

13  
И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

препринт 300

В.Н.Байер, В.С.Фадин

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО  
ФОРМФАКТОРА ПИОНА

НОВОСИБИРСК

1969



В.Н.Байер, В.С.Фадин

## К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ФОРМФАКТОРА ПИОНА

### А Н Н О Т А Ц И Я

При определенных предположениях о свойствах электромагнитного формфактора пиона как аналитической функции в комплексной плоскости передач импульса проведен анализ поведения формфактора при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Получены ограничения на модуль формфактора и электромагнитный радиус пиона. Указан способ получения интегральных представлений формфактора и получен ряд конкретных представлений. Найдены и проанализированы правила сумм, которым удовлетворяет формфактор и рассмотрены некоторые вопросы, возникающие при их использовании. Обсуждена современная экспериментальная ситуация для формфактора.



V.N. BAIER, V.S. FADIN

## a b s t r a c t

An analysis of behaviour of the pion form factor at  $t \rightarrow i\infty$  has been made under definite assumptions on the property of the form factor as analytic function in the complex plane of the momentum transfer  $t$ . Bounds on the modulus of the form factor and the electromagnetic radius of pion have been found. The method has been formulated which permits to obtain integral representations of the form factor and some definite representations have been obtained. The sum rules for form factor have been found and analysed and some questions connected with using of the sum rules have been considered. Modern experimental situation for pion form factor has been discussed.

1. В последнее время в опытах на встречных пучках с удовлетворительной точностью измерено сечение процесса  $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$  в области  $\rho^0$ -резонанса [1, 2, 3]

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{\pi\alpha^2}{3} \frac{(t - 4m_\pi^2)^{3/2}}{t^{5/2}} |F(t)|^2$$

Отсюда определяется модуль электромагнитного формфактора пиона  $F(t)$  в исследованной области времениподобных передач импульса  $t$  (детальное обсуждение полученных результатов см. в разделе 7).

В пространственноподобной области передач импульса формфактор определяется из измерения сечения электророждения пиона на протоне при кинематических условиях, когда доминирует вклад пионной полюсной диаграммы [4] (ссылки на другие работы в этой области см. в [4]). Степень надежности результатов здесь существенно меньше, чем во времениподобной области как вследствие неопределенностей в теоретическом анализе, так и из-за больших экспериментальных разбросов. Усредненные экспериментальные данные здесь дают

$$F(t) = \left(1 + \frac{|t|}{m^2}\right)^{-1} \quad (1)$$

где  $m^2 = (0,56 \pm 0,08) (\text{Гэв})^2$ ,  $t < 0$ ,  $0 < |t| < 0,4 \left(\frac{\Gamma_{\rho^0}}{c}\right)^2$ , что соответствует зарядовому радиусу пиона  $r_\pi = (0,86 \pm 0,14) f$ . Результаты других экспериментов в этой области гораздо менее определены ( $r_\pi < 3f$  из данных по  $\pi-e$  рассеянию и  $r_\pi < 1f$  из данных по  $\pi-\alpha$  рассеянию).

Представляет большой интерес вопрос о свойствах формфактора, следующих из имеющейся экспериментальной информации (в частности, вопрос об ограничениях на поведение формфактора и асимптотиках при  $t \rightarrow \pm\infty$ ), если исходить из надежно установленных свойств формфактора, не связанных с определенными моделями. Мы будем предполагать, что формфактор обладает следующими свойствами.

1. Формфактор  $F(t)$  является аналитической функцией в комплексной плоскости  $t$  с разрезом<sup>x)</sup> от  $t=1$  до  $\infty$ .  
 x) При исследовании аналитических свойств формфактора мы будем пользоваться импульсом в единицах  $4m_\pi^2$ .



2. Функция  $F^*(t) = F(t^*)$ , так что  $F(t)$  - вещественная функция на действительной оси при  $t < 1$ .

3. Имеет место  $|F(t)| < A e^{\epsilon/\sqrt{|t|}}$  для любых  $\epsilon > 0$  во всей комплексной плоскости. Имеются утверждения, что это неравенство следует из локальной теории поля (см., напр., /5/).

4. Выполняется условие нормировки  $F(0) = 1$ .

