаний однородного шара. Случай $\Delta\chi_\ell=0$ соответствует отсутствию возмущений.

§ 3. Частоты собственных колебаний

Рассмотрим следствия, вытекающие из дисперсионного уравнения (47), при различных орбитальных числах ℓ. Возмущения $\ell = 0$, соответствующие радиальным смещениям шара, имеют частоту

$$\omega^2 = \Omega^2 \tag{48}$$

Этот результат совпадает с полученным другим способом (в приближении многопотоковой гидродинамики) в Приложении. Случай $\ell = 1$, соответствующий дипольному возмущению, оказывается выделенным в том смысле, что требует дополнительного условия – сохранения полного импульса системы[x)]

$$\int_0^R \rho_1 r^3 dr = 0 \tag{49}$$

Условие (49), как легко показать, эквивалентно $\Delta\lambda = 0$ (только при $\ell = 1$), т.е. отсутствию возмущений $\rho_1 = 0$.

Устойчивость имеет место при всех остальных ℓ. В случае $\ell = 2$ квадраты собственных частот равны

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(17 \pm \sqrt{117}\right)\Omega^2 \tag{50}$$

При $\ell = 3$ из (45) находим

$$a_3 = \frac{3\Omega^2(\omega^2 - 13\Omega^2)\,\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - 9\Omega^2)(\omega^2 - 25\Omega^2)} \tag{51}$$

При $\ell \geq 3$ из соотношений (45 – 47) следует:

$$Im\, a_\ell(\omega^2) = 0; \quad Im\, \omega^2 = 0; \quad Re\left[1 + a_\ell(\omega^2)\right] = 0; \tag{52}$$

---

x) Для всех остальных ℓ сохранение полного импульса автоматически обеспечивается угловой зависимостью $\rho_1(\theta)$.

Используя соотношение полноты и нормировку для $P_{s\ell}^{\ell}(\cos\theta)$

$$\sum_{s=-\ell}^{+\ell} \left| P_{s\ell}^{\ell}(\cos\theta) \right|^2 = 1 \tag{53}$$

для $\omega^2 \leq 0$ приходим к противоречию с (52):

$$Re\left[1 + a_\ell(-|\omega^2|)\right] > 0 \tag{54}$$

Заметим, что устойчивость системы относительно радиальных возмущений очевидна из качественных соображений.

Действительно, обратимся прежде всего к работе /11/, где доказана устойчивость рассматриваемой системы относительно радиальных возмущений с помощью энергетического принципа, развитого для вращающихся гравитационных систем /12/, /13/. Вследствие известного факта неизменности момента вращения система, находящаяся в положении равновесия на "дне" потенциальной "ямы", при радиальных возмущениях увеличивает свою потенциальную энергию и тем самым переходит в неравновесное состояние (рис.2). Дальнейший процесс – колебание – происходит уже спонтанно.

Теперь представим себе, что систему подвергли нерадиальным возмущениям, вследствие чего форма кривой потенциальной энергии $U = U(r)$ изменилась: $U = U(r, \theta, \varphi)$. В этом случае система, перейдя из положения r_0 в положение $r_2(\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0)$, может вновь занять точку минимума на кривой $U = U(r, \theta_0, \varphi_0)$ (рис.3). Таким образом устойчивость системы по отношению к таким возмущениям, a *priori* не очевидна.

Более того, качественное исследование устойчивости с помощью различного рода критериев, используемых в физике плазмы, на первый взгляд приводит к выводу о неустойчивости рассмотренной нами системы. Так например, критерий пучковой неустойчивости $\partial f_0/\partial v > 0$ выполняется для нашей системы.

Этот критерий, как известно, является необходимым, но не достаточным для развития неустойчивости. Для того, чтобы неустойчивость развивалась, требуется достаточная близость $\max f_0$. В нашем случае расстояние между максимумами равно величине скорости (или разброса скоростей, связанного с различием на –

правлений скоростей частиц), что приводит к устойчивости системы.

Критерий гравитационной неустойчивости /7/, использующий термины типа анизотропной температуры, в нашем случае не может быть применен. Дело в том, что понятие температуры для нашей системы не имеет четкого смысла. Температура, как мера разброса частиц по энергиям, в нашем случае равна нулю и изотропна. Если же определить температуру, как меру энергии частицы, то радиальная температура T_r равна нулю, а температура в шаровом слое $T_\perp \sim V_\perp^2$, и в этом смысле имеется анизотропия температур. Для такой "температуры" выполнен критерий анизотропной неустойчивости, но использование критерия лишено чёткого смысла.

