И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 325

М.Я.Пальчик

О СЛАБОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

НОВОСИБИРСК
1969

М.Я.Пальчик

О СЛАБОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

АННОТАЦИЯ

Сравниваются групповой и гравитационный подходы к теории свободного безмассового поля со спином два. Показано, что псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица в предельном случае слабого поля совпадает с тензором энергии-импульса, построенным групповым методом.

1. Как известно, теорию свободного безмассового поля со спином два можно построить, используя методы теории групп /1,2/. При этом получаются как уравнения поля, так и выражение для симметричного тензора энергии-импульса, расходимость которого в силу уравнений поля равна нулю.

С другой стороны та же теория поля должна получиться из уравнений Эйнштейна для слабого гравитационного поля в пустоте, а тензор энергии-импульса – из псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, если в последнем ограничиться приближением слабого поля.

Мы покажем, что исходя из групповых соображений можно построить два симметричных тензора энергии-импульса $t^{(1)}_{kl}$ и $t^{(2)}_{kl}$, а псевдотензор энергии-импульса t_{kl} Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица /3/, записанный для слабого поля в пустоте может быть представлен в виде суперпозиции этих тензоров $t_{kl} = t^{(2)}_{kl} - \frac{1}{2} t^{(1)}_{kl}$. Расходимость каждого из тензоров $t^{(1)}_{kl}$ и $t^{(2)}_{kl}$ исчезает в силу уравнений поля.

Как будет показано, эти тензоры отличаются на величину $\partial_n \psi_{knl}$ $\quad (\psi_{knl} = -\psi_{nkl})$, не дающую вклада в энергию и импульс поля. Аналогичную ситуацию мы встречаем и в электродинамике, где могут быть определены два симметричных тензора энергии-импульса

$$T^{(1)}_{kl} = -F_{km}F_{lm} + \frac{1}{4}\eta_{kl}F_{mn}F_{mn}; \quad F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k \tag{1}$$

$$T^{(2)}_{kl} = -\partial_k A_m \partial_l A_m + \frac{1}{2}\eta_{kl}\partial_m A_n \partial_m A_n$$
$$\partial_m A_m = 0 \tag{2}$$

Используется метрика $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$

Их разность может быть представлена в виде

$$T^{(1)}_{kl} - T^{(2)}_{kl} = P_{kl} + Q_{kl} + \partial_n \psi_{kn,l} \tag{3}$$

где

$$P_{kl} = A_l \Box A_k \tag{4}$$

$$Q_{kl} = \frac{1}{2}\eta_{kl} A_n \partial_n \partial_m A_m + $$
$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_l A_k \partial_m A_m - A_k \partial_l \partial_m A_m\right) - A_l \partial_k \partial_m A_m \tag{5}$$

$$\Psi_{kl} = \left(A_l \partial_k A_n - A_l \partial_n A_k\right) + \frac{1}{2}\left(A_k \partial_l A_n - A_n \partial_l A_k\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\eta_{nl} A_m \partial_m A_k - \eta_{kl} A_m \partial_m A_n\right) \tag{6}$$

В случае свободного поля $P_{kl} = Q_{kl} = 0$, а величина $\partial_n \Psi_{knl}$ не дает вклада в энергию и импульс поля.

П. Рассмотрим групповой метод построения тензора энергии-импульса свободного безмассового поля со спином два. Согласно /1,2/ это поле описывается неприводимым (относительно полной группы Лоренца, включающей отражения) тензором F_{klmn}, преобразующимся по представлению (2,0) $\oplus$ (0,2):

$$F_{klmn} = -F_{lkmn} = -F_{klnm}; \quad F_{klmn} = F_{mnkl} \tag{7}$$

$$F_{kmlm} = 0; \qquad F_{kmnr} + F_{nkmr} + F_{mnkr} = 0 \tag{8}$$

Из уравнений поля

$$\partial_n F_{klmn} = 0 \tag{9}$$

следует, ввиду (7) и (8), что тензор F_{klmn} удовлетворяет уравнениям, аналогичным тождеству Бианки

$$\partial_l F_{kmnr} + \partial_m F_{lknr} + \partial_k F_{mlnr} \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) эквивалентны, поскольку тензор F_{klmn} неприводим.

Заметим, что структура тензора F_{klmn} не позволяет построить из него тензора энергии-импульса. В этом можно убедиться, записав тензор F_{klmn} и уравнения поля (9) в спинорной форме /4/. Тензору F_{klmn} в спинорной формулировке соответствуют два симметричных спинтензора F_{ABCD} и $F_{\dot E\dot F\dot G\dot H}$ а уравнения поля имеют вид

$$\partial_{A\dot H} F_{ABCD} = 0, \qquad \partial_{A\dot E} F_{\dot E\dot F\dot G\dot H} = 0 \tag{9^1}$$

Ясно, что не существует отличной от нуля билинейной комбинации из спинтензоров F_{ABCD} и $F_{\dot E\dot F\dot G\dot H}$, обладающей всеми свойствами тензора энергии-импульса. Таким образом для построения тензора энергии-импульса необходимо ввести величины, связанные с полем, но имеющие иную тензорную структуру.
Этими величинами являются потенциалы. Из (7) следует, что потенциалами могут быть тензоры не ниже второго ранга. Мы введем два потенциала φ_{kl} $(\varphi_{kl} = \varphi_{lk})$ и $B_{kl,m}$ $(B_{kl,m} = -B_{lk,m})$ из которых поле F_{klmn} получается двухкратным и однократным дифференцированием. Потребуем, чтобы потенциалы, как и поле, были непривозимыми тензорами. Рассмотрим оба потенциала подробнее.

1. Условия симметрии, обеспечивающие неприводимость потенциала $B_{kl,m}$ суть.

$$B_{kl,m} = -B_{lk,m}; \quad B_{km,m} = 0; \quad B_{kl,m} + B_{mk,l} + B_{lm,k} = 0 \tag{11}$$

Положим

$$F_{klmn} = \partial_m B_{kl,n} - \partial_n B_{kl,m} \tag{12}$$

Тогда уравнения (10) выполняются тождественно. Что касается уравнений поля (9), то они, как уже отмечалось вытекают из уравнений (10), если тензор F_{klmn} неприводим, и, следовательно, также удовлетворяются тождественно. Используя условия неприводимости (8) тензора F_{klmn}, находим с учетом (11) уравнения, которым должен удовлетворять потенциал $B_{kl,m}$:

$$\partial_k B_{kl,m}=0;\quad \partial_l B_{mn,r}+\partial_n B_{lm,r}+\partial_m B_{nl,r}=0 \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$\Box B_{kl,m}=0;\qquad \partial_m B_{kl,m}=0 \tag{14}$$

Второе из уравнений (14) следует рассматривать, как калибровочное условие.

2. Потенциал φ_{kl} удобно ввести следующим образом. Представим потенциал $B_{kl,m}$ в виде

$$B_{kl,m}=\frac{1}{2}(\partial_l\varphi_{km}-\partial_k\varphi_{lm}) \tag{15}$$

где φ_{kl} - неприводимый тензор:

$$\varphi_{kl}=\varphi_{lk};\qquad \varphi_{mm}=0 \tag{16}$$

Из условий $B_{km,m}=0$ и $\varphi_{mm}=0$ следует, что потенциал φ_{kl} подчинен калибровочным условиям

$$\partial_m\varphi_{lm}=0 \tag{17}$$

Подставляя (15) в (13) находим, что второе из уравнений (13) удовлетворяется тождественно, а первое вместе с условиями калибровки (17) дает

$$\Box\varphi_{kl}=0 \tag{18}$$

Тензор поля F_{klmn} выражается через потенциал φ_{kl} по формуле

$$F_{klmn}=\frac{1}{2}(\partial_l\partial_m\varphi_{kn}+\partial_k\partial_n\varphi_{lm}-\partial_l\partial_n\varphi_{km}-\partial_k\partial_m\varphi_{ln}) \tag{19}$$

Из потенциалов φ_{kl} и $B_{kl,m}$ можно построить два симметричных тензора энергии-импульса (ср. с (1) и (2)):

$$t^{(1)}_{kl}=\frac{1}{4}\left(\partial_k\varphi_{mn}\partial_l\varphi_{mn}-\frac{1}{2}\eta_{kl}\partial_r\varphi_{mn}\partial_r\varphi_{mn}\right) \tag{20}$$

$\partial_l t^{(1)}_{kl}=0$ ввиду уравнения (18)

$$t^{(2)}_{kl}=B_{km,n}B_{lm,n}-\frac{1}{4}\eta_{kl}B_{mn,r}B_{mn,r} \tag{21}$$

$\partial_l t^{(2)}_{kl}=0$ в силу уравнений (13)

Других тензоров энергии-импульса из потенциалов φ_{kl} и $B_{kl,m}$ не существует, в чем можно убедиться перейдя к спинорному представлению.

Докажем, что оба тензора $t^{(1)}_{kl}$ и $t^{(2)}_{kl}$ приводят к одинаковой энергии поля. Представим их разность в виде (ср.с (3) - (6)):

$$t^{(2)}_{kl}-t^{(1)}_{kl}=P_{kl}+Q_{kl}+\partial_n\Psi_{kn,l} \tag{22}$$

где $P_{kl}=-\varphi_{ls}\Box\varphi_{ks}$ (23)

$$Q_{kl}=\varphi_{ls}\partial_k\partial_m\varphi_{ms}+\frac{1}{2}(\varphi_{ks}\partial_l\partial_m\varphi_{ms}-\partial_l\varphi_{ks}\partial_m\varphi_{ms})-\frac{1}{2}\eta_{kl}\varphi_{ns}\partial_n\partial_m\varphi_{ms} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{kn,l}=-\Psi_{nk,l}&=(\varphi_{ls}\partial_n\varphi_{ks}-\varphi_{ls}\partial_k\varphi_{ns})+\\&+\frac{1}{2}(\varphi_{ns}\partial_l\varphi_{ks}-\varphi_{ks}\partial_l\varphi_{ns})+\\&+(\eta_{kl}\varphi_{ms}\partial_m\varphi_{ns}-\eta_{ln}\varphi_{ms}\partial_m\varphi_{ks});\end{aligned} \tag{25}$$

Первый член в (22) равен нулю в силу (18), второй - вследствие калибровочных условий (17). Третий член представляет собой дивергенцию от антисимметричного тензора (25) и не дает вклада в энергию и импульс поля. Таким образом, окончательно тензор энергии-импульса может быть записан в виде

$$t_{kl} = B_{km,n} B_{lm,n} - \frac{1}{4} \eta_{kl} B_{mn,r} B_{mn,r} \qquad (26)$$

Заметим, что как и в случае электродинамики $t_{ll} = 0$.

Ш. Покажем, что рассмотренная выше теория поля есть предельный случай общей теории тяготения. Тензором кривизны пустого пространства является тензор Вейля /4/, имеющий в случае слабого поля вид /3/:

$$C_{klmn} = R_{klmn} + \frac{1}{2}(-\eta_{ln} R_{km} - \eta_{km} R_{ln} + \eta_{kl} R_{mn} + \eta_{mn} R_{kl}) + \frac{1}{6} R (\eta_{km} \eta_{ln} - \eta_{kn} \eta_{lm}) \qquad (27)$$

Можно проверить, что след тензора $h_{kl} = g_{kl} - \eta_{kl}$, где g_{kl} -метрический тензор слабого поля, не дает вклада в тензор Вейля. Поэтому, кроме условий гармоничности мы можем наложить на тензор h_{kl} условие бесследности

$$h_{mm} = 0 \qquad (28)$$

При этом условие гармоничности принимает вид

$$\Gamma_{kmm} = \partial_m h_{km} = 0 \qquad (29)$$

а символы Кристоффеля становятся бесследными также и по первой паре индексов

$$\Gamma_{mmk} = 0 \qquad (30)$$

Тензор h_{kl} в гармонической системе координат удовлетворяет уравнению

$$\Box h_{kl} = 0 \qquad (31)$$

Для дальнейших целей удобно записать Γ_{klm} в виде

$$\Gamma_{klm} = A_{kl,m} + \frac{1}{2} \partial_m h_{kl} \qquad (32)$$

где $A_{kl,m} = \frac{1}{2}(\Gamma_{kl,m} - \Gamma_{lk,m}) = \frac{1}{2}(\partial_l h_{km} - \partial_k h_{lm})$ (33)

Как следует из (28) и (32)

$$A_{kl,m} = -A_{lk,m}; \quad A_{km,m} = 0$$

$$A_{kl,m} + A_{mk,l} + A_{lm,k} = 0 \qquad (34)$$

С групповой точки зрения представление Γ_{klm} в виде (32) означает следующее. Сорок величин Γ_{klm} образуют тензор третьего ранга. Его разложение на неприводимые представления имеет вид:

$$\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \qquad (35)$$

Оба вектора Γ_{kll} и Γ_{mmk} исключаются условиями (29) и (30). Переходя от Γ_{klm} к антисимметричной комбинации $\frac{1}{2}(\Gamma_{klm} - \Gamma_{lkm})$ мы исключаем из разложения (35) полностью симметричный бесследный тензор, преобразующийся по представлению ($\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$). Оставшийся 16-и компонентный тензор $A_{kl,m}$, преобразуется по представлению $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Только этот тензор и дает вклад в тензор Вейля

$$C_{klmn} = \partial_m \Gamma_{kln} - \partial_n \Gamma_{klm} = \partial_m A_{kl,n} - \partial_n A_{kl,m} \qquad (36)$$

Как следует из (31) и (33), тензор A_{klm} удовлетворяет уравнениям

$$\partial_k A_{kl,m} = 0; \quad \partial_l A_{mn,k} + \partial_n A_{lm,k} + \partial_m A_{nl,k} = 0 \qquad (37)$$

Кроме того, условие гармоничности (29) дает

$$\partial_m A_{kl,m} = 0 \qquad (38)$$

Псевдотензор энергии-импульса /3/ в случае слабого поля является тензором и принимает с учетом (29) и (30), вид

$$t_{kl}=\frac{c^4}{16\pi k}\{-\Gamma_{nkm}\Gamma_{mlm}-\Gamma_{lmn}\Gamma_{nkm}-\Gamma_{kmn}\Gamma_{nlm}+$$

$$+\Gamma_{kmn}\Gamma_{lmn}+\eta_{kl}\Gamma_{mnr}\Gamma_{rmn}\} \tag{39}$$

Подставляя (32) в (39) находим (ср.)20) и (21):

$$t_{kl}=t^{(2)}_{kl}-\frac{1}{2}t^{(1)}_{kl} \tag{40}$$

где $$t^{(1)}_{kl}=\frac{c^4}{64\pi k}\{\partial_k h_{mn}\partial_l h_{mn}-\frac{1}{2}\eta_{kl}\partial_r h_{mn}\partial_r h_{mn}\} \tag{41}$$

$$t^{(2)}_{kl}=\frac{c^4}{16\pi k}\{A_{km,n}A_{lm,n}-\frac{1}{4}\eta_{kl}A_{mn,r}A_{mn,r}\} \tag{42}$$

Используя уравнения (31) и (37) нетрудно проверить, что

$$\partial_l t^{(1)}_{kl}=\partial_l t^{(2)}_{kl}=0$$

Разность $(t^{(2)}_{kl}-t^{(1)}_{kl})$ может быть представлена подобно (22)-(25) в виде дивергенции, не дающей вклада в энергию и импульс поля. Опуская эту дивергенцию окончательно получим

$$t_{kl}=\frac{c^4}{32\pi k}\{A_{km,n}A_{lm,n}-\frac{1}{4}\eta_{kl}A_{mn,r}A_{mn,r}\} \tag{44}$$

IУ. Из изложенного следует, что теория поля, построенная групповым методом является теорией слабого гравитационного поля.

Действительно, поля описываются одинаковыми тензорами, удовлетворяющими одним и тем же уравнениям. Тензоры h_{kl} и $A_{kl,m}$ совпадают с потенциалами φ_{kl} и $B_{kl,m}$, а условие гармоничности эквивалентно калибровочным условиям. Тензоры энергии - импульса совпадают. Таким образом всю информацию о слабом гравитационном поле в пустоте можно получить исходя только из трансформационных свойств этого поля, не обращаясь к геометрическим представлениям.

Автор благодарен Ю.Б.Румеру за предложенную тему и руководство работой.

Литература

/1/ S. Weinberg, Phys. Rev., 134, N4B, 882, (1964)

/2/ S. Weinberg, Phys. Rev., 138, N4B, 988 (1965)

/3/ Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Теория поля. Наука, 1967г., стр.339, 394.

/4/ Гравитация и топология (сб.статей), Мир, 1966. Сакс. гравитационное излучение.

Ответственный за выпуск М.Я.Пальчик
Подписано к печати 30.У11-1969г.
Усл. 0,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 325

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв