

препринт 276

В.Н.Байер, В.С.Фадин

КУЛОНОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

Новосибирск  
1969



В.Н.Байер, В.С.Фалин

# КУЛОНОВСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОНЕЧНОМ СОСТОЯНИИ

## АННОТАЦИЯ

С помощью прямого суммирования вкладов главных диаграмм теории возмущений найден матричный элемент произвольного процесса с учетом кулоновского взаимодействия между заряженными частицами с малыми относительными скоростями в конечном (или начальном) состояниях.

$$M_n = \left[ \frac{-ie}{(2\pi)^3} \right]^n (-ie) \int \frac{d^4k_1 \dots d^4k_n}{(k_1^2 - \lambda^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \lambda^2 + i\epsilon)}$$

$$\times \prod_{i=1}^n \bar{u}(p_i) \gamma_{\mu_i} u(p_i) \dots \gamma_{\nu_n} u(p_n) \bar{u}(p_n) \gamma_{\nu_n} u(p_n) \dots \gamma_{\mu_1} u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma_{\mu_1} u(p_1)$$

\*) Используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ,  $m = \frac{1}{137}$ , метрика  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}$



# COULOMB INTERACTION IN A FINAL STATE

V.N. BAIER, V.S. FADIN

## abstract

Matrix element of an arbitrary process with inclusion of Coulomb interaction between charged particles with a small relative velocity in a final (initial) state has been calculated. The method of direct summation of contributions of main graphs has been used. We found

$$M = M_0 e^{-\frac{\alpha}{v}} [C + e_n \frac{\lambda^0}{2\rho}] e^{\frac{\alpha}{2v}} \Gamma(1 - \frac{\alpha}{v})$$

for particles with opposite charges (attraction) and

$$M = M_0 e^{\frac{\alpha}{v}} [C + e_n \frac{\lambda^0}{2\rho}] e^{-\frac{\alpha}{2v}} \Gamma(1 + \frac{\alpha}{v})$$

for particles with the same charges (repulsion)

where  $M_0$  - Matrix element of a basic process,  $\alpha = 1/137$ ,

$v$  - relative velocity of particles,  $C = 0,577$  Euler constant,  $\lambda^0$  - photon "mass",  $\rho = \frac{1}{2} m v$ .

1. Если при реакции в конечном (или начальном) состояниях имеются медленные заряженные частицы (с малыми относительными скоростями), то оказывается существенным кулоновское взаимодействие между ними. Впервые вопрос о кулоновском взаимодействии между компонентами электрон-позитронной пары рассмотрен в рамках нековариантной теории возмущений в известной работе Сахарова [1], в которой учтено, что взаимодействие, приводящее к рождению (аннигиляции) пары, действуют на расстояниях

$\lesssim \frac{1}{m}$ , в то время как для кулоновского взаимодействия существенны расстояния  $\sim \frac{1}{m\alpha} \gg \frac{1}{m}$ . Это обстоятельство

позволило факторизовать матричный элемент, а задачу о взаимодействии в конечном состоянии решать с использованием нерелятивистского уравнения Шредингера. При решении задачи о кулоновском взаимодействии с помощью диаграммной техники следует иметь в виду, что характерным параметром разложения в ряд теории возмущений является  $\alpha/v$  ( $v$  - относительная скорость частиц) и при малых  $v$  (когда  $\alpha/v \geq 1$ ) необходимо провести суммирование главных (по  $\alpha/v$ ) диаграмм теории возмущений. Попытка провести такое суммирование была предпринята в работе Соловьева и Юшина [2], однако в этой части работа ошибочна. Ниже будет дано решение задачи о кулоновском взаимодействии в конечном состоянии для любых реакций с участием заряженных медленных частиц.

2. Рассмотрим общую диаграмму, дающую вклад в кулоновское взаимодействие в конечном состоянии. Мы начинаем рассмотрение с вершинной диаграммы (рис.1), поскольку результат тривиально обобщается на диаграммы с произвольным числом внешних фотонных линий ( $q_1, \dots, q_s$ ). Матричный элемент  $n$ -порядка

$$M_n = \left[ \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \right]^n (-ie) \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_n}{(k_1^2 - \lambda^0{}^2 + i\epsilon) \dots (k_n^2 - \lambda^0{}^2 + i\epsilon)} \times$$

$$\times \frac{\bar{u}(p_2) \gamma^{\mu_2} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m) \gamma^{\mu_1} (\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + \hat{k}_2 + m) \gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n} (-\hat{p}_2 + \hat{k}_n + \hat{k}_{n-1} + m) \gamma^{\mu_{n-1}} (\hat{p}_2 + \hat{k}_{n-1} + m) \gamma^{\mu_n}}{(2p_1 k_1^2 + i\epsilon) [2p_1 (k_1 + k_2)^2 + i\epsilon] \dots [-2p_2 (k_n + k_{n-1}) + (k_n + k_{n-1})^2 + i\epsilon] [-2p_2 k_n^2 + i\epsilon]} \quad (1)$$

\* Используется система единиц  $\hbar = c = 1$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ , метрика  $ab = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}$



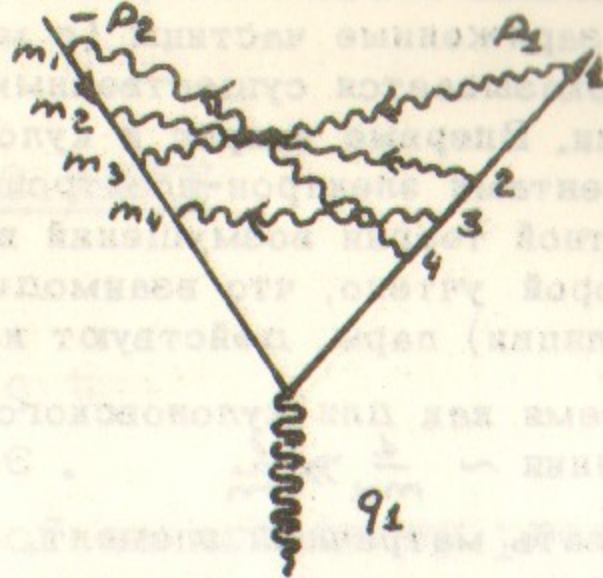


Рис. 1.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить в С.Ц.И. конечных частиц  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ ,  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ ,  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$

При  $|\vec{k}_m| \geq m$  для интересующего нас случая малых  $p$ , в знаменателе интеграла (1) члены  $(\vec{k}_m \vec{p})$  можно опустить и тогда интеграл не будет зависеть от  $p$  вообще. Поэтому ниже будет рассматриваться только существенная область  $|\vec{k}_m| < m$ .

Из таких же соображений следует ограничение на область  $k_m^0 < p$ . Проводя "масштабное" преобразование переменных интегрирования:  $\vec{k}_m^0 = p \vec{k}_m$ ,  $k_m^0 = \frac{p^2}{E} k_m^0$ , вводя регуляризующую массу фотона  $\lambda = \lambda^0/p$ , получаем

$$M_n = \left( \frac{ie^2}{(2\pi)^4 E p} \right)^n (-ie) \int \prod_{m=1}^n \frac{d\vec{k}_m^0 d\vec{k}_m}{k_m^2 + \lambda^2} \frac{\bar{u}(p_1) \gamma^{\mu_1} (\hat{p}_1 + m) \gamma^{\mu_2} (\hat{p}_1 + m) \gamma^{\mu_3} \dots}{(\vec{k}_1^2 - 2k_1^0 + 2\vec{k}_1 \vec{p}_1 - i\epsilon)} \times$$

$$\frac{\dots \gamma^{\mu_{n-1}} (-\hat{p}_2 + m) \gamma^{\mu_n} (-\hat{p}_2 + m) \gamma^{\mu_{n+1}} \delta(p_2)}{[(k_1^0 + k_2^0)^2 - 2(k_1^0 + k_2^0) + 2\vec{p}_1 \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) - i\epsilon] \dots [(k_{n-1}^0 + k_n^0)^2 - 2(k_{n-1}^0 + k_n^0) + 2\vec{p}_1 \cdot (\vec{k}_{n-1} + \vec{k}_n) - i\epsilon]} \quad (2)$$

где  $\vec{n} = \vec{p}_1/p$ . Мы пренебрегли в знаменателях (2) членами вида  $k_m^0 p^2/E^2$ ,  $k_{m_i}^0 k_{m_j}^0 p^2/E^2$  по сравнению с членами  $k_m^0$ ,  $\vec{k}_m^2$  и членами, содержащими  $k_m^0$  в числителе. Такое пренебрежение допустимо, поскольку интеграл (2) сходится при  $p \rightarrow 0$ . Таким образом масштабное преобразование позволяет выделить главные по  $\alpha/\epsilon$  члены в матричном элементе.

