34

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 337

Г.П.Берман, Г.М.Заславский

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ

НОВОСИБИРСК

1969

Г.П.Берман, Г.М.Заславский

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются нелинейные двумерные ионно-звуковые движения со скоростями, слабо превышающими скорость звука. В одномерном случае это приближение приводит к уравнению Кортевега-де Вриза. В двумерном случае решение строится в виде разложения по одномерным нелинейным периодическим волнам. Параметром разложения является величина, обратная корню из аналога числа Рейнольдса для данной задачи. Последнее предполагается большим, что соответствует большой нелинейности. Рассмотрено взаимодействие двух и резонансное взаимодействие трех нелинейных волн. В тех случаях, когда возбуждено большое число волн, получено условие хаотизации фаз волн и построено основное кинетическое уравнение для ансамбля нелинейных волн. В общем случае основного кинетического уравнения найдено точное решение для многочастичной функции распределения, приводящее к постоянному потоку энергии по спектру. Это решение соответствует стационарной однородной турбулентности и с его помощью найден спектр турбулентности. Показано, каким образом полученные результаты обобщаются на трехмерный случай.

§ 1. Введение

Для описания турбулентных процессов в плазме существуют хорошо развитые методы в тех случаях, когда турбулентность является слабой (см., например, обзоры /1,2/). В альтернативном случае "сильной турбулентности" не существует достаточно строгих методов рассмотрения. Отчасти, это связано с отсутствием одного чёткого критерия сильной турбулентности и большим разнообразием параметров в плазме. Обычно с сильной турбулентностью связывают турбулентные процессы, которые не могут быть описаны методами слабой турбулентности. К таким случаям относятся процессы с сильной нелинейностью, с инкрементом неустойчивости, большим или порядка частоты колебаний, процессы, в которых отсутствует расцепление тех или иных корреляций и т.п. Вообще говоря, все перечисленные условия не эквивалентны друг другу и их можно включить в понятие сильной турбулентности.

В настоящей работе излагается теория определенного класса задач турбулентной плазмы в условиях, когда нелинейность не является малой. Этот класс объединен тем общим свойством, что в одномерном случае существуют точные стационарные решения задачи в виде нелинейных периодических волн и солитонов (уединенных волн). Для конкретности мы рассматриваем ниже нелинейные ионнозвуковые движения плазмы в двумерном случае (трехмерный случай исследуется аналогично). Используемый метод близок к схеме решения в одномерном случае /3/. Тем не менее, специфика задачи с несколькими измерениями приводит к ряду нетривиальных отличий от одномерных движений.

Основой построения теории является разложение решения по точным нелинейным одномерным решениям, представляющим нелинейные периодические волны, движущиеся в различных направлениях. Известны примеры эффективности подобного рода разложений /4/. В качестве первого шага рассматриваются элементарные процессы взаимодействия двух (§ 3) и трех (§ 4) нелинейных волн. Это позволяет строго определить параметр разложения и перейти к случаю взаимодействия большого числа нелинейных волн (§ 5). Далее выясняются условия, при которых фазы волн в результате взаимодействия хаотизируются и выводится основное кинетическое уравнение для волн (§ 5). В § 6,7 преводится анализ турбулентного движения и находится точное решение, соответствующее постоянному потоку энергии по спектру. Это решение позволяет определить спектр турбулентности в условиях сильной нелинейности без расцепления корреляционных моментов от функции распределения.

§ 2. Основные уравнения

Ионнозвуковые движения в плазме описываются уравнениями:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec\nabla (n\vec\nabla\Phi) + n_0 \vec\nabla(\vec\nabla\Phi) = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec\nabla\Phi)^2 = -\frac{e}{M}\varphi ; \quad \vec\nabla\Phi = \vec v \tag{2.1}$$

$$\Delta\varphi = -4\pi e\left(n_0 + n - n_0 \exp\frac{e\varphi}{T}\right)$$

где n, n_0 - соответственно возмущение и невозмущенное значение плотности ионов, $\vec v$ - скорость ионов, T - температура электронов. При $kr_d \ll 1$, $e\varphi \ll T$ (r_d - дебаевский радиус, k - волновое число возмущения) система (2.1) сводится к следующей /5/:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0\vec\nabla(\vec\nabla\Phi) + \vec\nabla(n\vec\nabla\Phi) = 0$$

$$n_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} + c^2\left(n + r_d^2\Delta n - \frac{1}{2}\frac{n^2}{n_0}\right) + \tag{2.2}$$

$$+ \frac{1}{2}n_0(\vec\nabla\Phi)^2 = 0; \qquad c^2 = T/M$$

Переходим в (2.2) к безразмерным переменным: $n_0 = c = r_d = 1$, и производим разложение величин в ряд Фурье:

$$n = \sum_{\vec q}\sqrt{\frac{q}{\omega_q}}\left[a(\vec q)e^{i\vec q\vec r} + a^*(\vec q)e^{-i\vec q\vec r}\right]$$

$$\Phi = -i\sum_{\vec q}\frac{1}{q}\sqrt{\frac{\omega_q}{q}}\left[a(\vec q)e^{i\vec q\vec r} - a^*(\vec q)e^{-i\vec q\vec r}\right]$$

