20


# И Н С Т И Т У Т
## ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР


препринт 310

В.Ц.Гурович, В.И.Карпман

# О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

НОВОСИБИРСК

1969

В.Ц.Гурович, В.И.Карпман

# О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ЭЛЕКТРО - ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ


## А Н Н О Т А Ц И Я

Получены асимптотические формулы, описывающие эволюцию уединенных электрозвуковых волн в плазме, обусловленную электрон-ионными столкновениями.

В работе /1/ было показано, что в плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью могут распространяться "электрозвуковые солитоны" - уединенные стационарные волны разрежения плотности, заполненные запертым в них высокочастотным электромагнитным полем. В работе /2/ было получено общее нестационарное решение уравнений для электрозвуковых волн достаточно малой амплитуды, которое описывает динамику формирования электрозвуковых солитонов под действием падающей на границу плазмы модулированной электромагнитной волны.

В цитированных работах предполагалось, что диссипативными процессами можно пренебречь. Условия малости последних были кратко рассмотрены в /1/. Однако, даже малые диссипативные эффекты, не влияющие существенным образом на процесс формирования электрозвуковых солитонов, определяют, в значительной мере, их дальнейшую эволюцию.

Настоящая заметка посвящена исследованию роли электрон-ионных столкновений (э.и.с.) в динамике электрозвуковых солитонов малой амплитуды (в разреженной плазме с $T_e \gg T_i$ этот диссипативный эффект является основным в широкой области параметров /1/).

Для вывода уравнений, описывающих эволюцию электрозвуковых волн в случае малой (но конечной) частоты э.и.с., запишем электрическое поле в виде

$$\mathcal{E}(x,t) = Re\left[E(x,t)e^{-i\omega t}\right],$$

где $E(x,t)$ - медленно меняющаяся комплексная амплитуда.

Уравнение для $E$ имеет вид (см. /1/ уравнение (1.19))

$$\left[\omega^2\varepsilon_0 + \omega^2\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\rho_0}(\rho-\rho_0) + c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]E + i\,\frac{\partial(\omega^2\varepsilon_0)}{\partial\omega}\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon_0(\omega,\rho_0)$ - диэлектрическая проницаемость плазмы при равновесной плотности $\rho_0$, определяемая выражением

$$\varepsilon_0 = 1 - \omega_0^2/\omega^2 + i/\tau\omega \qquad (2)$$

Величина $\tau$ – есть характерное время э.и.с. /3/

$$\tau^{-1}=\tau_{ei}^{-1}\approx\frac{\pi e^4 n_0}{T_e^{3/2}m_e^{1/2}}\ln\left(0{,}37\frac{T_e}{e^2 n_0^{1/3}}\right). \qquad (3)$$

При этом предполагается, что

$$(\tau\omega)\gg 1. \qquad (4)$$

Записав далее комплексную амплитуду поля в виде

$$E=a(x,t)e^{i\varphi(x,t)}$$

где $a(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ – действительные функции, из (1), (2), опуская член с $\partial E/\partial t$, малый по сравнению с $c^2\partial^2E/\partial x^2$ (см. /1/, § 3), получим

$$a_{xx}-\mu^2\gamma^{-2}(\gamma^2+\nu)a-\varphi_x^2 a=0,$$

$$(a^2\varphi_x)_x=-\omega a^2/c^2\tau. \qquad (5)$$

Для волн достаточно малой (но конечной) амплитуды, распространяющихся в положительном направлении оси $x$, величина $\nu=(\rho-\rho_0)/\rho_0$ удовлетворяет уравнению /4/.

$$\nu_t+c_s\nu_x=-c_s(a^2)_x/2E_c^2. \qquad (6)$$

В уравнениях (5), (6) введены следующие обозначения

$$\mu^2=(\omega_0^2-\omega^2)/c^2,$$

$$\gamma^2=(\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2 \qquad (7)$$

$$E_c^2\approx 16\pi\rho_0 c_s^2,\quad c_s^2=T_e/m_i.$$



При $\tau=\infty$ система (5), (6) совпадает с полной системой уравнений для электрозвуковых волн достаточно малой амплитуды, изучавшейся в работах /2, 4/. Соответственно, область применимости уравнений (5), (6) ограничена теми же условиями, что и в /2, 4/.

В статическом случае, когда плотность плазмы не зависит от времени, уравнения (5), (6) совпадают с уравнениями стационарного скин-слоя, полученными и исследованными Силиным /5/.

Система (5), (6) имеет решение вида

$$a(x,t)=e^{-t/2\tau}A(\xi),\quad \varphi=\varphi(\xi),$$

$$\nu(x,t)=\frac{A_0^2-A^2(\xi)}{2E_c^2(1-w/c_s)}-\gamma^2, \qquad (8)$$

где

$$\xi=x-c_s t+\tau(c_s-w)(1-e^{-t/\tau}), \qquad (9)$$

$$A_{\xi\xi}-\mu^2\frac{(A_0^2-A^2)A}{2E_c^2\gamma^2(1-w/c_s)}-\frac{P^2(\xi)}{A^3}=0, \qquad (10)$$

$$dP/d\xi=-A^2\omega/\tau c^2, \qquad (11)$$

$$P(\xi)=\varphi_\xi A^2.$$

$w$ и $A_0$ – здесь произвольные постоянные.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (10),(11) для функций $A(\xi)$ и $P(\xi)$ совпадает по форме с уравнениями (5.2), (5.3) работы /5/. Используя полученные там результаты, мы заключаем, что при достаточно малой частоте э.и.с. $\tau^{-1}$ функция $A(\xi)$ имеет общий вид, изображенный на рисунке. Для наглядности там приведен вид решений при двух различных значениях $\tau$.

При $(\omega\tau)\to\infty$ расстояния между отдельными осцилляциями в передней части волны возрастают. При этом первые осцилляции на фронте, достаточно удаленные друг от друга, могут быть описаны следующим асимптотическим (при $(\omega\tau)\to\infty$ ) выражением[1)]

$$A(\xi)=2E_c\gamma(1-w/C_s)^{1/2}\,\mathrm{sech}\,\Gamma(\xi-\xi_0), \tag{12}$$

где $\xi_0$ - "координата" вершины рассматриваемой осцилляции (см. рис. ). Постоянная , фигурирующая в уравнении (10), имеет при этом следующий предел

$$\lim_{(\omega\tau)\to\infty} A_0=\sqrt{2}\,E_c\gamma(1-w/C_s)^{1/2}. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в формулы (8), получим следующие асимптотические выражения, описывающие амплитуду поля и относительное изменение плотности плазмы в первой осцилляции при больших $\omega\tau$

$$a(x,t)=e^{-t/2\tau}A_m\,\mathrm{sech}\,\Gamma(\xi-\xi_0), \tag{14}$$

$$A_m=2E_c\gamma(1-w/C_s)^{1/2}, \tag{15}$$

$$\nu=-2\gamma^2\,\mathrm{sech}^2\,\Gamma(\xi-\xi_0) \tag{16}$$

---

1) При достаточно малых значениях величины $(\omega\tau)^{-1}$ из уравнения (11) следует, что $dP/d\xi\approx 0$ . Учитывая это и граничное условие $A(\infty)=0$ получаем из уравнения (10) приближенное выражение (12). Область применимости этого соотношения рассмотрена в Приложении.



Формулы (14) - (16) вместе с выражением для величины описывают электрозвуковой солитон, имеющий при $t=0$ амплитуду $A_m$ и скорость $w$ (ср. с соответствующими выражениями в работах /2, 4/). В последующие моменты времени волна, описываемая формулами (14) - (16) и (9), сохраняет солитоноподобную форму. Её "число Маха" определяется выражением

$$M(t)=\frac{1}{C_s}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\xi=\xi_0}=1-[1-M(0)]\,e^{-t/\tau}, \tag{17}$$

$$M(0)=w/C_s, \tag{18}$$

а максимальная амплитуда электрического поля равна

$$a_m(t)=A_m\exp(-t/2\tau) \tag{19}$$

Согласно уравнениям (15), (17) и (19), связь между амплитудой $a_m(t)$ и числом Маха в любой момент времени имеет вид

$$a_m(t)=2E_c\gamma[1-M(t)]^{1/2}, \tag{20}$$

что совпадает с соответствующим выражением для электрозвуковых солитонов малой амплитуды без учёта затухания.

Таким образом, учёт э.и.с. приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды поля в солитоне[2)]; соответственно, число Маха согласно формуле (17) экспоненциально приближается к единице при .

---

2) Обсуждаемое здесь частное решение, как видно из рисунка, описывает электрозвуковые волны, возбуждаемые на границе плазмы при некоторых специальных граничных условиях, определяемых значениями функций $a(x,t)$, $P(x,t)$ и $\nu(x,t)$ при $x=0$ .

Однако, как следует из формул, описывающих это решение, передняя волна при достаточно больших $t$ перестает зависеть от граничных условий и принимает форму солитона, так что формулы (14)-(16) и (9) описывают распространение солитона с учетом э.и.с. в случае $(\omega\tau)\gg 1$ .

Что касается профиля относительной плотности $\nu$, то его вид, как следует из выражения (16), не зависит от времени. Это связано, во-первых, с тем, что мы не учитываем более медленных диссипативных процессов: ионнозвукового затухания Ландау и вязкости плазмы вследствие ион-ионных столкновений. Во-вторых, мы пренебрегаем нелинейным укручением профиля плотности ионнозвуковой волны (уравнение (6) получается из линеаризованных уравнений ионнозвуковой газодинамики).

Условие применимости выражений (14) - (16) и (9) имеет вид [3], (см.Приложение)

$$(\tau\omega) \gg (10/\gamma)^2 \qquad (21)$$

Остановимся теперь кратко на роли других диссипативных эффектов. Если процессы вязкости и теплопроводности в плазме играют следующую роль после э.и.с., то эволюция электрозвукового солитона будет происходить следующим образом: сначала затухнет запертое в нем электромагнитное поле, а скорость его приблизится к скорости звука. Затем совместное действие вязкости, теплопроводности и нелинейного укручения приведет к треугольной форме профиля плотности.

Пользуемся возможностью выразить благодарность В.П.Соколову за полезное обсуждение результатов.

---

3) Для того, чтобы частота э.и.с. была много больше декремента затухания Ландау для ионнозвуковой волны $\tau_L^{-1}$, должно выполняться неравенство $\tau^{-1} \gg \tau_L^{-1} \approx 10^{-2}\omega\gamma/c$. Из условия совместности последнего с выражением (21) следует: $c_s/c\gamma \ll 1$. Это неравенство есть одновременно условие справедливости исходных уравнений (5) (см. /1/) и потому считается выполненным с самого начала.



ПРИЛОЖЕНИЕ

Выясним область справедливости решения (12). Для этого подставляем (12) в уравнение (11). При граничном условии $\rho(\infty)=0$ получаем

$$\rho(\xi) = \frac{\omega A_m^2}{c^2\tau\mu}\left[1 - th\,\mu(\xi-\xi_0)\right] \qquad (П.1)$$

Вычисляя с помощью (П.1) и (12) отношение последнего члена к первому в уравнении (10), получим

$$\frac{\rho^2(\xi)}{A^3(\xi)A_{\xi\xi}} = \frac{\omega^2}{c^4\tau^2\mu^4}\,\frac{e^{-2\mu(\xi-\xi_0)}}{[sh^2\mu(\xi-\xi_0)-1]}\,ch^4\mu(\xi-\xi_0). \qquad (П.2)$$

Из этого выражения следует, что

$$\frac{\rho^2(\xi)}{A^3A_{\xi\xi}} \sim \begin{cases} (\gamma^2\tau\omega)^{-2}, & \xi > \xi_0 \\ (\gamma^2\tau\omega)^{-2}e^{4\mu(\xi_0-\xi)}, & \xi < \xi_0 \end{cases} \qquad (П.3)$$

Чтобы членом с $\rho^2$ в уравнении (10) можно было пренебречь в области значений $\xi$, отвечающих солитону с вершиной в точке $\xi=\xi_0$ необходимо, чтобы отношение, стоящее в левой части (П.3) было достаточно малым на расстоянии нескольких солитонных длин от вершины[4]. Полагая $\xi_0 - \xi = \kappa\mu^{-1}$,

---

4) Величина (П.2) становится большой также в окрестности точки перегиба солитонного профиля (где $A_{\xi\xi}=0$). Однако, величина этой области имеет порядок $\delta\xi \approx \mu^{-1}(\gamma^2\tau\omega)^{-2} \ll \mu^{-1}$, т.е. много меньше размера солитона.

где $K \sim 1$, получим соответствующее условие в виде

$$(\tau\omega) \gg \gamma^{-2} e^{2K} \qquad (\text{П}.4)$$

Считая, для определенности, что $K=2$, получаем (21).

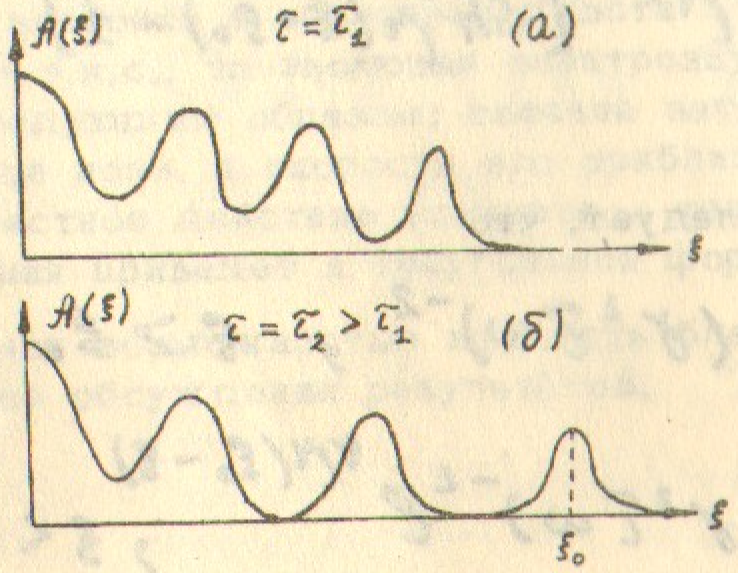


рис. 1



Литература


1. В.Ц.Гурович, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 56, № 6, 1969.

2. В.И.Карпман. Письма в ЖЭТФ, 9, 430, 1969.

3. В.Л.Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. Наука, М., 1967.

4. В.Ц.Гурович, В.И.Карпман, Р.Н.Кауфман. ЖЭТФ, 56, № 6, 1969.

5. В.П.Силин. ЖЭТФ, 53, 1662, 1967.

Ответственный за выпуск В.Ц.Гурович.
Подписано к печати 21.5.69.
Усл. 0,5 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.
Заказ № 310

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.