Вычисление интеграла (2) начнем с интегрирования по нулевым компонентам  $k_m^0$ . При этом оказывается удобным произвести преобразование переменных

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1^0 &= k_1^0 & k_1^0 &= \tilde{k}_1^0 \\ \tilde{k}_2^0 &= k_1^0 + k_2^0 & k_2^0 &= \tilde{k}_2^0 - \tilde{k}_1^0 \\ \tilde{k}_3^0 &= k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 & k_3^0 &= \tilde{k}_3^0 - \tilde{k}_2^0 \\ &\dots & & \\ \tilde{k}_n^0 &= k_1^0 + k_2^0 + \dots + k_n^0 & k_n^0 &= \tilde{k}_n^0 - \tilde{k}_{n-1}^0 \end{aligned} \quad (3)$$

Интегралы по переменным  $\tilde{k}_m^0$  могут быть взяты с помощью замыкания контура в верхней (или нижней) полуплоскости и вычисления вычетов в полюсах. Пусть  $m_l$  не совпадает с 1, тогда все полюса по переменной  $k_{m_l}^0$  будут лежать в нижней полуплоскости (действительно, в членах, относящихся к линии  $P_l$ , эта переменная встречается один раз в комбинации  $-(\tilde{k}_{m_l}^0 + i\epsilon)$ ,

в членах, относящихся к линии  $P_2$  будет либо комбинация  $-(\tilde{k}_{m_l}^0 + i\epsilon)$ , либо  $\tilde{k}_{m_l}^0$  вообще не входит). Но тогда интеграл по переменной  $\tilde{k}_{m_l}^0$  обращается в нуль всегда, кроме случая  $m_l = 1$ . Продолжая эти рассуждения легко убедиться, что отличный от нуля вклад дают только диаграммы, на которых

$k_{m_j}^0 = k_j^0$ , т.е. диаграммы, имеющие вид прямой лестницы (рис.2).

Сделаем несколько замечаний об отборе диаграмм.

- 1) Интересующие нас вклады (с параметром разложения  $\alpha/\epsilon$ ) дают только диаграммы, на которых виртуальные фотонные линии выходят и приходят на внешние концы. Действительно, только в этом случае в пропагаторах в интегралах (1), (2) вы-



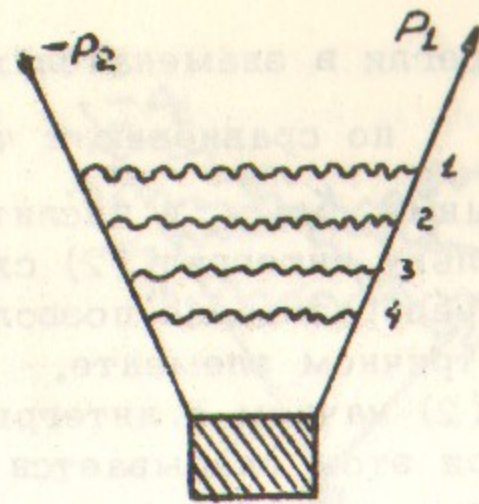


Рис. 2.

падают члены с импульсами и массами внешних линий и в результате масштабного преобразования выделяется множитель  $1/\rho$ . Поэтому конкретный вид диаграммы, для которой производится рассмотрение кулоновского взаимодействия в конечном (начальном) состоянии совершенно не существенен — это может быть одна электронная линия с произвольным числом внешних фотонных концов ( $q_1, \dots, q_s$ ) (рождение пары (аннигиляция) через  $1, 2, \dots, s$  реальных (или виртуальных) фотонов) или разные электронные линии. Важно только, чтобы импульс, передаваемый на диаграмме основного процесса, был гораздо больше, чем существенная область передач импульса на фотонных линиях кулоновского взаимодействия (в интеграле (2) основной вклад дают  $|\vec{k}'|, k^0 \sim 1$ , что означает, что в интеграле (1) существенна область

$$|\vec{k}'| \approx \rho, \quad k^0 \approx \frac{\rho^2}{E} \ll |\vec{k}'|$$

2) Вклады диаграмм, на которых виртуальные фотонные линии начинаются и кончаются на одном и том же внешнем конце имеют полюса, лежащие в одной и той же полуплоскости, поскольку знак при члене  $k^0$  в (2) определяется внешним импульсом, а он для таких линий один и тот же. В случае, когда внешних фотонных линий ( $q_1, \dots, q_s$ ) больше одной, имеются виртуальные фотонные линии, концы которых попадают на внутреннюю электронную линию, между внешними фотонными линиями ( $q_1, \dots, q_s$ ). Диаграммы с такими линиями не дают вклада, что видно например из того, что при масштабном преобразовании из них не выносятся множитель  $1/\rho$ . Что касается

х) Отсюда, вытекает, что на всех внутренних линиях основного процесса можно пренебречь  $k'$ .

диаграмм поляризации вакуума и рассеяния света на свете, то при малых импульсах  $k'$ , которые существенны в этой задаче, вклады их пропорциональны степенями  $\rho$  в числителе и поэтому в нашем приближении ими можно пренебречь. Учет диаграмм поляризации вакуума сводится только к перенормировке заряда. Из приведенных выше соображений следует, что диаграмма типа рис. 2 является самым общим видом диаграммы, которую следует рассматривать в задаче о кулоновском взаимодействии в конечном состоянии.

3) Хотя в данной задаче существенна область малых импульсов виртуальных фотонов, тем не менее приближение классических токов здесь не применимо, поскольку нельзя пренебрегать членами вида  $k'_i k'_j$  рядом с членами типа  $(\rho k'_i)$

в виду малости импульса внешних линий  $\rho$ . По этой причине некорректно проводившееся в работе [2] рассмотрение кулоновского взаимодействия в конечном состоянии для процесса двухквантовой аннигиляции, с использованием приближения классических токов с учетом линейного по  $k'$  изменения пропагатора внутренней электронной линии.

4) Если мы будем рассматривать "кулоновское взаимодействие" заряженных частиц, одна из которых начальная, а другая конечная, то полюса  $k_j^0$  в интеграле (2) лежат в одной полуплоскости и, следовательно, вкладов порядка  $\alpha^2/c$  такие диаграммы не дают.

3. Продолжим вычисление интеграла (2) лестницы (рис. 2). Выполняя коммутации, получим для числителя

$$[-4(\rho_1 \rho_2)]^n \bar{u}(\rho_1) \gamma^n v(\rho_2)$$

Заметим, что мы рассматриваем кулоновское взаимодействие между электроном и позитроном (притяжение). Вычисляя интеграл по  $\vec{k}_j^0$  с помощью теории вычетов, получим

$$M_n = M_0 I_n, \quad I_0 = 1 \quad (4)$$

$$I_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^2 c}\right)^n \int \left( \prod_{m=1}^n \frac{d^3 k_m}{k_m^2 - 1 - i\epsilon} \right) \frac{1}{[(\vec{k}_1 - \vec{n})^2 + \lambda^2][(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)^2 + \lambda^2] \dots [(\vec{k}_n - \vec{k}_{n-1})^2 + \lambda^2]} \quad (5)$$



где  $v = 2p/E$  - относительная скорость<sup>\*</sup>,  $M_0$  - матричный элемент основного процесса (без учета взаимодействия в конечном состоянии). В интеграле (5) мы провели замену переменных

$$\vec{k}_1 + \vec{n} \rightarrow \vec{k}_2, \vec{k}_2 + \vec{k}_1 + \vec{n} \rightarrow \vec{k}_3, \dots, \sum_{i=1}^n \vec{k}_i + \vec{n} \rightarrow \vec{k}_n$$

Заметим, что формулы (4), (5) не зависят от спина заряженных частиц, т.к. после отбрасывания  $k'$  в числителе и последующего приведения для лестничной диаграммы этот результат будет получаться для частиц с любым спином (при минимальной связи). Как показано в приложении А матричный элемент процесса может быть представлен в виде

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} I_n = M_0 \Psi_v^+(0) = M_0 (\Psi_v^-(0))^* \quad (6)$$

где  $\Psi_v^+(\vec{z})$  - решение уравнения Шредингера для задачи рассеяния в кулоновском поле (с регуляризацией) в виде расходящейся волны. Расположение полюсов в интегралах (2), (5) определяется причиной добавкой  $i\epsilon$  в знаменателях пропагаторов: таким образом формулы (5)-(6) (см. также приложение А) показывают, что при решении задачи рассеяния из соображений причинности вытекает, что начальные состояния надо брать в виде расходящихся волн, а конечные - в виде сходящихся волн.

4. Учитывая, что решение (6) получено для регуляризованного кулоновского потенциала и что решение в кулоновском поле обладает рядом специфических особенностей, связанных с недостаточно быстрым убыванием потенциала на бесконечности, желательно провести прямое вычисление интеграла (5). Это вычисление проведено в приложении Б. Оно дает для случая притяжения

$$M = M_0 e^{-\frac{i\alpha}{v} [c + e_n \frac{\lambda^0}{2p}]} e^{\frac{\alpha \pi}{2v}} \Gamma(1 - \frac{i\alpha}{v}) \quad (7)$$

и для случая отталкивания

$$M = M_0 e^{\frac{i\alpha}{v} [c + e_n \frac{\lambda^0}{2p}]} e^{-\frac{\alpha \pi}{2v}} \Gamma(1 + \frac{i\alpha}{v}) \quad (8)$$

\* В случае частиц разной массы вынесется множитель  $\frac{E_1 E_2}{p(E_1 + E_2)} = \frac{v_1 v_2}{v}$

где  $C$  - постоянная Эйлера. В полученные формулы масса фотона  $\lambda^0$  входит только в фазу матричного элемента, так что нет необходимости в проведении инфракрасной регуляризации сечения, что, впрочем, естественно, т.к. излучение реальных фотонов медленными частицами сильно подавлено.

Преимуществом приведенного подхода к задаче о кулоновском взаимодействии является его универсальность, поскольку как показано выше, задача сводится к суммированию прямых лестничных диаграмм (типа рис.2) для произвольного процесса и единственным требованием является, чтобы характерные передачи импульса в основном процессе были гораздо больше, чем относительные импульсы конечных (или начальных) частиц, что соответствует требованию, чтобы основной процесс происходил на малых по сравнению с атомными размерами расстояниях.

В результате сечение умножается на фактор  $|\Psi_v^+(0)|^2$

существенно изменяющий сечение процесса в узкой области малых относительных скоростей (что соответствует узкой области по энергии вблизи порога реакции или узкой области углов вылета частиц). В частных случаях этот результат был получен ранее Зоммерфельдом [3] (для тормозного излучения нерелятивистских частиц) и Сахаровым [4] (для рождения электрон-позитронной пары).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Уравнение Шредингера для задачи рассеяния в импульсном пространстве для регуляризованного кулоновского потенциала

( $e^{-\lambda^0 z/2}$ ,  $\lambda^0 \rightarrow 0$ ) имеет вид

$$\Psi_v^\pm(\vec{k}) = \delta(\vec{p} - \vec{k}) - \frac{\alpha m}{v^2} \frac{1}{\vec{p}^2 - \vec{k}^2 \pm i\epsilon} \int d^3 k_1 \frac{1}{(\vec{k} - \vec{k}_1)^2 + \lambda^0{}^2} \Psi_v^\pm(\vec{k}_1) \quad (A1)$$

где  $v = p/E$ . Учитывая, что  $\Psi_v^\pm(\vec{z}=0) = \int d^3 k \Psi_v^\pm(\vec{k})$

и итерируя уравнение (A1) получаем

$$\Psi_v^\pm(\vec{z}=0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha m}{v^2}\right)^n \int \frac{d^3 k_1}{\vec{p}^2 - \vec{k}_1^2 \pm i\epsilon} \frac{1}{(\vec{k}_1 - \vec{p})^2 + \lambda^0{}^2} \times \quad (A2)$$

$$\times \int \frac{d^3 k_2}{(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)^2 + \lambda^0{}^2} \frac{1}{\vec{p}^2 - \vec{k}_2^2 \pm i\epsilon} \dots \int \frac{d^3 k_n}{(\vec{k}_n - \vec{k}_{n-1})^2 + \lambda^0{}^2} \frac{1}{\vec{p}^2 - \vec{k}_n^2 \pm i\epsilon}$$



Проводя в (A2) масштабное преобразование  $\vec{k}_i \rightarrow \rho \vec{k}_i$  получаем, что  $n$ -член ряда совпадает с  $I_n$  (5).

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

Взяв интеграл (5) по углам, получаем

$$I_n = \left(\frac{\alpha}{\pi \nu}\right)^n \int \left(\prod_{m=1}^n \frac{dk_m}{k_m^2 - 1 - i\epsilon}\right) k_n \rho_n \frac{(k_1+1)^2 + \lambda^2}{(k_1-1)^2 + \lambda^2} \rho_n \frac{(k_2+k_1)^2 + \lambda^2}{(k_2-k_1)^2 + \lambda^2} \dots \rho_n \frac{(k_n+k_{n-1})^2 + \lambda^2}{(k_n-k_{n-1})^2 + \lambda^2} \quad (B1)$$

Для дальнейшего удобно провести параметризацию входящих в это выражение логарифмов

$$\rho_n \frac{(k_m+k_{m-1})^2 + \lambda^2}{(k_m-k_{m-1})^2 + \lambda^2} = \int_{\lambda^2}^{\infty} d\beta_m^2 \left[ \frac{1}{(k_m-k_{m-1})^2 + \beta_m^2} - \frac{1}{(k_m+k_{m-1})^2 + \beta_m^2} \right] \quad (B2)$$

Подставляя это представление в (B1) и учитывая симметрию под-интегрального выражения имеем:

$$I_n = \left(\frac{\alpha}{\pi \nu}\right)^n \int_{\lambda^2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n d\beta_j^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^n \frac{dk_m}{k_m^2 - 1 - i\epsilon}\right) k_n \times \frac{1}{[(k_1-1)^2 + \beta_1^2][k_2-k_1]^2 + \beta_2^2} \dots [(k_n-k_{n-1})^2 + \beta_n^2]} \quad (B3)$$

Удобно начинать интегрирование с интеграла по  $k_n$

$$\int_{\lambda^2}^{\infty} d\beta_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_n dk_n}{(k_n-k_{n-1})^2 + \beta_n^2} \frac{1}{k_n^2 - 1 - i\epsilon} = \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_n (2\pi i) \frac{i k_{n-1}}{(z+i\beta_n)^2 - k_{n-1}^2} \quad (B4)$$

Вычисляя следующий интеграл, имеем

$$\begin{aligned} & (-2\pi) \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_n \int_{\lambda^2}^{\infty} d\beta_{n-1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{n-1} dk_{n-1}}{k_{n-1}^2 - 1 - i\epsilon [(k_{n-1}-k_{n-2})^2 + \beta_{n-1}^2] [(z+i\beta_n)^2 - k_{n-1}^2]} = \\ & = (-2\pi)^2 \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_n \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_{n-1} k_{n-2} \left[ \frac{1}{(z+i\beta_{n-1})^2 - k_{n-2}^2} - \frac{1}{[z+i(\beta_n+\beta_{n-1})]^2 - k_{n-2}^2} \right] \frac{1}{(z+i\beta_n)^2 - 1} \\ & = (-2\pi)^2 \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_n \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_n} d\beta_{n-1} \frac{k_{n-2}}{(z+i\beta_{n-1})^2 - k_{n-2}^2} \frac{1}{(z+i\beta_n)^2 - 1} \end{aligned} \quad (B5)$$

Получившийся интеграл по  $k_{n-2}$  имеет такой же вид, как интеграл по  $k_{n-1}$ , что позволяет элементарно провести последующие интегрирования. Сделав замену  $\beta_m \rightarrow \lambda \beta_m$  получаем

$$I_n = \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n \int_{\lambda}^{\infty} d\beta_n \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_n} d\beta_{n-1} \dots \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_2} d\beta_1 \left( \prod_{m=1}^n \frac{1}{\beta_m (z+i\lambda\beta_m)} \right) \quad (B6)$$

Этот интеграл равен с точностью до членов  $\sim O(\lambda)$  следующему

$$I_n = \left(\frac{i\alpha}{\nu}\right)^n \int_{\lambda}^{\infty} d\beta'_n \int_{\lambda}^{\lambda+\beta'_n} d\beta'_{n-1} \dots \int_{\lambda}^{\lambda+\beta'_2} d\beta'_1 \frac{1}{\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_n} \quad (B7)$$

в чем можно убедиться с помощью замены

$$\beta_n \rightarrow \frac{\beta'_n}{z - \frac{i\lambda}{2}\beta'_n} \quad (B8)$$

Интеграл (B7) можно вычислить с помощью экспоненциальной параметризации

$$\frac{1}{\beta_m} = \int_0^{\infty} e^{-t_m \beta_m} dt_m \quad (B9)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_3} d\beta_2 \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_2} d\beta_1 e^{-\beta_1 t_1} e^{-\beta_2 t_2} = \\ & = \int_0^{\infty} dt_1 \frac{e^{-t_1}}{t_1} \int_0^{\infty} dt_2 \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_3} d\beta_2 (e^{-\beta_2 t_2} - e^{-\beta_2(t_1+t_2)}) = \\ & = \int_0^{\infty} dt_1 \frac{e^{-t_1}}{t_1} \int_0^{t_1} dt_2 \int_{\lambda}^{\lambda+\beta_3} e^{-\beta_2 t_2} \end{aligned} \quad (B10)$$

Видно, что интеграл по последующим переменным  $\beta_m$  может быть взят таким же образом. В результате имеем:



$$I_n = \left(\frac{i\alpha}{v}\right)^n \int_0^\infty \frac{dt_1}{t_1} e^{-t_1} \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} e^{-t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_3}{t_3} e^{-t_3} \dots \int_0^{t_{n-1}} e^{-t_n} \beta_n d\beta_n \quad (B11)$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая симметрию подинтегральной функции имеем:

$$I_n = \left(\frac{i\alpha}{v}\right)^n \int_0^\infty dt_n \int_0^{t_n} e^{-t_n} \beta_n d\beta_n \frac{1}{(n-1)!} \left[ \int_0^{t_n} \frac{e^{-t}}{t} dt \right]^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{i\alpha}{v}\right)^n \int_0^\infty d\beta e^{-\beta} \frac{1}{n!} \left[ \int_{\frac{i\alpha\beta}{2}}^\infty \frac{dt e^{-t}}{t} \right]^n \quad (B12)$$

Проводя суммирование по  $n$  получаем (с точностью до членов  $O(\lambda)$ )

$$M = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} I_n = M_0 \int_0^\infty d\beta e^{-\beta} \exp \left[ \frac{i\alpha}{v} \int_{\frac{i\alpha\beta}{2}}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right] =$$

$$= M_0 e^{-\frac{i\alpha}{v} \left[ c + \ln \frac{1}{2} + \frac{i\pi}{2} \right]} \Gamma \left( 1 - \frac{i\alpha}{v} \right) =$$

$$= M_0 e^{-\frac{i\alpha}{v} \left[ c + \ln \frac{\lambda^0}{2p} \right]} e^{\frac{\alpha\pi}{2v}} \Gamma \left( 1 - \frac{i\alpha}{v} \right)$$

### Литература

1. А.Д.Сахаров. ЖЭТФ, 18, 631, 1948.
2. Л.Д.Соловьев, Ю.Я.Юшин. Препринт ИФВЭ 68-3-К, 1968.
3. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры. Часть II, Гостехиздат, 1956.

Отпечатано на бумаге в типографии ИФВЭ  
 Подписано в печать 2.11.1968  
 Усл. л. 4,5, тираж 400  
 Заказ 27

Отпечатано на бумаге в типографии ИФВЭ



$$I_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$I_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Приводя суммирование по  $n$  получаем (с использованием члена  $O(\lambda)$ )

$$M = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} I_n = M_0 \int_0^{\infty} dx e^{-x} \exp\left[\frac{\lambda}{x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right]$$

$$= M_0 e^{-\frac{\lambda}{x}} \left[ c + a \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{x} \right] \Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{x}\right)$$

$$= M_0 e^{-\frac{\lambda}{x}} \left[ c + a \frac{1}{2} \right] e^{\frac{\lambda}{x}} \Gamma\left(1 - \frac{\lambda}{x}\right)$$

---

Ответственный за выпуск В.М.КАТКОВ  
 Подписано к печати 3.11.1969г.,  
 Усл. 48 печ.л., тираж 200.  
 Заказ 276 , бесплатно.

---

Отпечатано на ротатристе в ИЯФ СО АН СССР.вг