$$\omega_q^2 = q^2(1-q^2) \tag{2.3}$$

Уравнение для Фурье-гармоник плотности принимает вид:

$$\dot a(\vec q) + iq\left(1 - \frac{1}{2}q^2\right)a(\vec q) +$$

$$+ \frac{i}{4}q\sum_{\vec q_1,\vec q_2} V_{\vec q,\vec q_1,\vec q_2}\Big[a(\vec q_1)a(\vec q_2)\delta(\vec q - \vec q_1 - \vec q_2) +$$

$$+ 2a(\vec q_1)a^*(\vec q_2)\delta(\vec q - \vec q_1 + \vec q_2) + a^*(\vec q_1)a^*(\vec q_2)\delta(\vec q +$$

$$+ \vec q_1 + \vec q_2)\Big] = 0; \quad V_{\vec q,\vec q_1,\vec q_2} = \frac{\vec q\vec q_1}{qq_1} + \frac{\vec q\vec q_2}{qq_2} + \frac{\vec q_1\vec q_2}{q_1q_2} - 1 \tag{2.4}$$

В одномерном случае $V_{\vec q,\vec q_1,\vec q_2} = 2$ и уравнение (2.4) в пространственных переменных принимает вид уравнения Кортевега-де Вриза:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} + n\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 n}{\partial r^3} = 0 \tag{2.5}$$

где r - координата в направлении $\vec q$. Для (2.5) хорошо известно решение в виде нелинейной периодической волны:

$$n = n(r - ut) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{imk(r-ut)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imkr} \tag{2.6}$$

где u - скорость волны в направлении $\vec r$, причём $\alpha = u - 1 > 0$ и $\alpha \ll 1$, что следует из неравенства

$k r_d \ll 1$; $\lambda = 2\pi / k$ - длина волны. Из сравнения (2.6) с (2.4) следует:

$$a_m \equiv a(q); \quad q = mk$$

Удобно ввести параметр N /6/:

$$N = \sqrt{\alpha} / k \tag{2.7}$$

равный отношению периода волны к ширине её горбов и определяющий характерное число гармоник в спектре волны (2.6). При $N \gg 1$, в частности,

$$a_m \approx \alpha / N, \quad (m \leq N)$$

$$a_m \sim e^{-m/N}, \quad (m > N)$$

При $N \sim 1$ решение (2.6) является гармоническим с малыми ангармоническими поправками. Это соответствует слабой нелинейности. Очевидно, что при $N \gg 1$ нелинейность является сильной и это движение аналогично случаю больших чисел Рейнольдса /3/.

Определим гамильтониан для уравнения (2.4) следующим образом:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{q}} \left(1 - \frac{1}{2} q^2\right) a(\vec{q}) a^*(\vec{q}) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} V_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} \left[\frac{1}{3} a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) a(\vec{q}_3) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3) + \right.$$

$$\left. + a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) a^*(\vec{q}_3) \delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}_3) + \text{K.C.} \right] \tag{2.9}$$

где $\mathcal{H}$ - имеет смысл плотности энергии и К.С. означает члены, комплексно сопряженные предыдущим. Уравнение движения (2.6) получается из соотношения:

$$\dot{a}(\vec{q}) = -iq \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*(\vec{q})} \tag{2.10}$$

Предположим, что при некоторых условиях, которые мы получим ниже, решение уравнения (2.4) можно с необходимой точностью искать в виде суперпозиции одномерных волн, движущихся в различных направлениях:

$$n(\vec{r}, t) \approx \sum_s n(\vec{r}_s - \vec{u}_s t) \tag{2.11}$$

где $\vec{r}_s \parallel \vec{u}_s$.

Группируя члены в (2.9), представим $\mathcal{H}$ в виде:

$$\mathcal{H} = \sum_s H_s + H_I$$

$$H_s = \sum_{q_s} \left(1 - \frac{1}{2} q_s^2\right) a(q_s) a^*(q_s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{q_s, q_s', q_s''} \left[\frac{1}{3} a(q_s) a(q_s') a(q_s'') \delta(q_s + q_s' + q_s'') + \right.$$

$$\left. + a(q_s) a(q_s') a^*(q_s'') \delta(q_s + q_s' - q_s'') + \text{K.C.} \right]$$

$$H_I = \sum_{s_1 \neq s_2} a(q_{s_1} = 0) \, a(q_{s_2} = 0) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3}{}' \sum_{\vec{q}_{s_1}, \vec{q}_{s_2}, \vec{q}_{s_3}} V_{\vec{q}_{s_1}, \vec{q}_{s_2}, \vec{q}_{s_3}} \left[\frac{1}{3} a(\vec{q}_{s_1}) a(\vec{q}_{s_2}) a(\vec{q}_{s_3}) \cdot \right.$$

$$\cdot \delta(\vec{q}_{s_1} + \vec{q}_{s_2} + \vec{q}_{s_3}) + a(\vec{q}_{s_1}) a(\vec{q}_{s_2}) a^*(\vec{q}_{s_3}) \delta(\vec{q}_{s_1} + \vec{q}_{s_2} - \vec{q}_{s_3}) +$$

$$\left. + \text{K.C.} \right] \tag{2.13}$$

Здесь различные индексы s указывают на различные одномерные нелинейные волны; q_s, q_s', q_s'' – относятся к одной и той же волне; штрих в сумме (2.13) означает исключение члена с $s_1 = s_2 = s_3$; направление вектора $\vec{q_s}$ совпадает с $\vec{u_s}$. Заметим, что согласно (2.10) величина $a(q_s = 0)$ не зависит от времени и, следовательно, первый член в (2.13) может быть всегда исключен соответствующей перенормировкой гамильтониана, что мы и будем в дальнейшем предполагать. Очевидно, что для справедливости разложения (2.11), по крайней мере, необходимо чтобы $H_I \ll H_s$. Потребуем в дальнейшем, чтобы для всех s выполнялось неравенство:

$$N_s = \sqrt{\alpha_s} / k_s \gg 1 \tag{2.14}$$

§ 3. Взаимодействие двух волн

Мы начнём с исследования наиболее простого случая, когда в сумму (2.11) входят только две волны, т.е. $s = 1,2$. В этом случае величина H_I пропорциональна площади пересечения двух волн и при условии (2.14) и не слишком малых углах между волнами $H_I \ll H_s$. Для того, чтобы убедиться в этом непосредственно, заметим, что δ – функции в (2.13) отбирают в H_I только члены с

$$q_1 = q_1', \ q_2 = 0; \quad q_1 = 0, \ q_2 = q_2'$$

Согласно (2.4)

$$V_{q_1, q_1, 0} = V_{q_2, q_2, 0} = 2\cos\gamma \tag{3.1}$$

где γ – угол между $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$. Учитывая сказанное и пользуясь формулами (2.14), (2.8), имеем:

$$H_I \approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\Big[\sum_{q_1} |a(q_1)|^2 a(q_2 = 0) +$$

$$+ \sum_{q_2} |a(q_2)|^2 a(q_1 = 0) = 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\frac{\alpha_1 \alpha_2}{N_1 N_2}(\alpha_1 + \alpha_2) \tag{3.2}$$

Аналогичная оценка даёт для нелинейного члена в H_s порядок α^3/N. Таким образом, критерием малости взаимодействия двух волн является:

$$\frac{1}{N}\,\mathrm{ctg}\,\gamma \ll 1 \tag{3.3}$$

Из (3.1), (3.2), в частности следует, что в приближении, в котором справедливо уравнение (2.4), две волны, распространяющиеся перпендикулярно друг другу ($\vec{u_1} \perp \vec{u_2}$), не взаимодействуют между собой. Это означает, что их суперпозиция

$$n(\vec{r}, t) = n(x - u_x t) + n(y - u_y t)$$

является точным решением.

Пусть теперь условие (3.3) выполнено и $\cos\gamma \neq 0$. Поправки к параметрам волн за счёт их взаимодействия могут быть вычислены по теории возмущения.

Пользуясь соотношением

$$\frac{dP[a, a^*]}{dt} = -i\sum_s q_s\left(\frac{\partial P}{\partial a(q_s)}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a^*(q_s)} - \frac{\partial P}{\partial a^*(q_s)}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a(q_s)}\right) \tag{3.4}$$

нетрудно получить:

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_2 = 0 \tag{3.5}$$

Полученное соотношение является следствием того, что взаимодействие H_I согласно (3.2) не зависит от времени, что специфично только для двух волн.

С помощью (2.4), (3.2) и (2.6) имеем уравнение для Фурье-амплитуд:

$$\dot{a}(q_1) + iq_1 u_1 a(q_1) +$$

$$+ iq_1 \frac{V_{q_1, q_1, 0}}{|\sin\gamma|} a(q_2 = 0)\, a(q_1) = 0 \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что взаимодействие волн приводит в первом порядке теории возмущений к изменению скорости движения волны на величину

$$\Delta u_1 = 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\, a(q_2=0) \approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\,\frac{\alpha_2}{N_2} \qquad (3.7)$$

Аналогично

$$\Delta u_2 = 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\, a(q_1=0) \approx 2\frac{\cos\gamma}{|\sin\gamma|}\,\frac{\alpha_1}{N_1} \qquad (3.7')$$

Заметим, здесь, что условие малости поправок (3.7), (3.7') имеет вид:

$$\frac{\Delta u}{\alpha} \sim \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{N} \ll 1$$

т.е. тот же, что и (3.3).

§ 4. Взаимодействие трех волн

Перейдём теперь к рассмотрению слабовзаимодействующих трёх волн. В сумму (2.11) входят члены с $S = 1, 2, 3$. Согласно результатам предыдущего параграфа все парные взаимодействия приводят только к перенормировке скоростей u_s и энергий H_s волн и могут быть сразу исключены из взаимодействия. В H_I следует оставить только члены с $S_1 \neq S_2 \neq S_3$, приводящие, как мы увидим ниже к нестационарному возмущению.

Введем новые канонические переменные действие I_s и фазу θ_s с помощью соотношений:

$$\frac{dH_s}{dI_s} = k_s u_s(H_s) = \dot{\theta}_s \qquad (4.1)$$

Вычислим $\dot{H}_s$, используя формулу (3.4)

$$\dot{H}_s = -i\sum_{\vec q_s} q_s\left(\frac{\partial H_s}{\partial a(\vec q_s)}\frac{\partial H_I}{\partial a^*(\vec q_s)} - \frac{\partial H_s}{\partial a^*(\vec q_s)}\frac{\partial H_I}{\partial a(\vec q_s)}\right) =$$

$$= -iu_s\sum_{\vec q_s} q_s\left(a^*(q_s)\frac{\partial H_I}{\partial a^*(\vec q_s)} - a(\vec q_s)\frac{\partial H_I}{\partial a(\vec q_s)}\right) =$$

$$= -\frac{i}{4}u_s \sum_{\substack{s_1,s_2\\ s_1\neq s_2\neq s}}\ \sum_{\vec q_s,\vec q_{s_1},\vec q_{s_2}} q_s V_{\vec q_s,\vec q_{s_1},\vec q_{s_2}}\Big[a^*(\vec q_s)a^*(\vec q_{s_1})a^*(\vec q_{s_2})\cdot$$

$$\cdot\delta(\vec q_s+\vec q_{s_1}+\vec q_{s_2}) + a^*(\vec q_s)a(\vec q_{s_1})a(\vec q_{s_2})\delta(\vec q_s-\vec q_{s_1}-\vec q_{s_2}) +$$

$$+2a^*(\vec q_s)a^*(\vec q_{s_1})a(\vec q_{s_2})\delta(\vec q_s+\vec q_{s_1}-\vec q_{s_2})\Big] + K.C. \qquad (4.2)$$

Из (4.2) при $S = 1, 2, 3$ следует:

$$\dot{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_{q_1,q_2,q_3}(-iq_1u_1)V_{123}a_1^*a_2a_3\delta(\vec q_1-\vec q_2-\vec q_3)+K.C.$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{2}\sum_{q_1,q_2,q_3}(-iq_2u_2)V_{123}a_1a_2^*a_3^*\delta(\vec q_1-\vec q_2-\vec q_3)+K.C.$$

$$\dot{H}_3 = \frac{1}{2}\sum_{q_1,q_2,q_3}(-iq_3u_3)V_{123}a_1a_2^*a_3^*\delta(\vec q_1-\vec q_2-\vec q_3)+K.C. \qquad (4.3)$$

где $a_i = a(\vec q_i)$. Согласно (2.6), (4.1)

$$a_i = |a_i|\exp(-i\theta_i - i\theta_{i0}) \qquad (4.4)$$

где θ_{i0} - начальная фаза.

Таким образом, в уравнениях (4.3) возможен резонанс, если одновременно выполнены условия:

$$\vec q_1 - \vec q_2 - \vec q_3 = m_1\vec k_1 - m_2\vec k_2 - m_3\vec k_3 = 0$$
$$q_1u_1 - q_2u_2 - q_3u_3 = m_1k_1u_1 - m_2k_2u_2 - m_3k_3u_3 = 0 \qquad (4.5)$$

В этом случае основным является изменение параметров волн вследствие резонанса между ними и вместо (4.3) можно написать с учётом (4.1):

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= m_1 \Gamma \sin\Theta \\ \dot{I}_2 &= -m_2 \Gamma \sin\Theta \\ \dot{I}_3 &= -m_3 \Gamma \sin\Theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

где

$$\Gamma = \frac{V_{123}}{|\sin\gamma_{23}|}\,\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{N_1N_2N_3}; \quad \Theta = \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_0$$
$$\theta_0 = \theta_{10} - \theta_{20} - \theta_{30} \tag{4.7}$$

Из (4.6) вытекают соотношения типа Мэнли-Роу /7/

$$\begin{aligned} I_1 m_2 + I_2 m_1 &= const \\ I_1 m_3 + I_3 m_1 &= const \\ I_1 m_2 - I_2 m_1 &= const \end{aligned} \tag{4.8}$$

которые позволяют сразу написать решение через квадратуры. Получим интеграл решения в окрестности резонанса, определенного значениями действия I_{10}, I_{20}, I_{30}. Умножая каждое из уравнений (4.6) на соответствующие

$$\nu_i = k_i u_i$$

имеем:

$$\int_{I_{10}}^{I_1} \nu_1\, dI_1 + \int_{I_{20}}^{I_2} \nu_2\, dI_2 + \int_{I_{30}}^{I_3} \nu_3\, dI_3 = -\Gamma_0 \cos\Theta + const$$

где $\Gamma_0 = F(I_{10}, I_{20}, I_{30})$. Разлагая $\nu_i(I_i)$ в окрестности резонансного значения I_{i0} и используя соотношения (4.8) получаем интеграл движения волн вблизи резонанса:

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{d\nu_s}{dI_s}(I_s - I_{s0})^2 = -2\Gamma_0 \cos\Theta + const \tag{4.9}$$

Из формулы (4.9) вытекает ширина сепаратрисы (ширина резонанса) по действию:

$$\Delta I \sim \left(\Gamma_0 \Big/ \frac{d\nu}{dI}\right)^{1/2} \tag{4.10}$$

или по частоте

$$\Delta\nu \sim \left(\Gamma_0\, d\nu/dI\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

Учитывая, что $H_s \sim k_s \alpha_s^{3/2}$ имеем:

$$\frac{d\nu}{dH} \sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}}; \quad \frac{d\nu}{dI} \sim k/\sqrt{\alpha} \tag{4.12}$$

Подстановка (4.12), (4.7) в (4.11) даёт

$$\Delta\nu \sim \left(\frac{V_{123}}{|\sin\gamma|}\cdot \alpha k^4\right)^{1/2} \tag{4.13}$$

В частности, m - ая гармоника нелинейной волны имеет частоту $m\nu$ и уширение её из-за нелинейного резонанса имеет порядок $m\Delta\nu$. С помощью несложных оценок можно убедиться в том, что уширение гармоник с $N > m \gg 1$ за счёт резонанса велико по сравнению с вкладом, который дают все отброшенные нерезонансные члены в (4.3).