§ 4. Заключение

Мы рассмотрели малые возмущения сферически-симметричной гравитирующей системы вращающихся тел, полагая, что траекторией каждого тела является окружность и что средняя массовая плотность не зависит от радиуса. Показано, что при этих предположениях частоты всех возмущений вещественны, т.е. такая система устойчива. В реально наблюдаемых шаровых скоплениях плотность всегда падает к краю довольно резко $1/r^2 \div 1/r^3$. Энергетические оценки позволяют предположить, что системы, аналогичные рассмотренной, с плотностью, падающей к краю, имеют большой запас устойчивости по сравнению с однородной системой. Разумно предположить, что случай некруговых орбит не изменит вывода об устойчивости системы.

В работах /8, 13/ показано, что эволюция звездных систем более сложного типа, содержащих две или более подсистемы, приводит к образованию спиральных рукавов.

Вывод настоящей работы об устойчивости шарового скопления звёзд совместно с результатами /8, 13/, свидетельствует в пользу гипотезы Оорта /14,15/ об эволюции галактик. Согласно этой гипотезе различные формы галактик рассматриваются, в отличие от Хабла /16/, не как последовательные стадии эволюционного развития, а как результат различий в начальных условиях их возникновения (в зависимости от величины суммарного момента количества движения и др.).

Авторы глубоко благодарны Я.Б.Зельдовичу за постоянный интерес к работе и ценные советы.

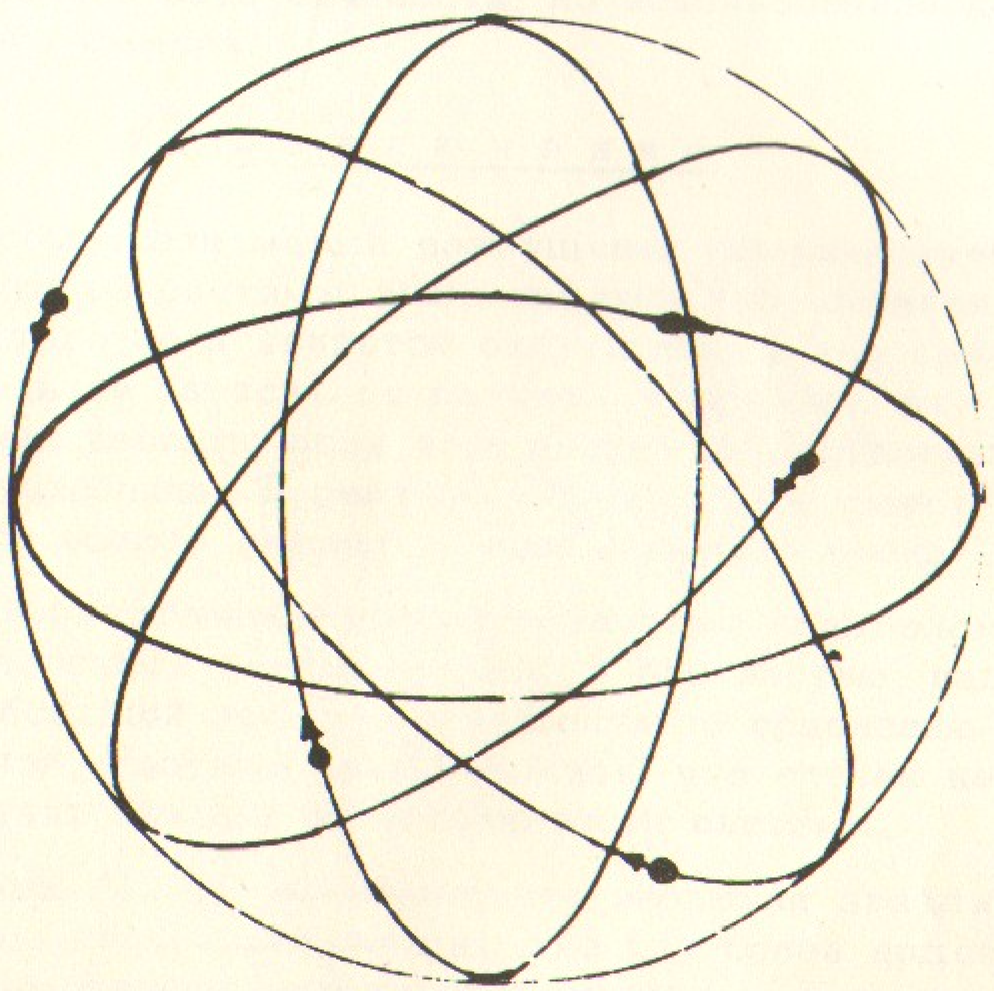

Рис.1. Модель Эйнштейна шарового скопления звёзд. Все звезды движутся по круговым траекториям вокруг общего центра масс.

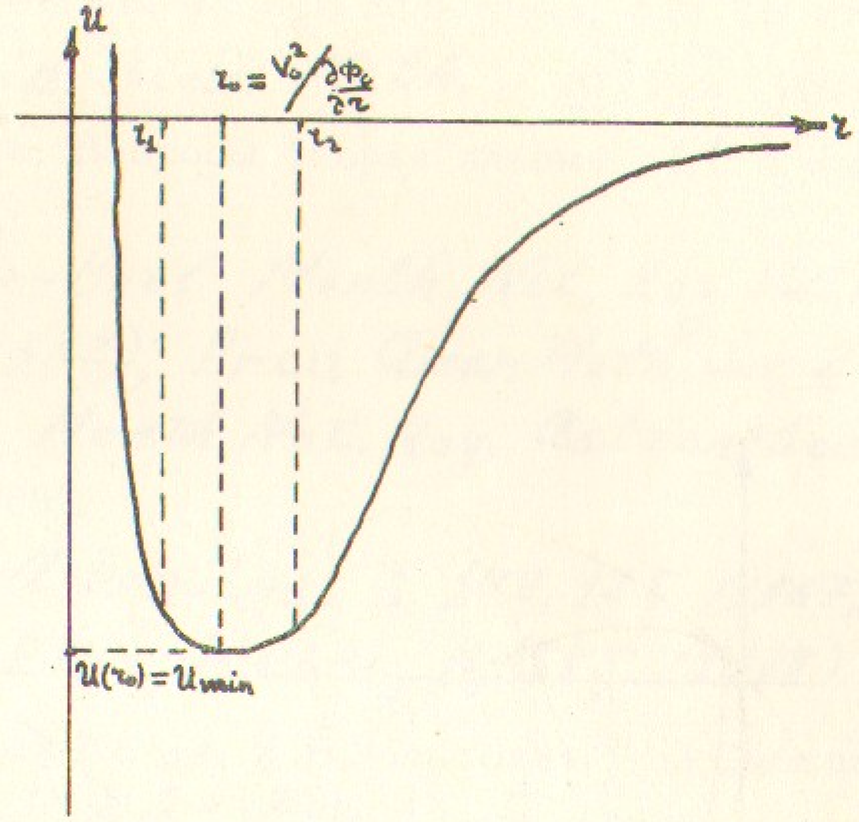

Рис.2. Если рассмотреть произвольную сферу радиуса r_0 , то при малых радиальных возмущениях системы "внешние" сферы не оказывают на неё влияния (в отсутствие само - пересечений). Такая сфера находится лишь в центральном поле "внутренних" сфер, причём в отсутствие самопересечений задача о колебаниях любой сферы в поле других оказывается кеплеровской. Тогда потенциальная энергия сферы описывается кривой $U(r)$, показанной на рисунке. Точка r_0 соответствует стационарному состоянию системы, когда все звёзды движутся по окружностям. Точки r_1 и r_2 соответствуют предельным радиусам сферы при радиальных возмущениях. Как видно из рисунка $U(r_1)$, $U(r_2) > U(r_0)$, что доказывает устойчивость системы относительно радиальных возмущений.

Простые оценки показывают, что влиянием эффектов самопересечений при малых колебаниях можно пренебречь. Строгий учёт влияния самопересечений, выполненный в /11/, показал, что самопересечения делают систему еще более устойчивой относительной радиальных возмущений.

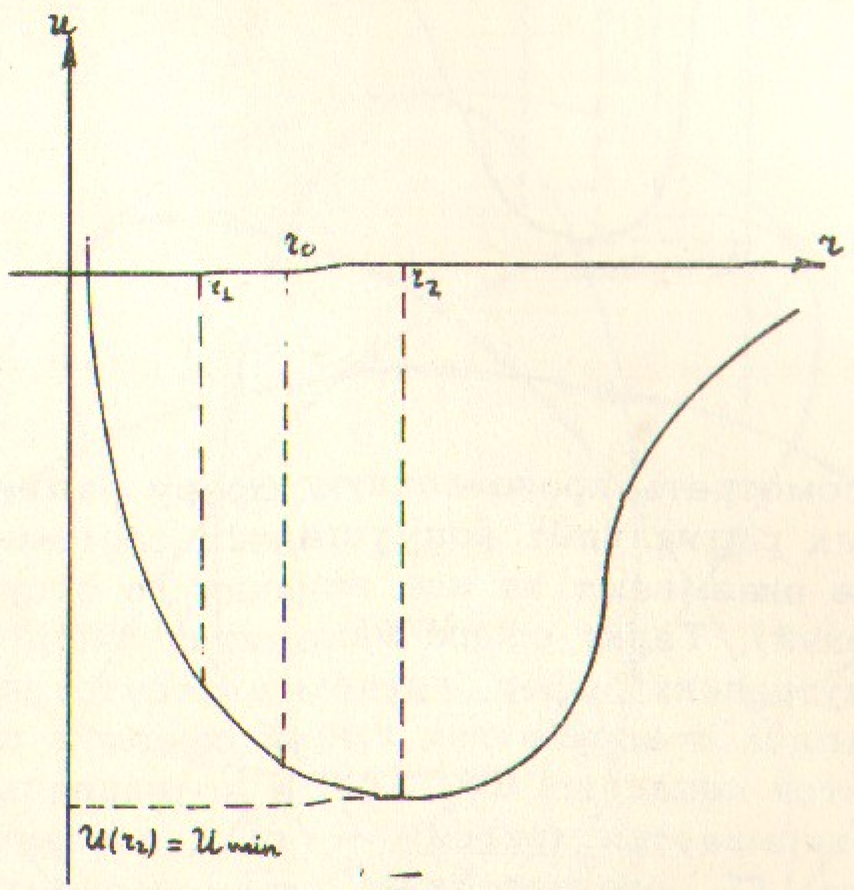

Рис.3. Та же сфера радиуса r_0, подвергнутая нерадиальным возмущениям. Поскольку при нерадиальных возмущениях квадрат момента сферы $M^2 = \sum_i M_i^2$ не сохраняется, форма первоначальной кривой $U(r)$ в отличие от случая радиальных возмущений изменяется. На рисунке изображена кривая $U = U(r, \theta_0, \varphi_0)$, минимум которой находится в точке r_2 $(\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0)$. Устойчивость системы при этом заранее не очевидна.

Литература

1. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович. АЖ (в печати).
2. A. Einstein Ann. Math. 40, 922 (1939).
3. Б.А.Трубников. Вопросы теории плазмы, т.1, Госатомиздат, М., 1963.
4. D. Lynden-Bell Month. Not. Roy Astron. Soc. 124. 279 (1962); Proc. Amer. Math. Soc 2 (1967)
5. P. Sweet, Month. Not. Roy. Astron. Soc 125, 285 (1963).
6. E.P. Lee Astrophys. J. 148, 125 (1967)
7. C.S. Wu Phys. Fluids, 11, 545 (1968)
8. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, Р.З.Сагдеев, А.М.Фридман, ПМТФ, № 3, 3 (1969).
9. M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, N. Rostoker Nucl. F. Suppl. 1, 143 (1962)
10. Н.Я.Виленкин. Специальные функции и теория групп, Изд-во "Наука", 1965.
11. Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, А.М.Фридман. ДАН СССР, 182, №4 (1968).
12. А.М.Фридман, АЖ, 43, 327 (1966).
13. В.Л.Поляченко, А.М.Фридман, АЖ (в печати).
14. J.H. Oort Scientific American 195, 101 (1956).
15. J.H. Oort Structure and Evolution of the Galactic System, доклад на съезде МАС в Гамбурге, 1964 г.
16. J. Jeans, Astronomy and Cosmogony Cambridge (1929)
17. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).

Ответственный за выпуск Я.Г.Эпельбаум
Подписано к печати 25 ноября 1969 г.
Усл. 1 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ № 341

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР