12

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 297

А.З.Паташинский

О МИКРОСКОПИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ БОЗЕ - ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ

НОВОСИБИРСК

1969

А.З.Паташинский

О МИКРОСКОПИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ КОНДЕНСАЦИИ

А Н Н О Т А Ц И Я

Соотношения микроскопической теории бозе-жидкости исследуются при предположении о подобии корреляций. Рассмотренный вариант теории приводит к логарифмическим особенностям в термодинамических характеристиках независимо от значения α в поведении чисел заполнения $n_p \sim p^{-\alpha}$ в λ - точке. Приведены аргументы в пользу значения $\alpha = 2$.

Описание бозе-эйнштейновской конденсации в бозе-жидкости на основе гипотезы подобия предполагает, что а) распределение $P(\Psi)$ вероятностей величины $\Psi(R)$, где

$$\Psi(R) = \left| \int\limits_{r \leq R} \psi(r)\, dV \right| \qquad (1)$$

не является гауссовским и имеет вид

$$P(\Psi) = \langle \Psi^2(R) \rangle^{-1/2} f\left(\Psi \langle \Psi^2(R) \rangle^{-1/2}\right) \qquad (2)$$

при $r_0 \ll R \ll r_c$, где r_0 - радиус взаимодействия, r_c - корреляционный радиус. В определении $\Psi(R)$, данном формулой (1) под $\psi(r)$ понимается волновая функция системы со следующими свойствами: средние вида

$$G_n(r_i, r'_k) = \langle \psi^*(r_1) \dots \psi^*(r_n)\, \psi(r'_1) \dots \psi(r'_n) \rangle \qquad (3)$$

совпадают со средними от операторов бозе-поля $\hat{\psi}(r)$ и $\hat{\psi}^+(r)$. Интеграл в (1.1) взят по шару радиуса R. Предполагая далее, что $\langle \Psi^2(R) \rangle \sim R^{3+\alpha}$ при R, лежащих в интервале подобия $r_0 \ll R \ll r_c$, получим феноменологическую теорию, описанную в работах /1/ - /3/.

Введем величины, связанные с функциями G_n теми же соотношениями, которыми связаны между собой многочастичные температурные функции Грина /4/ в координатном и импульсном представлении. В данном случае по смыслу задачи числа заполнения n_p состояний в области малых импульсов $p \ll p_T \sim \sqrt{m T_c}$ велики (m - масса частиц), - операторы в существенном имеют свойства С-чисел. В частности, в области малых импульсов возможно пренебречь коммутаторами операторов a_p^+, a_p рождения и уничтожения частиц с импульсом p. В этом приближении в технике температурных функций Грина исчезают функции Грина с $\omega_n \neq 0$ и T - упорядоченные средние совпадают с обычными.

Поведение многочастичных корреляций $G_n(r_i, r'_k)$, требуемое гипотезой подобия /2/, приводит в силу указанных выше свойств к своеобразному поведению неприводимых функций Грина в импульсном представлении в области малых импульсов. Обозначим соответствующие величины при равных нулю частотах ω_n внешних линий в виде $A(p_i, \omega_{n_j})|_{\omega_{n_j}=0} \equiv A(p_i)$. Тогда в точке конденсации

$$G(p) = [\mu_c - \varepsilon_p^0 - \Sigma(p)]^{-1} \approx \frac{1}{cp^2}; \; \varepsilon_p^0 = \frac{p^2}{2m} \tag{4}$$

$$\Box(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3, \lambda p_4) = \lambda^{\beta} \Box(p_1, p_2, p_3, p_4); \; p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \tag{5}$$

Здесь $G(p)$ – одночастичная функция Грина, $\Box$ – двухчастичная функция (полная вершинная часть). Условие подобия имеет вид /2/

$$\beta - 2\alpha + 3 = 0 \tag{6}$$

При отходе от линии конденсации (λ – линия), на которой /5/

$$\mu_c = \Sigma(0) \tag{7}$$

по значению химического потенциала μ поведение (4) и (5) нарушается при

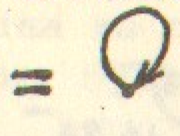
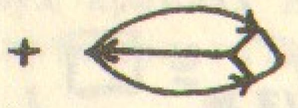
$$p \sim p_c \sim r_c^{-1} \sim |\mu - \mu_c|^{\nu}$$

Было показано /1/ – /3/, что два числа, α и ν, задают все особенности термодинамического поведения системы. В рамках феноменологической теории ограничения на возможные значения критических индексов α и ν сводятся к требованию выделения критических флуктуаций из гауссовского фона и весьма слабы. Вычисление критических индексов – дело микроскопической теории.

В работе /5/ возможность появления свойств подобия была найдена именно при анализе микроскопических соотношений для бозе-жидкости. При анализе в /5/ предполагалось, что величины α и β связаны соотношением

$$\alpha = \beta + 6 - 3\alpha \tag{8}$$

Соотношение (8) возникает из анализа размерности уравнения Дайсона (4) для $\Sigma(p)$, имеющего графический вид /4/

$\Sigma(p) =$  +  (9)

и в предположении, что необходимо оценить вклад только от внутренних интегрирований по области импульсов порядка внешнего импульса p. Возможно, однако, что этот вклад сокращается вкладом других областей либо исчезает при интегрировании по углам между внутренними импульсами, так что более общая оценка имеет вид неравенства:

$$2\alpha \geqslant 3 + \beta/2 \tag{10}$$

из (10) находим

$$\alpha \geqslant 3/2, \quad \beta \geqslant 0. \tag{11}$$

Случай равенства в (11) подробно рассмотрен в работе /5/. Состояние наших сведений не позволяет в настоящее время сделать заключение о возможности или невозможности этого случая.

Возможные аргументы против варианта $\alpha = 3/2$, $\beta = 0$ типа приведенных в работе /6/, основаны на рассуждениях, превышающих точность анализа. В степенном приближении, в котором производятся все вычисления и оценки, вопрос о безразмерных функциях типа логарифма не может быть корректно поставлен. Заметим по этому поводу, что логарифмические сингулярности (например, в теплоёмкости), получаемые в теории, следует понимать (" в пик – квикском смысле"), как утверждение о нестепенном поведении соответствующей величины.

Оценки типа (9), (10), необходимые для получения конкретных значений α и β, используют предположения, не связанные со свойствами подобия корреляций. Поэтому мы вначале рассмотрим уравнения для вершинной части $\Box$ при заданной функции Грина $G(p)$. Величина $\Box(p_1, p_2, p_3, p_4)$ есть сумма вкладов от связных графиков со структурой вершинной части. Следуя работе /5/, введем также вершинные части $\mathcal{T}_{12,34}$, $\mathcal{T}_{13,24}$, $\mathcal{T}_{14,23}$, $\mathcal{T}^*$, неразрезаемые по различным направлениям по двум линиям с

$\omega_n = 0$ и $p<p_0$. Импульс p_0 определяется в общем случае следующим образом. Простая асимптотика $G^{-1}(p) = cp^{\alpha}$ имеет место при $c = const$ в области импульсов $p<p_0 \ll p_1$. В обозначениях работы /5/

$$\Gamma_{12,34} = \boxminus\,, \quad \Gamma_{13,24} = \boxslash\,, \quad \Gamma_{14,23} = \boxbar$$

$$\square = \square \qquad (12)$$

$$\Gamma^* = \bullet + \boxtimes + \dots \; ; \quad \bullet = g$$

Уравнения для вершин имеют следующий вид

$$\square = \boxminus + \boxminus\!\leftarrow\!\square \qquad (13)$$

$$\square = \frac{1}{2}\left(\boxminus + \boxbar + \boxslash - \Gamma^*\right) \qquad (14)$$

Ряд, определяющий Γ^*, содержит сумму вкладов графиков от области интегрирования по импульсам $p \gtrsim p_0$ и суммирования по частотам $\omega_n \neq 0$. Эти вклады имеют порядок затравочной константы g. Вклад в Γ^* от области $p \ll p_0$, $\omega_n = 0$ имеет вид разложения по параметру $\varkappa$

$$\varkappa \sim G^2 \square\, p^3 \qquad (15)$$

Условие $\varkappa \sim 1$ совпадает с условием подобия (6) /5/ - /8/. В работе /5/ условие /15/ было получено при $\alpha = 3/2$, $\beta = 0$.