Из (4.9) следует, что взаимодействие трех волн приводит к появлению на их профилях малых по амплитуде модуляций, что можно охарактеризовать как возникновение регулярной "ряби".

Отметим, в заключение, что из (4.3) может быть получен общий интеграл движения, если пренебречь в правых частях изменением $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$ как малостью более высокого порядка:

$$H_1+H_2+H_3=-2\sum_{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\vec{q}_3} V_{123}\,|a_1a_2a_3|\cos\theta\,\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\vec{q}_1-\vec{q}_2-\vec{q}_3)+\text{const}$$

Критерий малости H_I в этом случае тот же, что и для двух волн.

§ 5. Кинетическое уравнение

Рассмотрим теперь случай взаимодействия большого числа $S\gg 1$ нелинейных волн. Пусть характерное различие между близкими волновыми числами этих волн есть $\Delta k\ll k$ и для простоты будем считать, что

$$\Delta k/k\sim\Delta\alpha/\alpha$$

где $\Delta\alpha=\Delta u$ - характерное различие скоростей волн. Условие малости взаимодействия волн может быть получено аналогично (3.3) и имеет вид:

$$\frac{S}{N}\cdot\frac{1}{|\sin\gamma|}\ll 1 \tag{5.1}$$

где γ - характерный угол между направлениями распространения волн.

Пусть m -ая гармоника нелинейной волны с номером s вступает в резонанс с какими-то гармониками из волн s_1 и s_2. Вследствие нелинейности происходит уширение частоты m -ой гармоники на величину, равную согласно (4.2) и (4.13):

$$m\Delta\nu\sim m\left(S\alpha k^4\frac{V_{123}}{|\sin\gamma|}\right)^{1/2};\quad (m<N) \tag{5.2}$$

Ближайшие к s_1, s_2 волны с номерами s_1', s_2' содержат гармоники, которые могут вступить в резонанс с волной s. Расстояние между резонансами по частоте имеет порядок

$$\Omega\sim m'\Delta k u\sim m'\Delta k,\quad (m'<N).$$

Если резонансы перекрываются, т.е.

$$m\Delta\nu/\Omega\gg 1 \tag{5.3}$$

то фазы θ нелинейных волн хаотизируются /3/ и можно перейти к статистическому описанию волн. Согласно (5.2) условие (5.3) перепишем в явном виде:

$$\left(\frac{m}{m'}\right)^2\frac{S}{N|\sin\gamma|}\,k\alpha^{3/2}\gg\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 \tag{5.3'}$$

и в дальнейшем будем считать его выполненным.

Ансамбль из S нелинейных слабовзаимодействующих волн будем характеризовать функцией распределения f от $2S$ канонических переменных: $f=f(I_1,\theta_1;I_2,\theta_2;\dots;I_S,\theta_S)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_s\dot{\theta}_s\frac{\partial f}{\partial\theta_s}+\sum_s\dot{I}_s\frac{\partial f}{\partial I_s}=0 \tag{5.4}$$

где

$$\dot{\theta}_s=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_s}=\nu_s(I_s)+\frac{\partial H_I}{\partial I_s}$$

$$\dot{I}_s=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_s}=\frac{1}{\nu_s}\dot{H}_s;\quad\frac{dH_s}{dI_s}=\nu_s(I_s) \tag{5.5}$$

и H_I, $\dot{H}_s$ определены соответственно выражениями (2.13),(4.2).

Используя малость H_I, можно построить теорию возмущений для (5.4) и провести усреднение по случайным фазам θ_s нелинейных волн. Опуская соответствующие выкладки, аналогичные приведенным в /3/, запишем сразу получающееся кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=6\pi\sum_{s_1,s_2,s_3}\ \sum_{n_{s_1},n_{s_2},n_{s_3}}|V_{s_1,s_2,s_3}|^2\hat{D}_{s_1s_2s_3}\,\cdot$$

$$\cdot\,|a^*(n_{s_1})a^*(n_{s_2})a(n_{s_3})|^2\cdot\delta(n_{s_1}\nu_{s_1}+n_{s_2}\nu_{s_2}-n_{s_3}\nu_{s_3}).$$

$$\delta(n_{s_1}\vec{k}_{s_1}+n_{s_2}\vec{k}_{s_2}-n_{s_3}\vec{k}_{s_3})\,\hat{D}_{s_1s_2s_3}\,F\,;$$

$$\hat{D}_{s_1s_2s_3}\equiv n_{s_1}\frac{\partial}{\partial I_{s_1}}+n_{s_2}\frac{\partial}{\partial I_{s_2}}-n_{s_3}\frac{\partial}{\partial I_{s_3}} \tag{5.6}$$

$$F(t,I_1,\dots,I_S)=(2\pi)^{-S}\int_0^{2\pi} f\,d\theta_1\dots d\theta_S$$

Уравнение (5.6) имеет равновесное решение

$$F=F\Big(\sum_s\big(H_s-\vec{k}_s\vec{w}_s I_s\big)\Big) \tag{5.7}$$

где константа $\vec{W}$ имеет смысл макроскопической скорости и всегда может быть исключена.

Ниже мы исследуем квазистационарные решения уравнения (5.6), соответствующие режиму турбулентности.

§ 6. Точное решение основного кинетического уравнения со степенными ядрами

Рассмотрим предварительно более простое, чем (5.6), уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=6\pi\int dq_1dq_2dq_3\,|\mathcal{V}_{q_1q_2q_3}|^2\,\hat{\mathcal{D}}_{q_1q_2q_3}\,R_{q_1q_2q_3}\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\nu_{q_1}+\nu_{q_2}-\nu_{q_3})\,\delta(q_1+q_2-q_3)\,\hat{\mathcal{D}}_{q_1q_2q_3}\,F\,;$$

$$\hat{\mathcal{D}}_{q_1q_2q_3}\equiv\nu_{q_1}\frac{\partial}{\partial H_{q_1}}+\nu_{q_2}\frac{\partial}{\partial H_{q_2}}-\nu_{q_3}\frac{\partial}{\partial H_{q_3}} \tag{6.1}$$

$$R_{q_1q_2q_3}=R(H_{q_1},H_{q_2},H_{q_3})$$

$$F=F(H_{q_1},H_{q_2},\dots,t)$$

где ядра $\mathcal{V}_{q_1q_2q_3}$, $R_{q_1q_2q_3}$ являются однородными и

симметричными функциями относительно своих аргументов. Положим:

$$\mathcal{V}_{q_1\xi,q_2,q_3}=\mathcal{V}_{q_1,q_2\xi,q_3}=\mathcal{V}_{q_1,q_2,q_3\xi}=\xi^{\rho_1/3}\mathcal{V}_{q_1q_2q_3}$$

$$R(\xi H_1,H_2,H_3)=R(H_1,\xi H_2,H_3)=R(H_1,H_2,\xi H_3)=$$

$$=\xi^{\rho_2/3}R(H_1,H_2,H_3)$$

$$q=(\nu_q/\bar{\nu})^{\rho_3} \tag{6.2}$$

Перейдём теперь в (6.1) от интегрирований по q к интегрированиям по ν_q и рассмотрим изменение со временем среднего значения энергии нелинейной волны $\langle H_\nu\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\langle H_\nu\rangle=\int(dH)\,H_\nu\frac{\partial F}{\partial t}=-6\pi\int(dH)\int d\nu_1d\nu_2\,\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{\rho_3}{\bar{\nu}}\Big)^3\Big(\frac{\nu\nu_1\nu_2}{\bar{\nu}^3}\Big)^{\rho_3-1}|\mathcal{V}_{\nu\nu_1\nu_2}|^2\,R(H_\nu,H_{\nu_1},H_{\nu_2})\,\nu\,\cdot$$

$$\cdot\Big\{\delta(\nu+\nu_1-\nu_2)\,\delta(q+q_1-q_2)\,\hat{\mathcal{D}}_{\nu\nu_1\nu_2}+$$

$$+\,\delta(\nu_2+\nu-\nu_1)\,\delta(q_2+q-q_1)\,\hat{\mathcal{D}}_{\nu_2\nu\nu_1}-$$

$$-\,\delta(\nu_1+\nu_2-\nu)\,\delta(q_1+q_2-q)\,\hat{\mathcal{D}}_{\nu_1\nu_2\nu}\Big\}F \tag{6.3}$$

Рассмотрим первый член в (6.3).

Будем искать F в виде

$$F(H_1,H_2,\dots)=F(\nu_1^{\rho}\bar{H}_1,\nu_2^{\rho}\bar{H}_2,\dots) \tag{6.4}$$

Подставим (6.4) в первый член (6.3), учитывая, что

$$F(H_1, H_2, \dots)(dH) = F(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots)(d\bar{H})$$

и произведем замену переменных:

$$\nu_1 \to (\nu - \nu_1)\frac{\nu}{\nu_1}\ ; \quad d\nu_1 = -d\nu_1\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 \tag{6.5}$$

При этом $\nu_2 = \nu_1 + \nu$ переходит в $\nu \cdot \frac{\nu}{\nu_1}$, а ν представим в виде: $\nu = \nu_1 \cdot \frac{\nu}{\nu_1}$. Выполняя простые преобразования и возвращаясь к старым переменным H_ν находим, что подинтегральное выражение первого члена в (6.3) равно подинтегральному выражению третьего члена в (6.3) с дополнительным множителем:

$$-\nu_1\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^p$$

$$p = 4 + 3(\varrho_3 - 1) + 2\varrho_1\varrho_3 + \varrho(\varrho_2 - 1) - \varrho_3 \tag{6.6}$$

Второе слагаемое в (6.3) может быть получено из преобразованного первого слагаемого путём перемены местами индексов 1,2 при ν и q. Собирая теперь все члены вместе получаем вместо (6.3) следующее выражение:

$$\frac{d\langle H_\nu\rangle}{dt} = -6\pi \int (dH) \int dq_1 dq_2 \left[\nu - \nu_1\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^p - \nu_2\left(\frac{\nu}{\nu_2}\right)^p\right] \cdot$$

$$\cdot \left|\mathcal{V}_{\nu\nu_1\nu_2}\right|^2 \delta(\nu - \nu_1 - \nu_2)\,\delta(q - q_1 - q_2)\,R(H_\nu, H_{\nu_1}, H_{\nu_2}) \cdot$$

$$\cdot \left[\nu\frac{\partial}{\partial H_\nu} - \nu_1\frac{\partial}{\partial H_{\nu_1}} - \nu_2\frac{\partial}{\partial H_{\nu_2}}\right] F \tag{6.7}$$

Нетрудно видеть, что, кроме уже известного решения (5.7), правая часть уравнения (6.7) зануляется также при условии:

$$p = 4 + 3(\varrho_3 - 1) + 2\varrho_1\varrho_3 + \varrho(\varrho_2 - 1) - \varrho_3 = 0 \tag{6.8}$$

Из (6.8) находим искомое значение ϱ в решении (6.4):

$$\varrho = -\frac{1}{\varrho_2 - 1}\left[1 + 2\varrho_3(1 + \varrho_1)\right] \tag{6.9}$$

Мы обсудим физический смысл полученного результата в следующем параграфе, а здесь остановимся лишь на его некоторых формальных особенностях.

Прежде всего заметим, что основное кинетическое уравнение (*"master equation"*), полученное в /8/ для ангармонической решетки является частным случаем уравнения (6.1) при $\varrho_2 = 1$. Аналогичное уравнение описывает слабую турбулентность плазмы с распадным спектром /9/. Если предположить расцепление моментов:

$$\langle H_\nu H_{\nu'}\rangle = \langle H_\nu\rangle\langle H_{\nu'}\rangle \tag{6.10}$$

то (6.1) преобразуется /9/ в кинетическое уравнение для волн. В этом последнем случае решение в виде:

$$\langle H_\nu\rangle \sim \nu^\varrho$$

соответствующее (6.9), было получено Захаровым /10/. Особенность найденного выше результата заключается в том, что он получен для многочастичной функции распределения F и без предположения (6.10) о расцеплении. Это является для нас существенным, т.к. обосновать процедуру расцепления для уравнения (5.6), вообще говоря, не удаётся.

§ 7. Спектр турбулентности

Заменим в (5.6) для удобства суммирование по s, n_s интегрированием соответственно по k_s, n_s. Учтем, что в рассматриваемом пределе (2.14) амплитуды Фурье-гармоник волн определяются соотношениями (2.8). Это означает, что ядро

$$\bar{R}_{s_1 s_2 s_3} = |a(n_{s_1})\,a(n_{s_2})\,a(n_{s_3})|^2, \tag{7.1}$$

экспоненциально обрезается при $n > N$ и, следовательно, интегрирование по n_s ведется в уравнении (5.6) в пределах от 0 до N_s. Учитывая (2.8), имеем:

$$\overline{R}_{s_1 s_2 s_3} = \left(\frac{\alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\alpha_{s_3}}{N_{s_1}N_{s_2}N_{s_3}}\right)^2 = (k_{s_1} k_{s_2} k_{s_3})^2 \alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\alpha_{s_3} \tag{7.2}$$

Из (2.12) и (2.8) с точностью до несущественного численного множителя порядка единицы следует:

$$\alpha_s \approx (H_s / k_s)^{2/3}; \quad (\alpha = u - 1 \ll 1) \tag{7.3}$$

откуда

$$\overline{R}_{s_1 s_2 s_3} = (k_{s_1} k_{s_2} k_{s_3})^{4/3} (H_{s_1} H_{s_2} H_{s_3})^{2/3} \tag{7.4}$$

Умножим теперь (5.6) на H_s и проинтегрируем по всем H_i. Это даёт:

$$\frac{d}{dt}\langle H_k\rangle = -6\pi \int (dH) \int dk_1 dk_2 \int_0^{\Lambda} dm_1 dm_2 dm \cdot$$
$$\cdot |V_{k_1 k_2 k}|^2 N m \nu \, \overline{R}_{k_1 k_2 k} \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \delta(Nm\nu + N_1 m_1 \nu_1 - N_2 m_2 \nu_2)\, \delta(Nm\vec{k} + N_1 m_1 \vec{k}_1 - N_2 m_2 \vec{k}_2) \cdot$$
$$\cdot \hat{D}_{k k_1 k_2} + \delta(N_2 m_2 \nu_2 + Nm\nu - N_1 m_1 \nu_1)\, \delta(N_2 m_2 \vec{k}_2 +$$
$$+ Nm\vec{k} - N_1 m_1 \vec{k}_1)\, \hat{D}_{k_2 k k_1} - \delta(N_1 m_1 \nu_1 + N_2 m_2 \nu_2 -$$
$$- Nm\nu)\, \delta(N_1 m_1 \vec{k}_1 + N_2 m_2 \vec{k}_2 - Nm\vec{k}) \cdot$$
$$\cdot D_{k_1 k_2 k} \Big\} F \tag{7.5}$$

где

$$\hat{D}_{k_1 k_2 k_3} = N_1 m_1 \nu_1 \frac{\partial}{\partial H_1} + N_2 m_2 \nu_2 \frac{\partial}{\partial H_2} - N_3 m_3 \nu_3 \frac{\partial}{\partial H_3}$$

$$\nu_i = \nu(k_i) = k_i u_i \approx k_i$$

$$m = \frac{n}{N} = \frac{nk}{\sqrt{\alpha}} = n k^{4/3} H^{-1/3}; \quad m_i = m(k_i, H_i) \tag{7.6}$$

Из (7.4) и (7.6) видно, что уравнение (7.5) является уравнением уже рассмотренного типа (6.1). При этом

$$\rho_1 = 0, \ \rho_2 = 3; \ \rho_3 = 1 \tag{7.7}$$

Кроме того, необходимо учесть, что в (7.5) δ - функция по $\vec{k}$ является двумерной, что приводит, как легко показать, к изменению выражения (6.9) на

$$\rho = -\frac{1}{\rho_2 - 1 - 1/3}\left[1 + 2\rho_3(1 + \rho_1) + 1/3\right] \tag{7.8}$$

Подставляя (7.7) в (7.8), находим $\rho = -2$, т.е. согласно (6.4) функция распределения вида:

$$F = F(k_1^{-2}\overline{H}_1, k_2^{-2}\overline{H}_2, \ldots, k_{s'}^{-2}\overline{H}_{s'}) \tag{7.9}$$

обращает в нуль изменение со временем средней энергии k-ой волны и, следовательно, приводит к постоянному потоку энергии по спектру нелинейных волн. Последнее означает, что решение (7.9) соответствует стационарной турбулентности в том же смысле, в котором это рассматривалось Колмогоровым /11/.

Из (7.9), в частности, следует выражение

$$\langle H_{k_i}\rangle = \int (dH) H_{k_i} F(H) = k_i^{-2} \int (d\overline{H}) \overline{H}_{k_i} F(\overline{H}) =$$
$$= k_i^{-2} \cdot const \tag{7.10}$$

определяющее спектр турбулентности. Заметим, что из (7.9) может быть найден спектр произвольного момента H_k :

$$\langle H_k^{\mu} \rangle = k^{-2\mu} \cdot const \qquad (7.11)$$

Учтем теперь, что H_k есть энергия одномерной волны. В случае изотропной двумерной трубулентности спектр определяется выражением

$$\langle H_{\vec{k}} \rangle = k^{-3} \cdot const \qquad (7.12)$$

где $H_{\vec{k}}$, в отличие от H_k есть двумерная плотность энергии. Аналогично вместо (7.11) имеем:

$$\langle H_{\vec{k}}^{\mu} \rangle = k^{-2\mu-1} \cdot const$$

§ 8. Замечания

1. Полученные результаты легко обобщаются на трехмерный случай. Параметр разложения имеет тот же вид (5.1). Поскольку резонансные условия (4.5) могут быть выполнены только для векторов $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$, лежащих в одной плоскости, то – функция от импульсов в (5.6) является двумерной и решение (7.9) справедливо в трехмерном случае также.

2. Двумерный и трехмерный случаи существенно отличаются от одномерного, рассмотренного в /3/. При одномерном движении можно перейти в систему отсчёта, движущуюся со скоростью 1 и резонансные условия (4.5) принимают вид:

$$n_1 k_1 - n_2 k_2 - n_3 k_3 = 0$$

$$n_1 k_1 \alpha_1 - n_2 k_2 \alpha_2 - n_3 k_3 \alpha_3 = 0$$

Это обстоятельство приводит к существенному изменению выражения (7.8) для степени ρ .

3. Используемое разложение по одномерным нелинейным волнам имеет смысл лишь в тех случаях, когда начальные условия задачи приводят к образованию, в основном, таких волн. Кроме того, из-за взаимодействия нелинейные волны разрушаются за время $\sim \frac{\tau_D}{\varepsilon} \gg \tau_D$, где τ_D – время диффузии в (5.6) и $\varepsilon = S/(N|\sin\gamma|)$.

4. Другое ограничение связано с тем, что при выводе (2.2) мы пренебрегли членами более высокого порядка по α . Это приводит к неравенству: $\varepsilon \gg \alpha$, т.е.

$$N \gg \frac{|\sin\gamma|}{S\alpha}$$

5. Аналогичную модель турбулентности можно построить для магнитозвуковых движений плазмы и для волн на мелкой воде.

В заключение один из нас (Г.М.З.) выражает благодарность Б.Б.Кадомцеву за обсуждение результатов работы.

Литература

1. А.А.Галеев, В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20 (1965).
2. Б.Б.Кадомцев. В сб. "Вопросы теории плазмы", т.4, 188, Атомиздат (1964).
3. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ, 57, 1240 (1969).
4. В.М.Елеонский, В.П.Силин. ЖЭТФ, 56, 574 (1969).
5. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 51, 1107 (1966).
6. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ, 56, 1064 (1969).
7. Н.Бломберген. Нелинейная оптика. Москва, Мир (1966).
8. R. Brout, I. Prigogine. Physica, 22, 621 (1956)
9. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ, 52, 1081 (1967).
10. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 51, 688 (1966).
11. А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, 30, 299 (1941).

Ответственный за выпуск Г.М.Заславский
Подписано к печати 19.11.1969.
Усл. 1,1 печ.л., тираж 250 экз.
Заказ № 337, бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.