2. Представляет интерес взаимоотношение между асимптотическим поведением формфактора при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Для сравнения поведения формфактора при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow \infty$  можно воспользоваться следующим утверждением. Для любой функции  $A(t)$ , аналитической в верхней полуплоскости и удовлетворяющей условию  $|A(t)| < C e^{\epsilon|t|}$  для любого  $\epsilon > 0$

при  $\text{Im } t \geq 0$ , такой что  $F(t)A(t) \rightarrow a$  при  $t \rightarrow -\infty$ ,

имеет место  $|a| \leq a_0$ , где  $a_0$  верхняя граница предельных значений  $|F(t)A(t)|$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это есть

следствие теоремы Фрагмена-Линделефа ([6], стр.160) и теоремы о множествах предельных значений аналитической функции при стремлении к некоторой точке границы области вдоль граничных дуг ([7], стр.67-68). Например, из этого утверждения следует, что если

$$F(-t) \rightarrow \frac{a e^{-\beta t^{\alpha_1}}}{t^{\alpha_2} (\ln t)^{\alpha_3}}, \quad 0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{2} \quad (2)$$

то в случае когда  $|F(t)|$  стремится к определенному пределу при  $t \rightarrow +\infty$

$$|F(t)| \geq \frac{|a| e^{-\beta t^{\alpha_1} \cos \pi \alpha_1}}{t^{\alpha_2} (\ln t)^{\alpha_3}} \quad (3)$$

Особый интерес представляет возможность экспоненциального падения  $F(-t) \rightarrow a e^{-\beta \sqrt{t}}$  ( $\beta > 0$ ). Дело в том, что современные экспериментальные данные для формфакторов нуклона (вполне вероятно, что качественные особенности поведения формфакторов нуклона и пиона одинаковы) возможно указывают именно на такое падение. Тогда при  $t \rightarrow +\infty, |F(t)| \geq |a|$

3. Формфактор  $F(t)$ , удовлетворяющий перечисленным в

разделе 1 требованиям, не может произвольно убывать при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Ограничения на скорость убывания могут быть получены с помощью теоремы о двух константах ([8], стр.157). Согласно этой теореме, если функция  $f(z)$  аналитическая и ограниченная в области  $\mathcal{D}$ , граница которой  $S$  состоит из двух множеств  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , каждое из которых содержит конечное число дуг, причём

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi \in \alpha_1} |f(z)| \leq m_1, \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi \in \alpha_2} |f(z)| \leq m_2 \quad (4)$$

то при любом  $z \in \mathcal{D}$

$$|f(z)| \leq m_1 \omega(z, \alpha_1, \mathcal{D}) + m_2 \omega(z, \alpha_2, \mathcal{D}) \quad (5)$$

где  $\omega(z, \alpha, \mathcal{D})$  - гармоническая мера множества  $\alpha$  относительно области  $\mathcal{D}$  в точке  $z$ . По определению

$\omega(z, \alpha, \mathcal{D})$  - гармоническая и ограниченная функция в  $\mathcal{D}$ , такая, что

$$\omega(z, \alpha_1, \mathcal{D}) = \begin{cases} 1 & z \in \alpha_1 \\ 0 & z \in \alpha_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\omega(z, \alpha_1, \mathcal{D}) + \omega(z, \alpha_2, \mathcal{D}) = 1$$

Если область  $\mathcal{D}$  конформно отображается на круг, так чтобы точка  $z$  перешла в центр круга, то гармоническая мера

$\omega(z, \alpha_1, \mathcal{D})$  будет равна углу дуги, в которую переходит  $\alpha_1$ , деленному на  $2\pi$ .

Согласно теореме Фрагмена-Линделефа, формфактор  $F(t)$ , вследствие условия 3, ограничен в комплексной области  $t$ , если он ограничен на разрезе. Поэтому к формфактору  $F(t)$ , ограниченному на разрезе, может быть применена теорема о двух константах. Пусть

$$|F(t)| \leq m_1, \quad 1 \leq t \leq t_1, \quad |F(t)| \leq m_2, \quad t_1 < t < \infty \quad (7)$$



тогда вычисляя в соответствии со сказанным выше гармоническую меру, получаем для  $(-t_0) < 1$

$$|F(-t_0)| \leq m_1 \omega(-t_0, \alpha_1) m_2 \omega(-t_0, \alpha_2) \quad (8)$$

где

$$\omega(-t_0, \alpha_1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_1-1}}{\sqrt{t_0+1}} \quad (9)$$

Отсюда переходя к большим  $t_1$  получаем, что

$$\max_{t > t_1} |F(t)| \geq m_1 [ |F(-t_0)| e^{-\ln m_1} ]^{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_0+1}}} \quad (10)$$

Теорема о двух константах допускает обобщение на случай, когда ограничение на модуль функции задано более чем на двух участках границы, т.е. когда  $\lim_{z \rightarrow z \in \alpha_k} f(z) \leq m_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )

Обобщенная теорема (о  $n$ -константах) утверждает, что для любого  $z$  из  $\mathcal{D}$

$$|f(z)| \leq e^{\sum_{k=1}^n \ln m_k \omega(z, \alpha_k, \mathcal{D})} \quad (11a)$$

причем теперь гармоническая мера

$$\omega(z, \alpha_1, \mathcal{D}) = \begin{cases} 1 & z \in \alpha_1 \\ 0 & z \in \alpha_2, \dots, \alpha_n \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n \omega(z, \alpha_k, \mathcal{D}) = 1 \quad (11b)$$

Применим это обобщение к формфактору  $F(t)$ . Учитывая, что

$$\omega(-t_0, \alpha_k) = \frac{2}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_k-1}}{\sqrt{t_0+1}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_{k-1}-1}}{\sqrt{t_0+1}} \right] \quad (12)$$

где  $\alpha_k$  есть участок разреза между точками  $t_{k-1}$  и  $t_k$

( $t_k > t_{k-1}$ ) и переходя к пределу

$t_k - t_{k-1} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) получаем, что

$$|F(-t_0)| \leq \exp \left\{ \frac{\sqrt{1+t_0}}{\pi} \int_1^\infty \frac{\ln |F(t)| dt}{\sqrt{t-1}(t+t_0)} \right\} \quad (13)$$

В этом случае неравенство (10) конкретизируется:

$$\max_{t > t_1} |F(t)| \geq [ |F(-t_0)| e^{-\frac{\sqrt{t_0+1}}{\pi} \int_1^{t_1} \frac{\ln |F(t)| dt}{\sqrt{t-1}(t+t_0)}} ]^{\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t_0+1}}{\sqrt{t_1-1}}} \quad (14)$$

Если заменить здесь  $\ln |F(t)|$  на его максимальное значение в интервале интегрирования, то мы вернемся к (10). Из условия  $F(0)=1$  и (13) вытекает, что (ср. [8, 9])

$$\int_1^\infty \frac{\ln |F(t)| dt}{t \sqrt{t-1}} \geq 0 \quad (15)$$

а из условия  $F(0)=1$  и (14)

$$\max_{t > t_1} |F(t)| \geq \left[ e^{-\frac{1}{\pi} \int_1^{t_1} \frac{\ln |F(t)| dt}{t \sqrt{t-1}}} \right]^{\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{t_1-1}}} \quad (16)$$

Заметим, что из (13) следует, что формфактор  $F(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  не может падать быстрее чем экспонента вида

$$e^{-\varepsilon \frac{\sqrt{t}}{\ln t \ln \ln t} \dots} \text{ для любых } \varepsilon > 0. \text{ Из формулы (14)}$$

при  $t_0 \gg t_1$  следует, что

$$\max_{t > t_1} |F(t)| \geq |F(-t_0)| \quad (17)$$

причем не требуется, чтобы функция  $F(-t_0)$  стремилась к определенному пределу при  $t_0 \rightarrow \infty$  (ср. раздел 2).

Если функция  $F(t)$  не имеет нулей в комплексной плоскости,  $|F(t)| > A e^{-\varepsilon t}$  при любых  $\varepsilon > 0$  и  $1/F(t)$  ограничена на разрезе, то к функции  $1/F(t)$  могут быть применены те же соображения, которые привели нас к формуле (13), т.е.



$$|1/F(t)| \leq e^{-\frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln|F(t')| dt'}{\sqrt{t'-1}(t'-t)}}, \quad t < 1 \quad (18)$$

Из (13) и (18) немедленно следует, что при выполнении указанных условий

$$F(t) = e^{\frac{\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln|F(t')| dt'}{\sqrt{t'-1}(t'-t)}} \quad (19)$$

Очевидно, что эта формула применима для любых  $t$ ; ниже мы придем к этому интегральному представлению из гораздо более простых соображений.

Если применить теорему об  $n$ -константах (11) к функции  $F(t)B(t)$  (функция  $B(t)$  удовлетворяет свойствам 1-3), то мы получим утверждение, аналогичное теореме, приведенной в разделе 2. Заметим, что здесь не требуется, чтобы  $F(t)B(t)$  стремилась к определенному пределу при  $t \rightarrow -\infty$ , а величина "а" есть верхняя грань значений  $|F(t)B(t)|$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

4. Рассмотрим ограничения на скорость изменения  $F(t)$  при  $t < 1$ . Для этого отобразим плоскость с разрезом

$1 \leq t < \infty$  на единичный круг с центром  $z=0$  так, чтобы точка  $t_0 < 1$  перешла в центр круга

$$t = \frac{4z + t_0(1-z)^2}{(1+z)^2} \quad (20)$$

Учитывая, что для функции  $\varphi(z)$  аналитической в единичном круге и такой, что  $|\varphi(z)| \leq M$  в круге, имеет место неравенство

$$M/|\varphi(0)| \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{M^2\varphi(0) - \varphi(z)|\varphi(0)|^2} \right| \leq 1 \quad (21)$$

которое проверяется непосредственно, и применяя к функции в левой стороне (21) лемму Шварца ([8], стр.97) получим ограни-

чение на скорость изменения формфактора

$$|F'(t_0)| \leq \frac{M^2 - F^2(t_0)}{4M(1-t_0)} \quad (22)$$

где  $M$  - максимальное значение модуля формфактора на разрезе. Электромагнитный радиус пиона определяется из

$$r_\pi^2 = 6F'(0) \quad \left( r_\pi^2 = \frac{3}{2m_\pi^2} F'(0) \right) \quad (23)$$

отсюда и (22) следует, что<sup>x)</sup>

$$r_\pi^2 \leq \frac{3}{8m_\pi^2} \left( M - \frac{1}{M} \right) \quad (24)$$

Если  $F(t)$  не имеет нулей в комплексной плоскости, то ограничения на скорость изменения можно получить, применяя неравенство Каратеодори ([8], стр.98) к функции  $\ln F(t)/F(t_0)$

$$|F'(t_0)| \leq \frac{|F(t_0)| \ln M / |F(t_0)|}{2(1-t_0)} \quad (25)$$

Отсюда следует более сильное, чем (24) ограничение на электромагнитный радиус пиона

$$r_\pi^2 \leq \frac{3}{4m_\pi^2} \ln M \quad (26)$$

Ограничения на поведение формфактора, полученные в разделах 2-4 являются более сильными, чем найденные в работах [10], [11]. Отметим, что в этих работах (в частности при применении теоремы о двух константах) фактически вносился дополнительный разрез при  $t < 0$  так что полученные результаты относятся к более широкому классу функций и могут быть усилены.

5. Рассмотрим вопрос об интегральных представлениях формфактора  $F(t)$  с несколько иной (и более простой) точки

х) Иным способом с использованием явного представления это ограничение получено в [9].



зрения<sup>x)</sup>. Измерения формфактора пиона во времениподобной области передач импульса дают значения  $F(t)$  на разрезе, так что, с учетом принятых нами свойств формфактора, в принципе можно с помощью теоремы Коши выразить функцию  $F(t)$  внутри области через измеренные значения, например получить известное выражение формфактора  $F(t)$  через  $\text{Im} F(t)$  на разрезе. Однако, 1) в современных экспериментах во времениподобной области измеряется модуль  $F(t)$ , 2) при написании представления  $F(t)$  через  $\text{Im} F(t)$  всегда остается вопрос о необходимом числе вычитаний. Поэтому обычно переходят к рассмотрению функции  $\ln F(t) = \ln |F(t)| + i\varphi(t)$ ,

хотя при этом возникает достаточно неприятный вопрос о нулях функции  $F(t)$  в комплексной плоскости. Пока мы рассмотрим случай отсутствия нулей. Применяя теорему Коши к функции  $\ln F(t)$  получаем представление

$$F(t) = e^{\frac{t}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(t') dt'}{t'(t'-t)}} \quad (27)$$

где в соответствии с принятыми свойствами  $F(t)$  сделано одно вычитание. Однако на эксперименте фаза формфактора  $\varphi(t)$  не измеряется. Для того, чтобы получить представление  $F(t)$  через  $|F(t)|$  на разрезе, достаточно рассмотреть функции

$\sqrt{1-t} \ln F(t)$  или  $\ln F(t)/\sqrt{1-t}$  причем в первом случае необходимо, вообще говоря, делать два вычитания (так что в представлении формфактора, например, явно войдет радиус пиона), а во втором случае можно ограничиться одним вычитанием, но на функцию  $F(t)$  накладываются более жесткие ограничения в точке  $t=1$ . Если применить теорему Коши к функции  $\ln F(t)/\sqrt{1-t}$

то мы получим формулу (19) (без вычитания в соответствии с условиями, наложенными на  $F(t)$ ). Если рассмотреть функцию вида  $\sqrt{\frac{(a_1-t)\dots(a_n-t)}{(a_{n+1}-t)(a_m-t)}} \ln F(t)$ , то можно получить различные представления для  $\ln F(t)$ , такие что формфактор выражается через модуль и фазу формфактора на разных участ-

x) Основное содержание разделов 5 и 6 входило в доклад авторов (E 860) на 14 Международной конференции по физике высоких энергий (Вена, 1968).

ках разреза если  $a_k \geq 1$ . Если же выбрать некоторые  $a_k < 1$ , то представления формфактора будут содержать дополнительные интегралы (по введенным дополнительным разрезам, как конечным, так и бесконечным). Случай, когда под корнем имеется три двучлена  $(a_k - t)$  рассмотрен в работах [12, 13] при  $a_1 = 1$  и  $a_2, a_3 < 0$ .

Приведем примеры представлений  $F(t)$  (наряду с (19)), которые могут быть получены указанным выше путем. Если применить теорему Коши к функции  $\frac{\sqrt{t_1-t}}{t\sqrt{1-t}} \ln F(t)$  для  $t_1 > 1$ , то

$$\ln F(t) = \frac{t\sqrt{1-t}}{\pi\sqrt{t_1-t}} \left[ \int_1^{t_1} \frac{\sqrt{t_1-t'} \ln |F(t')| dt'}{\sqrt{t_1-t'} t' (t'-t)} + \int_{t_1}^{\infty} \frac{\varphi(t') \sqrt{t'-t_1} dt'}{t' \sqrt{t_1-t'} (t'-t)} \right] \quad (28)$$

Это представление может оказаться полезным, если фаза формфактора  $\varphi(t)$ , которая в упругой области связана с фазой  $\pi\pi$  рассеяния, при  $t \rightarrow \infty$  стремится к константе (если существует только  $\rho$ -резонанс, то возможно  $\varphi(t) \rightarrow \pi$ ). Тогда взяв в качестве  $t_1$  границу области, где измерен  $|F(t)|$  (и где уже  $\varphi \approx \pi$ ), можно получить  $F(t)$  не зная поведения  $|F(t)|$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если применить теорему Коши к функции  $\frac{1}{t^2} \sqrt{1-t} \ln F(t)$  то мы получим для электромагнитного радиуса пиона  $r_\pi$ :

$$r_\pi^2 = \frac{6\sqrt{1-t}}{t} \left[ \ln F(t) + \frac{t^2}{\pi\sqrt{1-t}} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{t'-1} \ln |F(t')| dt'}{t'^2 (t'-t)} \right] \quad (29)$$

Если использовать наиболее точные измерения  $F(t)$  в пространственно подобной области и если вследствие хорошей сходимости в интеграл в правой части основной вклад даёт узкая область (для которой  $|F(t)|$  измерен), то из (29) мы определим электромагнитный радиус пиона.

Выше рассматривался случай, когда  $F(t)$  не имеет нулей в комплексной области. Если такие нули есть, то прямое применение теоремы Коши к функции  $\ln F(t)$  затруднено, из-за дополнительных разрезов, которые вносят эти нули. Для то-



го, чтобы исключить нули из рассмотрения, следует ввести функцию  $\tilde{F}(t)$  не содержащую нулей и такую, что у нее не меняются характеристики, через которые мы выражаем эту функцию. Если мы выражаем  $F(t)$  через значения  $|F(t)|$  на разрезе, то  $\tilde{F}(t) = \chi^{-1}(t)F(t)$ , причем  $|\chi(t)| = 1$  на разрезе,  $\chi(t)$  вещественная при  $t < 1$  и  $\chi(0) > 0$  [9]. Явный вид представления (19) с вычитанием и учетом нулей может быть записан так [9]:

$$F(t) = \frac{\chi(t)}{[\chi(0)]^{\sqrt{1-t}}} \exp \left\{ \frac{t\sqrt{1-t}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln |F(t')| dt'}{t'\sqrt{t'-1}(t'-t)} \right\} \quad (30)$$

где

$$\chi(t) = (-1)^n \prod_k \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{1-t_k}}{\sqrt{1-t} + \sqrt{1-t_k}} \quad (31)$$

где  $n$  - число нулей на вещественной оси при  $t < 0$ . Если же мы выражаем  $F(t)$  через фазу на разрезе (27), то

$\tilde{F}(t) = \psi^{-1}(t)F(t)$  причем  $\psi_+(t)/\psi_-(t) = 1$  на разрезе ( $\psi_{\pm}(t)$  значения функции на верхнем и нижнем берегу разреза). Для случая, когда мы выражаем  $F(t)$  через  $|F(t)|$  и фазу на разрезе (как, например, (28)), то следует ввести

$\tilde{F}(t) = \eta^{-1}(t)F(t)$ , причем  $\eta(t)$  удовлетворяет приведенным выше требованиям на соответствующих участках разреза.

6. Для анализа экспериментальных данных могут оказаться весьма полезными правила сумм, которые вытекают из интегральных представлений для формфактора  $F(t)$ .

Выше мы выписали правило сумм (15), которое следует из условия  $F(0) = 1$ . Это же правило сумм получается из представления (30) и условия  $|F(t)| < A e^{\epsilon|\sqrt{t}|}$ ,  $\epsilon > 0$ .

Из формул (19) и (30) следует, что знак равенства в (15) имеет место при выполнении условий а)  $F(t)$  не имеет нулей в комплексной плоскости с разрезом, б)  $F(t) > A e^{-\epsilon|\sqrt{t}|}$ ,

$\epsilon > 0$ . Если же эти условия не выполняются, то в правиле сумм (15) стоит знак неравенства.

Другое правило сумм, содержащее только  $|F(t)|$  на разрезе можно получить из формулы (19) (или (30)), если учесть, что вблизи  $t=1$  фаза  $\pi\pi$  рассеяния  $\delta_{\pi\pi}(t) \sim (t-1)^{3/2}$  и фаза  $\varphi(t) = \delta_{\pi\pi}(t) + (1-(-1)^n)\frac{\pi}{2}$ , где  $n$  - число нулей  $F(t)$  в интервале (0,1). Если взять  $t > 1$ , то из (19) следует

$$\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t-1}} = -\frac{P}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln |F(t')| dt'}{\sqrt{t'-1}(t'-t)} = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\ln \left| \frac{F(t')}{F(1)} \right| dt'}{\sqrt{t'-1}(t'-t)} \quad (32)$$

Такого рода рассмотрение приводит нас к правилу сумм

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \left| \frac{F(t)}{F(1)} \right| dt}{(t-1)^{3/2}} \geq 0 \quad (33)$$

где знак равенства стоит при выполнении тех же условий, что и в формуле (15).

Наряду с этими правилами сумм существует множество правил сумм, которые либо содержат интегралы от  $|F(t)|$  не только по разрезу, либо интеграл по разрезу содержит на некоторых интервалах  $|F(t)|$ , а на других интервалах  $\varphi(t)$ . Некоторые правила первого типа были рассмотрены в работах [12, 13].

Рассмотрим общую схему получения такого рода правил сумм. Применим теорему Коши, например, к функции

$$\ln F(t) / \sqrt{(1-t)(t+t_0)} \quad \text{для } F(t) \text{ не имеющей нулей } (-t_0 < 1)$$

$$\ln F(t) = \frac{\sqrt{(1-t)(t+t_0)}}{\pi} \left[ \int_{-t_0}^{\infty} \frac{\ln |F(-t')| dt'}{\sqrt{(t'+1)(t'-t_0)}(t+t')} + \right. \quad (34)$$

$$\left. + \int_1^{\infty} \frac{\ln |F(t')| dt'}{\sqrt{(t'-1)(t'+t_0)}(t'-t)} \right]$$



откуда из условия  $F(0) = 1$  получается правило сумм. Для того, чтобы ввести в рассмотрение нули  $F(z)$  определим

$\tilde{F}(z) = z^{-1}(z)F(z)$ , где  $\tilde{F}(z)$  не имеет нулей в плоскости с разрезами  $(-\infty, -t_0)$ ,  $(1, +\infty)$ ,  $|z(t)| = 1$  на раз-  
резах,  $z(t)$  вещественно в интервале  $(-t_0, 1)$ ,  $z(0) > 0$ .  
Для этого случая (ср. (31))

$$z(t) = (-1)^n \prod_k \frac{\sqrt{1-t} - \sqrt{\frac{1-t_k}{t_0+t_k}} \sqrt{t+t_0}}{\sqrt{1-t} + \sqrt{\frac{1-t_k^*}{t_0+t_k^*}} \sqrt{t+t_0}} \quad (35)$$

где  $n$  - число нулей в интервале  $(0, -t_0)$ .

Согласно принципу максимума  $z(0) \leq 1$  и, следова-  
тельно  $\tilde{F}(0) \geq 1$ , т.е. правило сумм в общем случае

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\ln |F(-t)| dt}{t \sqrt{(t+1)(t-t_0)}} + \int_1^{\infty} \frac{\ln |F(t)| dt}{t \sqrt{(t-1)(t+t_0)}} \geq 0 \quad (36)$$

Наряду с этим правилом сумм, которое является аналогом (15), можно получить также аналог (33)

Применим теорему Коши к функции  $\frac{\ln \tilde{F}(z)}{\sqrt{(t_1-t)(1-t)}}$  при  $t_1 > 1$ , здесь  $\tilde{F}(z) = \omega^{-1}(z)F(z)$ , где  $\omega(z)$  -  
аналитическая функция с разрезом  $(1, t_1)$ , причем

$|\omega(t)| = 1$  на разрезе и  $\omega(t)$  - вещественная на дей-  
ствительной оси вне разреза,  $\omega(0) > 0$ , а  $\tilde{F}(z)$  не име-  
ет нулей в плоскости с разрезом  $(1, t_1)$ . Явный вид функ-  
ции  $\omega(z)$  (как и всех таких функций, приведенных выше (31),  
(35)) получается из

$$\omega(z) = \pm \prod_k \frac{z - z_k}{1 - z_k^* z} \quad (37)$$

где  $z(z)$  - конформное преобразование, переводящее плос-  
кость с разрезом  $(1, t_1)$  в единичный круг, так чтобы дей-  
ствительная ось переходила в действительную ось. Поскольку

согласно принципу максимума в плоскости  $|\omega(z)| \leq 1$ , то  
мы получаем правило сумм

$$\int_1^{t_1} \frac{\ln |F(t)| dt}{t \sqrt{(t-1)(t_1-t)}} - \int_{t_1}^{\infty} \frac{\ln |F(t)| dt}{t \sqrt{(t-1)(t-t_1)}} \geq 0 \quad (38)$$

Другое правило сумм может быть получено из условия

$$\delta_{\pi\pi}(t) \sim (t-1)^{3/2}$$

Аналогично могут быть получены и другие правила сумм.

7. Экспериментальная информация об электромагнитном форм-  
факторе пиона  $F(z)$  в настоящее время весьма ограничена  
(измерения формфактора проведены в узких интервалах передач  
импульса, точность экспериментов еще не высока). Поэтому для  
сравнения с опытом полученных в предыдущих разделах интег-  
ральных представлений и правил сумм, содержащих интегралы от  
модуля или фазы формфактора на всем разрезе, приходится ис-  
пользовать простые аналитические аппроксимации. Во временипо-  
добной области это выражения резонансного типа (процесс идет  
через  $\rho$ -мезон), причем входящие в них параметры определя-  
ются из эксперимента. Простейшая формула типа Брейта-Вигнера  
(в обычных единицах) имеет вид

$$|F(z)|^2 = \frac{F_0^2 m_\rho^2 \Gamma^2}{(z - m_\rho)^2 + m_\rho^2 \Gamma^2} \quad (39)$$

где  $F_0^2 = 42 \pm 8$  ( $55,6 \pm 6,2$ ),  $m_\rho = (764 \pm 9)$  Мэв  
( $(760 \pm 5,5)$  Мэв),  $\Gamma = (105 \pm 20)$  Мэв ( $\Gamma = (112 \pm 11,5)$  Мэв)  
определены в [2] ([3]). В пространственноподобной области, где  
точность заметно ниже (см. формулу (1)), для аппроксимации  
формфактора также используется модель векторной доминант-  
ности.

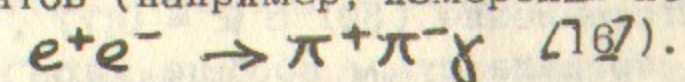
Следует иметь в виду, что формулы типа (39) справедли-  
вы только в узкой области  $\sqrt{z} \approx m_\rho$ . Естественно пред-  
ставляют интерес формулы, справедливые в более широкой обла-  
сти передач импульса (в пределе при всех передачах импульса)  
и имеющие при  $\sqrt{z} \approx m_\rho$  брейтвигнеровский вид (39). Та-  
кого рода формулы, очевидно, должны удовлетворять требовани-



ям 1) - 4). Для получения их можно использовать несколько способов. а) Если задать фазу  $\pi\pi$  рассеяния в состоянии  $I=J=1$  резонансного вида ( $\rho$  - мезон), то подставляя в формулу (27) мы получим выражение для формфактора, удовлетворяющее всем требованиям (при этом пренебрегается всеми неупругими каналами). б) Если предположить, что модуль формфактора повсюду хорошо дается формулой (39), то подставляя в (30) мы также получим представление формфактора. При этом модуль формфактора должен удовлетворять правилам сумм (15), (33), иначе мы придем к внутренним противоречиям (более подробно об этом ниже). Можно использовать также формулу (28) и т.д. Все получаемые так представления формфакторов обладают брейт-вигнеровским поведением при  $\sqrt{t} \approx m_\rho$ , но в то же время уже в резонансной области несколько отличаются друг от друга. Параметры резонанса ( $\rho^0$  - мезона), определяемые по разным формулам также различны, точно так же, как ширина резонансного пика формфактора и его положение отличаются от ширины и положения резонанса в  $\pi\pi$  рассеянии. Все эти отличия имеют порядок отношения  $\Gamma/m_\rho$ , что связано с тем, что само приближение Брейта-Вигнера справедливо с этой точностью. Вдали от резонанса формфакторы могут быть совершенно различными. В настоящее время, вообще говоря, нет теоретических соображений, которые позволили бы выделить определенное представление для формфактора или, по крайней мере класс представлений. Для того, чтобы сделать это, необходим выход за рамки приближения Брейта-Вигнера для описания широких резонансов (нестабильных частиц). В то же время разные авторы налагают дополнительные "разумные требования" на вид формфактора. Так в работе [14] был взят определенный (но далеко не однозначный) вид фазы  $\pi\pi$  рассеяния, что позволило получить некоторое конкретное представление для формфактора и, по мнению авторов, вычислить поправки  $\Gamma/m_\rho$ . Это представление было затем использовано в работе [37] для обработки эксперимента и оказалось вполне подходящим, что связано с тем, что вычисленная поправка  $(1 + 0,48 \Gamma/m_\rho)$  численно совпадает с  $F_0 \Gamma/m_\rho$ , полученным в работе [3], хотя придавать какое-либо значение этому совпадению, по-видимому, преждевременно. В работе [15] проведен анализ разных представлений формфактора, причем автор отдает предпочтение представлениям, для которых фаза  $\pi\pi$  рассеяния более сложным образом зависит от импульса, поскольку

именно они приводят к желаемому результату ( $\Gamma \approx 120$  Мэв). Заметим, что обработка экспериментальных данных по однотипной формуле [14], проведенная в [37] и [15], дает соответственно  $\Gamma = (111 \pm 6)$  Мэв и  $\Gamma = (123 \pm 7)$  Мэв. Все это только подтверждает, что разброс значений параметров является объективным и в рамках приближения Брейта-Вигнера неустраним.

При дальнейшем исследовании формфактора желательно установить качественные особенности его формы (степень асимметрии, скорость убывания при  $\sqrt{t} > m_\rho$ , поведение вблизи порога реакции), для чего необходимы, по-видимому, измерения вдали от резонанса<sup>х)</sup>. По указанным выше соображениям это представляется более интересным, чем дальнейшее уточнение экспериментальной информации о самом  $\rho$ -пике. Такое исследование, в конечном счете, позволит лучше понимать свойства  $\pi\pi$  взаимодействия. Желательны также независимые измерения фазы формфактора, хотя это требует проведения гораздо более сложных экспериментов (например, измерения поляризации фотона в реакции



8. Сделаем еще замечание относительно использования правил сумм. Прямое их использование пока исключено, т.к. экспериментальные данные недостаточны, так что на деле проверяется консистентность аналитических аппроксимаций формфактора при экспериментальных значениях параметров. Пусть имеет место представление

$$|F(t)|^2 = \frac{P_n(t)}{Q_m(t)} \quad (40)$$

где  $P_n(t)$ ,  $Q_m(t)$  - полиномы соответствующей степени. Отсюда можно найти формфактор (в предположении об отсутствии нулей)

$$F(t) = R(t) e^{-\sqrt{1-t} \ln R(0)} \quad (41)$$

х) Мы не касаемся вопроса о  $\rho$ - $\omega$  интерференции, исследование которой весьма интересно.



где

$$R(t) = |F(1)| \frac{\prod_{k=1}^n (1 + \sqrt{\frac{1-t}{1-t_k}})}{\prod_{k=1}^m (1 + \sqrt{\frac{1-t}{1-t_k}}} \quad (42)$$

Здесь  $t_k$  - корни соответствующих полиномов. Из формулы (41) следует, что при  $R(0) < 1$  формфактор экспоненциально растет при  $t < 0$ , что недопустимо. Поэтому должно быть  $R(0) \geq 1$  (экспоненциального падения, вообще говоря, может не быть, если формфактор имеет нули). Для формфактора (39) (если применять его во всей области) на основании этих соображений мы получаем, что при  $\kappa = \frac{F_0 \Gamma}{m_p} < 1 + \frac{2m\kappa \Gamma}{m_p^2}$ ,  $R(0) < 1$  и мы приходим к противоречию.

В работе [12] выведенные авторами правила сумм проверялись с помощью численных вычислений и было найдено, что правила сумм удовлетворяются плохо. Следует однако иметь в виду, что авторы использовали представление (39) с  $\kappa = 0,77$ , при котором, как мы видели выше, правила сумм вообще удовлетворяться не могут.

х) Это условие прямо вытекает из правила сумм (15).

## Л и т е р а т у р а

1. V.L.Auslender, G.I.Budker, Yu.N.Pestov et al. Phys.Lett. 25B, 433, 1967
2. В.Л.Ауслендер, Г.И.Будкер, Е.В.Пахтусова и др. Ядерная физика 9; 114, 1969.
3. J.Augustin, J.Bizot, J.Buon et al. Phys.Lett. 28B, 508, 1969.
4. C.Mistretta, D.Imrie, J.Appel et al. Phys.Rev.Lett. 20, 1523, 1968.
5. Н.Н.Мейман. ЖЭТФ, 46, 1502, 1964.
6. С.Стоилов. Теория функций комплексного переменного, т.2, ИЛ, Москва, 1962.
7. Р.Неванлинна. Однозначные аналитические функции. ОГИЗ, Москва, 1941.
8. Б.В.Гешкенбейн, Б.Л.Иоффе. ЖЭТФ 46, 903, 1964.
9. Б.В.Гешкенбейн. Препринт ИТЭФ № 642, 1968.
10. Nguyen Van Hieu. Препринт ОИЯИ E2-3729, 1968.
11. V.Baluni, Nguyen Van Hieu, V.Suleymanov. Препринт ОИЯИ E2-3986, 1968.
12. Л.А.Халфин, Ю.П.Шербин. Письма ЖЭТФ 8, 588, 1968.
13. Л.А.Халфин, Ю.П.Шербин. Письма ЖЭТФ 8, 642, 1968.
14. G.Gounaris, J.Sakurai. Phys.Rev.Lett. 21, 244, 1968
15. M.Roos, J.Pisut. Preprint CERN, TH-1000, 1969
16. Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. Препринт ИТЭФ, 627, 1968.



10/11 = 10/11

1. V. A. ...

1967

2. ...

3. ...

4. G. ...

5. ...

1962

7. P. ...

1941

8. E. B. ...

1961

10. ...

1962

Ответственный за выпуск В.С.ФАДИН

Подписано к печати 15.1У-1969 года

Усл. 0,7 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ 300

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР.