29

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 326

Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С НИЗКОДОБРОТНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

НОВОСИБИРСК

1969

Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С НИЗКОДОБРОТНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется когерентная поперечная устойчивость короткого пучка, взаимодействующего с низкодобротным резонатором. Показано, что это взаимодействие может приводить к так называемым неустойчивостям "без памяти".

В в е д е н и е

На установках ВЭПП-2, АСО и АДОНА были обнаружены когерентные эффекты, декременты и инкременты которых не зависят от частоты бетатронных колебаний. На последних двух установках время нарастания неустойчивостей оказалось линейной функцией длины сгустка. Эти факты указывают на то, что эти эффекты не являются следствием длительное время существующих "остаточных" полей, наводимых пучком в объёме камеры.

Были высказаны предположения, что эти эффекты обязаны взаимодействию с полями, успевающими затухнуть за время оборота пучка.

В действительности, для существования мгновенных неустойчивостей, вовсе не обязательно, чтобы система обладала столь короткой памятью. Например, конечная проводимость стенок также может давать эффекты, не обязанные периодичности движения частиц /1/, несмотря на то, что остаточное поле спадает как $1/\sqrt{t}$. Этот мгновенный эффект может преобладать над многооборотным эффектом если

$$\left(\frac{\nu l_b}{R}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{|\sin 2\pi\nu|} > 1$$

Здесь R - радиус машины, ν - безразмерная частота бетатронных колебаний, l_b - длина сгустка. Нетрудно видеть, что только при стремлении к нулю декремента (инкремента) многооборотного эффекта этот "мгновенный эффект" становится существенным.

Одной из систем, не обладающей "памятью", является идеально согласованная линия. (Излученная волна уходит из камеры за время l/c, где l длина пластины). Обычно такими линиями являются пластины отсоса ионов, электростатические квадруполи или пластины разведения пучков.

Авторами настоящей работы было исследовано взаимодействие пучка с идеально согласованными линиями (см./2, 3/). Обнаружено, что при идеальном согласовании пластин одномерные и двумерные возбуждения однородного пучка могут быть неустойчивы, например, для вертикальных колебаний условия неустойчи -

вости следующее:

$$m(m\nu_z + n) < 0$$

где m – порядок мультипольности возбуждения, n – целое число.

Для бунчированного пучка одномерные возбуждения затухают, в то время как двумерные возбуждения, например $m_z = 1$, $m_r = -1$, могут быть неустойчивыми, если:

$$\left(\frac{\nu_z}{\nu_r}-1\right)\cdot\left(\frac{\nu_z}{\nu_r}-\frac{\langle a_r^2\rangle}{\langle a_z^2\rangle}\right)>0$$

$\langle a_r^2\rangle$, $\langle a_z^2\rangle$ – соответственно радиальный и вертикальный размер пучка.

В работе /3/ показано, что согласованные пластины могут также приводить к неустойчивости фазового и радиальнофазового движения. При этом пластины, электростатическое поле которых имеет радиальную компоненту, дают неустойчивость фазового движения если:

$$\sum_i \overline{\Psi}_i \frac{\partial U_i^2}{\partial r} < 0$$

где $\sum\limits_i$ – сумма по пластинам, U_i – потенциал на траектории частицы при единичном потенциале на пластине, $\overline{\Psi}_i$ – среднее значение функции на троектории $(\Delta R = \psi\, \Delta P/P)$

Здесь мы хотели бы обратить внимание на то, что декременты (инкременты) "мгновенных эффектов" не обязательно зависят от длины сгустка (например, затухание одномерных колебаний при $\gamma^2 \ell_b \gg \ell$, или двумерная неустойчивость в этом предельном случае, с другой стороны декремент фазовых колебаний или он же инкремент радиальных колебаний за счёт связи радиального и продольного движения зависит от длины как $1/\ell_b$).

При взаимодействии с идеально согласованными пластинами пучок излучает в широком диапазоне частот ($0 \div c/\ell_\perp$), в то время как при резонансном взаимодействии излучает только одна мода, правда при этом интенсивность взаимодействия велика, поэтому оба эффекта могут конкурировать друг с другом.

Аналогично согласованным линиям может действовать низкодобротный резонатор. Действительно, возьмем резонатор с высокой частотой $\omega_k \gg \omega_0$ и временем затухания поля $1/\lambda_k \ll 1/\omega_0$ времени оборота. Пролетая через резонатор пучок излучает. В диапазоне частот $\sim \lambda_k$ спектр когерентного излучения пучка непрерывен, поэтому взаимодействие пучка с таким резонатором может быть интенсивным.

В настоящей работе исследовано взаимодействие короткого пучка с низкодобротным резонатором. Обнаружено, что одномерные мультипольные возбуждения могут быть неустойчивыми. Декремент (инкремент) затухания состоит из двух частей "многооборотной" и "мгновенной". Первая даёт положительный вклад в декремент, если

$$n - \frac{1-\mathrm{sgn}(\sin 2\pi n_k)}{4} < m\nu_z < n + \frac{1+\mathrm{sgn}(\sin 2\pi n_k)}{4}$$

где $n_k = \frac{\omega_k}{\omega_0}$ – число колебаний поля резонатора за период обращения частицы. Из этого условия видно, что случай $\sin 2\pi n_k > 0$ аналогичен эффекту конечной проводимости стенок /4/.

Вклад в декремент "мгновенного" члена положителен, если:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\sin n\varphi_p}{n^2}\Big|_{n=n_k} < 0$$

где φ_p – азимутальный угловой размер области взаимодействия пучка с резонатором.

Таким образом, резонатор с низкой добротностью может быть причиной так называемых "неустойчивостей без памяти".

1. Дисперсионное уравнение

Рассмотрим возбуждение в пучке

$$\tilde f = f_m(I_z;\varphi)\exp(im\psi_z - i\omega t)$$

резонансно взаимодействующее с одной из собственных мод колебаний поля резонатора

$$\vec{\tilde A}_k = \vec{\tilde A}_k(\vec r)\, e^{-i\omega_k t}, \quad \mathrm{div}\,\vec A_k = 0,$$

$$\int dV\, |\vec A_k|^2 = 4\pi$$

Здесь:

$$I_z = \frac{1}{2} m_0 \gamma \omega_0 \nu_z a_z^2; \quad \psi_z = \omega_0 \nu_z t + \varphi_z$$

ν_z; a_z; φ_z соответственно приведенная частота, амплитуда и фаза аксиальных колебаний, φ - амплитуда синхротронных колебаний. Из кинетического уравнения для функции распределения

$$f = f_0 + \tilde f$$

и уравнений поля, методом развитым в (1), можно получить уравнение для f_m:

$$(\omega - m\omega_z) f_m = i m e^2 \frac{\partial f_0}{\partial I_z} \sum_n \frac{(\vec v \vec A_k)_{mn}\, J_0(n\varphi)}{\omega_k^2 - (\omega + n\omega_0)^2 - 2i\lambda_k(\omega + n\omega_0)} \cdot$$

$$\cdot \int d\Gamma\, (\vec v \vec A_k)^{*}_{mn}\, J_0(n\varphi)\, f_m \qquad (1)$$

где: $\vec v = (0,\ V;\ -\omega_z a_z \sin\psi_z)$ - скорость частицы, $J_0(n\varphi)$ функция Бесселя,

$$(\vec v \vec A_k)_{mn} = \int \frac{d\psi_z\, d\theta}{(2\pi)^2}\, e^{-im\psi_z - in\theta}\, (\vec v \vec A_k) \qquad (2)$$

θ - азимут частицы, $\vec r = (0,\ R\theta,\ a_z \cos\psi_z)$

λ_k - декремент затухания свободных колебаний поля резонатора.

Для малых вертикальных размеров пучка $(\vec v \vec A_k)_{mn}$ представляется в виде:

$$(\vec v \vec A_k)_{mn} = \frac{\omega_0}{m!}\left(\frac{a_z}{2}\right)^m \left[R \frac{\partial^m A_{ky}}{\partial z^m} - i \nu_z m \frac{\partial^{m-1} A_{kz}}{\partial z^{m-1}}\right]_n \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{\omega_0}{m!}\left(\frac{a_z}{2}\right)^m B_{mn} \qquad (2a)$$

Образуя момент $\chi = \int dI_z\, f_m\, (a_z)^m$ получаем вместо (1) уравнение:

$$(\omega - m\omega_z)\chi = \frac{e^2 N \omega_0}{2\gamma m_0 \nu_z} \cdot \left\langle \left(\frac{a_z^{m-1}}{(m-1)!\, 2^{m-1}}\right)^2 \right\rangle \cdot$$

$$\cdot \sum_n \frac{|B_n|^2 J_0(n\varphi)\, \rho(\varphi)}{(\omega + n\omega_0 + i\lambda_k)^2 - \omega_k^2} \int_0^\infty d\varphi'\, \varphi'\, \chi(\varphi')\, J_0(n\varphi') \qquad (3)$$

$\rho(\varphi)$ – функция распределения частиц по φ

$\int d\varphi\varphi\rho(\varphi)=1$, $\varphi_b=\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$ угловой размер сгустка; обозначая

$$|\Phi_n|^2=\frac{e^2N}{2\gamma m_0\omega_z}\left\langle\left(\frac{a_z^{m-1}}{(m-1)!\,2^{m-1}}\right)^2\right\rangle|B_n|^2 \qquad (3a)$$

и полагая в знаменателе (3) $\omega=m\omega_z$, запишем уравнение (3) в виде:

$$(\omega-m\omega_z)\chi=\sum_n\frac{\rho(\varphi)\,J_0(n\varphi)\,|\Phi_n|^2}{(n+m\nu_z+i\mu_k)^2-n_k^2}\int_0^\infty d\varphi'\varphi'\chi J_0(n\varphi') \qquad (4)$$

$n_k=\frac{\omega_k}{\omega_0}$ – число колебаний резонатора за период обращения частицы, $\mu_k=\lambda_k/\omega_0$ – показатель спада.

Чтобы выделить "мгновенную" часть взаимодействия, перейдем от суммирования по n к интегрированию по формуле

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}ds\,e^{2\pi i l s}B(s).$$

суммирование по l соответствует сложению полей "по оборотам"; тогда член с $l=0$ соответствует "мгновенному" взаимодействию. Таким образом, уравнение (4) принимает вид:

$$(\omega-m\omega_z)\chi=\rho(\varphi)\int\frac{d\varphi'^2}{2}\chi\left[\int ds\frac{J_0(n\varphi)J_0(n\varphi')|\Phi_s|^2}{(s+m\nu_z+i\mu_k)^2-n_k^2}+\sum_{l\neq0}\int ds\frac{|\Phi_s|^2J_0(n\varphi)J_0(n\varphi')}{(s+m\nu_z+i\mu_k)^2-n_k^2}\,e^{2\pi i l s}\right] \qquad (5)$$

Из определения гармоник (2) следует, что поведение числителя в сумме по $l\neq0$, как функции s в комплексной плоскости, определяется экспонентой $e^{2\pi i l s}$. Тогда второй член в (9) вычисляется взятием вычетов в полюсах

$$s=\pm n_k-m\nu_z-i\mu_k=n_\pm \qquad (6)$$

Выполняя затем суммирование по l , получаем:

$$\sum_{l\neq0}=\sum_{l<0}=-\frac{i\pi}{n_k}\left[\frac{|\Phi_{n_+}|^2J_0(n_+\varphi)J_0(n_+\varphi')}{e^{2\pi i n_+}-1}-\frac{|\Phi_{n_-}|^2J_0(n_-\varphi)J_0(n_-\varphi')}{e^{2\pi i n_-}-1}\right] \qquad (7)$$

При получении формулы (7) мы предполагали, что поле данной моды резонатора не излучается в объём камеры, то есть

$$n_k<\frac{R}{l_\perp} \qquad (8)$$

где $l_\perp$ характерный размер апертуры камеры. Тем самым пучок взаимодействует с данной модой на ограниченном участке азимута $\Delta\theta\sim\varphi_p$. При этом, азимутальная гармоника поля, как функция n , в области $n<R/l_\perp$, имеет характерный размер осцилляции $\Delta n\sim1/\varphi_p$ и в среднем убывает не быстрее чем $1/n$. Так, например, если поле гармоники постоянно по азимуту на длине резонатора, то

$$|\Phi_n|^2\sim\frac{\sin^2 n\varphi_p}{n^2} \qquad (9)$$

В дальнейшем мы предполагаем:

$$\frac{1}{\varphi_p},\ \frac{1}{\varphi_b}\gg\mu_k. \qquad (8a)$$

что соответствует "резонансности" взаимодействия.

В данном сообщении мы ограничимся рассмотрением случая

$n_\kappa \varphi_b \ll 1$ (поле резонатора не осциллирует на длине пучка).

При этом предположении в (5) можно положить $J_0(n\varphi);\ J_0(n\varphi')=1$, тогда решением для χ является

$$\chi \sim \rho(\varphi) \tag{10}$$

подставляя (8) в (5), получаем выражение для комплексного сдвига частоты:

$$\omega - m\omega_z = \int ds \frac{|\Phi_s|^2}{(s-n_+)(s-n_-)} - \frac{i\pi}{n_\kappa}\left[\frac{|\Phi_{n_+}|^2}{e^{2\pi i n_+}-1} - \frac{|\Phi_{n_-}|^2}{e^{2\pi i n_-}-1}\right] \tag{11}$$

При условиях (8,8а) интеграл в (11) равен:

$$\frac{i\pi}{n_\kappa}\frac{\partial|\Phi_n|^2}{\partial n}\Big|_{n=n_\kappa} \cdot m\nu_z + \frac{\mathcal{P}}{n_\kappa}\int ds \frac{|\Phi_n|^2}{s-n_\kappa} \tag{12}$$

Здесь $\mathcal{P}$ – символ главного значения. При получении результата (12) мы приняли, что $1/\varphi_p \gg m\nu_z$. При этом же условии в (11) $|\Phi_{n_+}|^2=|\Phi_{n_-}|^2$, тогда для мнимой части имеем ($\mu_\kappa \gg 1$):

$$-\mathrm{Im}\,\omega = -\frac{\pi}{n_\kappa}\left[m\nu_z \frac{\partial|\Phi_n|^2}{\partial n}\Big|_{n=n_\kappa} - 2|\Phi_n|^2 e^{-2\pi\mu_\kappa}\sin 2\pi n_\kappa \,\sin 2\pi m\nu_z\right] \tag{13}$$

Таким образом, мы получили декремент аксиальных возбуждений. Первый член в (13) обязан "мгновенному" взаимодействию пучка с резонатором, а второй остаточному (от предыдущего оборота) полю. Вклад этого члена в декремент положителен если:

$$n - \frac{1-\mathrm{sgn}(\sin 2\pi n_\kappa)}{4} < m\nu_z < n + \frac{1+\mathrm{sgn}(\sin 2\pi n_\kappa)}{4} \tag{14}$$

n – целое число. Случай $\sin 2\pi n_\kappa > 0$ аналогичен эффекту конечной проводимости /2/. (В работе /2/ это условие было получено для дипольных возбуждений $m=1$; для мультипольных возбуждений обобщение этого условия очевидно). В данном случае эффект "памяти" существенно зависит от поворота фазы поля резонатора за время оборота:

$$\sin 2\pi n_\kappa = \sin 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega_0}$$

"Мгновенная" часть взаимодействия даёт положительный вклад в декремент, если:

$$\frac{\partial|\Phi_n|^2}{\partial n}\Big|_{n=n_\kappa} < 0 \tag{15}$$

Из формулы (13) следует, что мгновенное взаимодействие является определяющим, если:

$$e^{-2\pi\mu_\kappa} \ll m\nu_z \max\left\{\varphi_p;\ \frac{1}{n_\kappa}\right\} \tag{16}$$

Таким образом, при достаточно низкой добротности резонатора условие устойчивости когерентных возбуждений не зависит от выбора рабочей точки по ν_z. Обратим внимание на то, что в рассмотренном случае декременты не зависят от длины сгустка. Подставляя в (13) выражение для $|\Phi_n|^2$ при $m=1$ "мгновенный" декремент имеет вид:

$$-\operatorname{Im}\omega = -\frac{N r_0 c^2}{2\gamma\omega_0}\frac{\pi}{n_\kappa}\left|R\frac{\partial A_y}{\partial z} - i\nu_z A_z\right|^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\sin^2 n\varphi_p}{n^2}\right)\Bigg|_{n=n_\kappa} \tag{17}$$

Для оценки порядка величины можно считать $\frac{\partial A_y}{\partial z} \sim A_y/L_\perp$, $n_\kappa \sim R/L_\perp$, $A_y^2 \sim 4\pi/V$, где V объём резонатора

$$-\operatorname{Im}\omega = -\frac{N r_0 c\,\varphi_p \beta^2}{2\gamma L_\perp^2}\sin 2n_\kappa\varphi_p \tag{18}$$

Здесь мы предположили, что $1/n_\kappa < \varphi_p$, $R\frac{\partial A_y}{\partial z} > \nu_z A_z$

В этих приближениях для "многооборотного" члена имеем:

$$-\operatorname{Im}\omega = \frac{N r_0 c\beta^2}{2\gamma\nu_z L_\perp^2}\sin^2 n_\kappa\varphi_p\, e^{-2\pi\mu_\kappa} \cdot$$

$$\cdot \sin 2\pi n_\kappa \sin 2\pi\nu_z \tag{19}$$

Оценка декремента (18) для ВЭПП-3 даёт $\delta \sim 10^2\,\text{сек}^{-1}$ при $\gamma = 300$, $N = 10^{12}$, и характерным размером неоднородностей камеры $\sim$ 20 см.

В заключение авторы выражают благодарность G. Amman, C. Pellegrini, R Belbeoch за весьма полезные обсуждения.

Литература

1. Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, "АЭ", т.22, 3 (1967); или препринт ИЯФ СО АН СССР № 45 (1966).

2. Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, препринт № 315 ИЯФ СО АН СССР (1969).

3. Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, препринт № 318 ИЯФ СО АН СССР (1969).

4. Н.С.Диканский, А.Н.Скринский, "АЭ", 21, 176 (1966).

Ответственный за выпуск Д.В.Пестриков
Подписано к печати 31.УП-1969г.
Усл. 0,6 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 826

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.