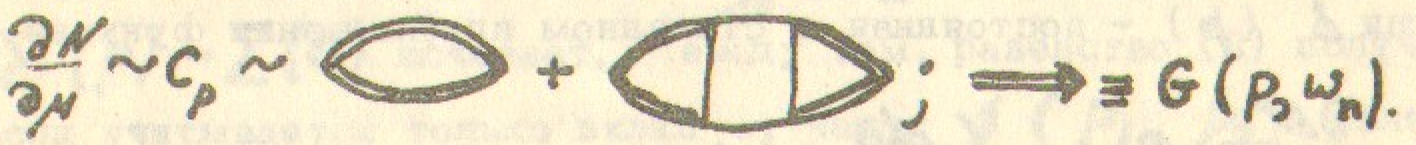
В этом случае вклад малых импульсов столь же важен, как и вклад больших $p \sim p_0$. Если же $\beta > 0$, то вклады $\sim g$ оказываются преобладающими. Сумма таких вкладов вместе с затравочной вершиной могла бы оказаться нулем, бесконечностью или константой. Я не вижу специальных причин, в силу которых осуществлялась бы одна из двух крайних возможностей: $\Gamma^* = 0$ или $\Gamma^* = \infty$ и поэтому буду предполагать, что $\Gamma^* \sim const$, $p_i = 0$. Из (14) следует, что при $\square$ малых в области малых импульсов обязательно и $\Gamma_{ik,lm}$ отличны от нуля хотя бы для одной комбинации индексов. Я буду предполагать, что $\Gamma_{12,34} = const$ при $p_i \to 0$.

Аргументы, которые можно привести в пользу таких предположений, очевидны. Условие $\alpha > 3/2$ в силу (6) требует малости вершины $\square$, т.е. сокращения вкладов $\sim g$ всех диаграмм. Эти вклады не связаны с областью самых малых p и возникают от области импульсов вблизи конца интервала подобия. Для вершин Γ ряды отличаются от рядов для $\square$, и поэтому нет оснований ожидать сокращений и в этом случае.

Для величины $\square$ из предположения, что с точностью до малых членов $\Gamma_{12,34} = const$, следует из уравнения (13)

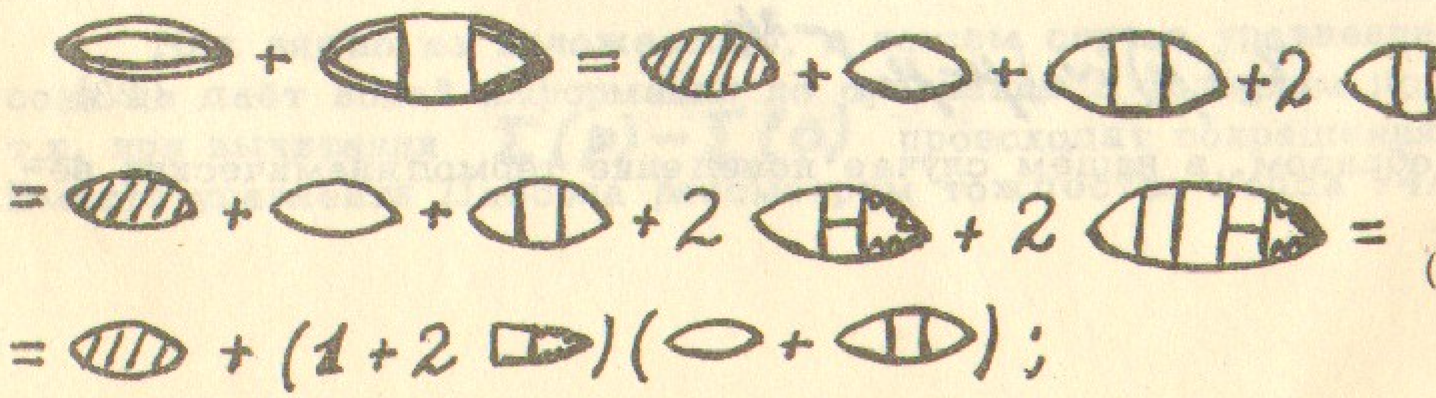
$$\square = \boxminus\left(1 + \leftarrow\!\square\right) = \Gamma_{12,34}\left(1 + \int G^2 \square\, d^3 q\right) \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь выражение для сжимаемости системы /5/



(17)

В (17) суммирование по ω_n и интеграл по всей области импульсов. Выделяя особый вклад из (17), находим



(18)

 $\equiv G(p,\omega_n)$ при $\omega_n \neq 0$ или $\omega_n = 0,\ p \gtrsim p_0$

В (18) использованы следующие обозначения. Заштрихованная петля изображает вклад области $\omega_n \neq 0$ и больших импульсов. В остальных диаграммах выделяются сечения диаграмм по двум линиям с $\omega_n = 0$ и малым импульсом. Эти линии изображаются тонкими линиями, как и в (12), (13). Волнистые линии изображают функции Грина в неособой области ($p \gtrsim p_0$, или $\omega_n \neq 0$). С точностью до множителя, отличающегося от единицы на величину $\sim g$, и неособого вклада,

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \int d^3p\, G^2(p)\left(1 + \int G^2 \Box\, d^3q\right). \tag{19}$$

Из уравнения (16) находим, что

$$1 + \int G^2 \Box\, d^3q \sim \frac{\Box(p)}{\mathcal{T}_{12,34}} \tag{20}$$

$\Box(p)$ - вершина $\Box$ при всех $p_i \sim p$. Следовательно

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \int G^2 \Box(p)\, d^3p \tag{21}$$

Степень подинтегрального выражения в (1.21) согласно (15) нулевая: если b (p) - постоянная в степенном приближении функция, то

$$\frac{\partial N}{\partial \mu} \sim C_p \sim \int \frac{dp}{p}\, b(p) \tag{22}$$

Оценка (22) означает, что зависимость радиуса корреляции, $r_c(\mu)$ имеет вид

$$r_c(\mu) \sim |\mu - \mu_c|^{-2/3} \tag{23}$$

Таким образом, в нашем случае поведение термодинамических ве-

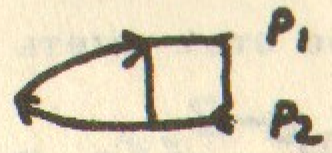
личин не зависит от величины α . Отметим, что (23) согласуется со всеми известными в настоящее время данными. Из (23) находим, что

$$G^{-1}(p) = c p^{\alpha} \varphi\left(p^2 |\mu - \mu_c|^{-4/3}\right). \tag{24}$$

Для того, чтобы определить число α , необходимо использовать какое-либо уравнение для $G\,(p)$ или $\Sigma\,(p)$. Уравнение Дайсона, использовано в работе /5/, причем предполагалось , что вклад в $\Sigma\,(p)$ от области интегрирования по внутренним импульсам диаграммы $q \sim p$ не сокращается, т.е. в соотношении (10) имеет место равенство (8). Покажем, что сокращение в рассматриваемом в настоящей работе случае происходит в силу уравнения (16). Уравнение для $\Sigma\,(p)$ имеет вид

$\Sigma(p) - \Sigma(0) =$  (25)

Структура вида

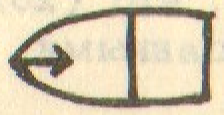
$\xi(p_1, p_2) =$  (26)

в силу условия подобия есть в основном однородная функция нулевой степени по p_1 , p_2 . При p_1 , p_2 , малых согласно (16), эта функция есть константа с точностью до малых членов порядка величины $\Box\,(p)$

$$\xi(p_1, p_2) = -1 + \frac{\Box}{\mathcal{T}_{12,34}} \tag{27}$$

Вклад постоянной части $\xi_0 = -1$ после вычитания $\Sigma(p) - \Sigma(0)$ исчезает. Между тем, равенство (8) получается, если учитывается только вклад от части $\xi\,(p_1, p_2)$, являющейся однородной функцией нулевой степени. Вклад второй части $\xi_1 \sim \frac{\Box}{\mathcal{T}}$ приводит к соотношению между α и β , совпадающему с условием подобия (6).

Как видно из изложенного, в нашем случае уравнение Дайсона не даёт новой информации по сравнению с условием подобия, т.к. при вычитании $\Sigma(p) - \Sigma(0)$ происходят сокращения. Вместо уравнения Дайсона рассмотрим тождество Уорда /4/

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial p} = $$  $$\sim \int \vec{q}\, G^2(q)\,\Box(q,-q,p,-p)\,d^3q \qquad (28)$$

Оценка степеней в (28) в предположении, что вклад вносит область интегрирования по $q \sim p$, приводит к соотношению

$$3\alpha = \beta + 5 \qquad (29)$$

Вместе с (6) это даёт

$$\alpha = 2\ , \quad \beta = 1 \qquad (30)$$

В вершинной части $\Box(q,-q,p,-p) \equiv \Box(q,p)$, входящей в (28), интегрирование по углам в силу множителя $\vec{q}$ в подынтегральном выражении выделит лишь первый угловой момент вида

$$\Box_1(q,p) = (\vec{q}\vec{p})\, f(q,p) \qquad (31)$$

Функция $f(q,p)$ должна при этом иметь степень однородности $\beta - 2$:

$$f(\lambda q, \lambda p) = \lambda^{\beta-2} f(q,p) \qquad (32)$$

Интегрирование по углам $\vec{q}$ приводит к выражению вида:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial \vec{p}} \sim \vec{p}\, J \quad ; \quad J = \int q^5 dq\, G^2(q) f(q,p) . \qquad (33)$$

Степень подинтегрального выражения в J - нулевая в силу (6). Это означает, что кроме степенных, возможно появление логарифмических особенностей в $G(p)$, но точность нашего анализа не позволяет исследовать этот вопрос.

Таким образом, если (29) справедливо, в степенном приближении функция Грина бозе-частиц имеет вид вблизи T_c при $T > T_c$:

$$G^{-1}(p) = c p^2 \varphi(p^2 \eta^{-4/3}) . \qquad (34)$$

Параметр $\eta = a(\mu - \mu_c) + b(T - T_c)$ определяет близость к λ -линии /5/. Поведение системы в области существования конденсата может быть рассмотрено методами работы /5/. Основные термодинамические характеристики системы не зависят от величины α и следуют из (23):

$$r_c(\eta) \sim \eta^{-2/3} \qquad (35)$$

В дополнение к следствиям поведения $r_c(\eta)$, определенного (35) (см. /1/-/3/, /9/) из (34) находим, что плотность конденсата $n_0(\eta)$ ведет себя так же, как плотность ρ_s сверхтекучей компоненты. В работе /10/ показано, что описание поведения корреляций куперовских пар в сверхпроводнике сводится к уравнениям, идентичным с уравнениями для величин, описывающих бозе-жидкости. Этот результат работы /10/ не зависит от значения чисел α и β, использованных в работе.

Литература

1. А.Паташинский, В.Покровский. ЖЭТФ 50. 439, 1966.
2. А.Паташинский. ЖЭТФ, 53, 1987, 1967.
3. L. Kadanoff et al, Rev. Mod. Phys., 39, 2, 1967
   В.Л. Покровский УФН, 94, 128, 1968
4. А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, 1962.
5. А.Паташинский, В.Покровский. ЖЭТФ, 46, 994, 1964.
6. А.А.Мигдал. ЖЭТФ, 55, 1964, 1968.
7. А.Паташинский. Тезисы конференции по магнитизму, Венгрия, сентябрь, 1968 г. Работы по физике твердого тела т.III, "Наука", Новосибирск, 1968.
8. А.М.Поляков. ЖЭТФ, 55, 1026, 1968.
9. Э.Батыев, А.Паташинский, В.Покровский. ЖЭТФ, 47, 598,1964.
10. Э.Батыев, А.Паташинский, В.Покровский. ЖЭТФ, 46, 2093.1964.

Ответственный за выпуск А.Паташинский
Подписано к печати 31.III 1969 года
Усл. 0,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №297

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.