

18

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 253

Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ
С ДИСПЕРСИЕЙ**

**Новосибирск
1968**

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается устойчивость решений типа нелинейных периодических волн при наличии возмущения, природой которого может быть неоднородность и нестационарность среды. В качестве примера исследуется модель ионного звука и уравнения Кортевега-де Вриза. Показано, что для периодических волн, достаточно "близких" к уединенной волне (т.е. с очень большим периодом), существует неустойчивость стохастического типа. Неустойчивость проявляется в том, что фаза волны как функция времени становится близкой к случайной, в результате чего возникает броуновское движение параметров волны в соответствующем фазовом пространстве. Скорость волны начинает, в среднем, расти со временем и достигает критического значения, при котором происходит опрокидывание. В модели ионного звука дана оценка времени, в течение которого возникает опрокидывание. Приведены условия, при которых развивается стохастическая неустойчивость.

В в е д е н и е

Характерной особенностью нелинейных сред с дисперсией является существование точных решений, описывающих нелинейные периодические волны. Анализ устойчивости таких волн связан с определенными техническими трудностями и первые результаты в этом направлении получены лишь в последнее время (см., например /1-3/).

Наиболее общий и хорошо разработанный метод исследования эволюции нелинейных периодических волн, основанный на использовании лагранжева формализма и некоторой операции усреднения, был предложен Уитемом /4/.

Ниже предлагается другой подход для исследования устойчивости нелинейных волн, основанный на существенно нелинейном анализе влияния малых, но конечных возмущений. Будет показано, что при определенных условиях фаза нелинейной волны под влиянием возмущения начинает "запутываться" и закон изменения её со временем носит характер, близкий к случайному. Это обстоятельство приводит к турбулизации волны, конечным результатом которой является опрокидывание и переход к многопоточковому движению.

Хотя развиваемый ниже аппарат исследования устойчивости применим к произвольным нелинейным периодическим волнам, тем не менее, мы будем для удобства пользоваться конкретной моделью ионного звука /5/, а также уравнением Кортевега-де Вриза, описывающим нелинейные установившиеся волны для большого класса физических задач.

В § 1 приводятся основные уравнения, вводится ряд соотношений, необходимых для дальнейшего, и конкретизируется постановка задачи об устойчивости.

В § 2 вводится критерий неустойчивости, приводящей к хаотизации фазы нелинейной волны.

В § 3 рассматривается процесс диффузии параметров волны и оценивается время, в течение которого произойдет опрокидывание. Здесь же проводится более детальный физический анализ полученной неустойчивости.

§ 1. Постановка задачи

Одномерное движение плазмы с "холодными" ионами описывается системой:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (n v)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (n - n_0 e^{e\varphi/T})$$

где n — плотность электронов, которая в нестационарной неоднородной среде является, вообще говоря, некоторой функцией времени и координат. Запишем

$$n_e = n_0 + \varepsilon n_1(x, t) \quad (1.2)$$

где $n_0 = \text{const}$, а зависимость от (x, t) представлена в виде возмущения n_1 и ε — безразмерный малый параметр.

Остановимся на некоторых свойствах невозмущенной системы (1.1) при $\varepsilon = 0$. В этом случае можно построить решение, зависящее только от переменной:

$$\xi = \frac{1}{z_d} (x - Ut)$$

где z_d — дебаевский радиус, U — произвольный параметр.

Система (1.1) приводится к одному интегрируемому уравнению:

$$\begin{aligned} \sigma'^2 (u - \sigma)^2 &= u^2 \left(1 - \frac{\sigma}{u}\right) + \\ &+ \exp\{u\sigma - \sigma^2/2\} - (1 + u^2) - 2C \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u \equiv \frac{v}{c}; \quad u \equiv \frac{U}{c}; \quad \sigma' \equiv \frac{d\sigma}{d\xi}; \quad c \equiv \sqrt{\frac{T}{M}}$$

где C — константа интегрирования.

Уравнение движения (1.3) удобно рассматривать на фазовой плоскости (σ', σ) , и мы приведём два семейства кривых. Первое (рис.1) изображает фазовые траектории при различных значениях параметра C , имеющего смысл гамильтониана. Закрытым траекториям, описывающим установившиеся нелинейные колебания, соответствует $C > 0$. Сепаратриса ($C = 0$) описывает уединенную волну (солитон), а при $C < 0$ движение нефинитно. Второе семейство (рис.2) фазовых траекторий относится к фиксированному $C > 0$, но к различным значениям скорости волны U . С ростом U на фазовой кривой заостряются углы и при критическом значении $U_c \approx 1.6$ происходит опрокидывание. Дальнейшее движение становится многопоточным и для его описания необходимо уже менять исходную систему (1.1).

В связи с тем, чтобы избежать слишком громоздких и неудобных вычислений, мы упростим систему (1.1), предполагая все величины достаточно малыми, но конечными. Это приближение соответствует скорости волны U , мало отличающейся от единицы:

$$\alpha \equiv U - 1 \ll 1, \quad (\alpha > 0) \quad (1.4)$$

а система (1.1) сводится к уравнению Кортевега-де Вриза с правой частью:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial^3 \sigma}{\partial y^3} = \varepsilon F(y, \tau)$$

$$F(y, \tau) = -\frac{1}{2n_0} \left(\frac{\partial n_0}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial n_0}{\partial y} \right)$$

$$y = x/zd; \quad \tau = ct/zd \quad (1.5)$$

Уравнение (1.3) переходит в следующее:

$$\sigma^{12} = \alpha \sigma^2 - \frac{1}{3} \sigma^3 - 2C \quad (1.6)$$

Заметим, что точкам Q на рис. 1, 2 соответствует соотношение между параметрами

$$\alpha_0 = \left(\frac{3}{2} C_0 \right)^{1/3}$$

при котором периодическое решение невозмущенного уравнения (1.5) склопывается.

Будем теперь исследовать уравнение (1.5), считая его точным. Как будет видно из последующего, полученный анализ окажется вполне достаточным для заключений об устойчивости системы (1.1), а уточнения, связанные с тем, что (1.5) имеет все-таки ограниченную область применимости, будут сделаны в соответствующем месте.

Интуитивно следует ожидать (и это далее будет оправдано), что наиболее сильное влияние возмущения $F(y, \tau)$ сказывается вблизи сепаратрисы, т.е. на невозмущенные установившиеся колебания, "близкие" к солитону и имеющие, следовательно, очень большой период. Такому пределу соответствует неравенство

$$C \ll \alpha^3 \quad (1.7)$$

В этом случае

$$\max \sigma \approx 3\alpha, \quad \min \sigma \approx \sqrt{2C/\alpha}$$

и из (1.6) для невозмущенной волны следует:

$$\sigma \approx 3\alpha \operatorname{cn}^2 \left[\frac{\sqrt{3}\alpha}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{C}{18\alpha^3}} \right); \kappa \right] + O\left(\sqrt{\frac{C}{\alpha^3}}\right)$$

$$\kappa \approx 1 - \sqrt{\frac{2C}{9\alpha^3}} \quad (1.8)$$

и, кроме того, волновое число

$$k = \frac{\pi}{4} \sqrt{3} \alpha \left(\ln \frac{4}{\sqrt[4]{8C/9\alpha^3}} \right)^{-1} \approx \frac{2\pi}{L} \quad (1.9)$$

где L - период колебаний (1.8).

Рассмотрим теперь вариационный принцип для уравнения (1.5) в отсутствие возмущения ($\varepsilon = 0$). Разлагая невозмущенное решение σ в ряд Фурье

$$\sigma(y, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i kn(y - ct)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i kny} e^{-in\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n(\tau) e^{i kny} \quad (1.10)$$

имеем гамильтониан H в фазовом пространстве гармоник (σ_n):

$$H = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{6} \sigma^3 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_n (ikn)^2 \sigma_n \sigma_{-n} - \frac{1}{6} \sum_{n_1+n_2+n_3=0} \sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \sigma_{n_3} - \frac{1}{2} \sum_n \sigma_n \sigma_{-n} \quad (1.11)$$

и канонические уравнения движения:

$$\frac{d\sigma_n}{d\tau} = \frac{ikn}{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \sigma_{-n}}; \quad \frac{d\sigma_{-n}}{d\tau} = -\frac{ikn}{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \sigma_n} \quad (1.12)$$

Получим функциональное соотношение между гамильтонианом H в (σ_n) -пространстве и гамильтонианом C в (σ, σ') -пространстве. Из (1.6) и (1.11) следует:

$$H = \bar{C} + kI - \frac{1}{2\pi} kU \int_{-L/2}^{L/2} \sigma^2(\xi) d\xi$$

$$\bar{C} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} C dy \quad (1.13)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi}\right)^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \sigma'(c, \sigma) d\sigma$$

Здесь I имеет смысл действия в фазовом (σ, σ') -пространстве, а \bar{C} в невозмущенной задаче совпадает с C .

Сформулируем теперь исследуемую задачу в (σ_n) -пространстве. Предположим, что невозмущенное движение представляет собой нелинейное установившееся колебание (1.8) с фиксированным периодом L (или волновым числом K). Это определяет интеграл движения $H = H(K)$ и следующие уравнения движения, эквивалентные (1.5) при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dH}{d\tau} = 0; \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega(H) = kU(H) \quad (1.14)$$

Второе уравнение определяет фазу ϑ , а соотношение (1.13) при заданном K устанавливает однозначную связь между H и U , т.е. между гамильтонианом и частотой ω .

При достаточно малых возмущениях системы (1.14) можно построить приближенный интеграл движения, который представляет собой невозмущенный гамильтониан H плюс поправку порядка ε . Однако, как будет показано в следующем параграфе, при достаточно больших ε фазы под влиянием возмущения начинают меняться со временем квазистохастическим образом, что приводит к броуновскому движению величины H . Таким образом, рассматриваемый нами тип неустойчивости представляет собой стохастическое разрушение интеграла движения, и рост со временем величины H происходит подобно ускорению броуновской частицы.

§ 2. Критерий стохастической неустойчивости

Разложим уравнение (1.5) в интеграл Фурье по y :

$$\frac{d\sigma_q}{d\tau} + iq\sigma_q + (iq)^3\sigma_q + \frac{1}{2}iq \int dq_1 \sigma_{q_1} \sigma_{q-q_1} = \varepsilon F_q$$

$$\sigma_q(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iqy} \sigma(\tau, y) dy; \quad \sigma_{-q} = \sigma_q^* \quad (2.1)$$

$$F_q(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iqy} F(\tau, y) dy, \quad F_{-q} = F_q^*$$

Будем теперь считать, что величина H определена по-прежнему соотношением (1.11), однако скорость σ в нём теперь является решением возмущенной задачи (1.5). В этом случае из (1.11) и (2.1) получаем аналогично (1.12):

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\tau} &= \int dq \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_q} \frac{d\sigma_q}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial \sigma_{-q}} \frac{d\sigma_{-q}}{d\tau} \right) = \\ &= \varepsilon \int \frac{dq}{iq} \left(\frac{d\sigma_{-q}}{d\tau} F_q + \frac{d\sigma_q}{d\tau} F_{-q} \right) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Если в правой части (2.2) воспользоваться нулевым приближением для ϑ согласно (1.10), то это даёт:

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{ik} \sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{d\sigma_n}{d\tau} F_n - \frac{d\sigma_n}{d\tau} F_{-n} \right) =$$

$$= \varepsilon U \sum_n (\sigma_{-n} F_n + \sigma_n F_{-n}) \quad (2.3)$$

В формуле (1.5) для $F(\tau, y)$ написанные члены могут оказаться, вообще говоря, разных порядков в зависимости от величины производных возмущения n , по x и t . Удобно начать исследование со случая, когда член, содержащий производную по x мал и им можно пренебречь.

Рассмотрим теперь наиболее простой случай зависимости возмущения от времени:

$$F_n = \Phi_n e^{i\nu t}$$

Подставляя F_n и выражения для σ_n из (1.10) в (2.3) имеем:

$$\frac{dH}{d\tau} = -\varepsilon U \sum_n \left[a_n \Phi_n e^{i(n\vartheta - \nu t)} + a_{-n} \Phi_n e^{-i(n\vartheta - \nu t)} \right] \quad (2.4)$$

Уравнение для ϑ мы получим следующим образом. Сохраним функциональные соотношения (1.13) для возмущенных величин. Ввиду однозначности связи между ω и H можно написать:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \omega(H) = kU(H) \quad (2.5)$$

где H теперь является функцией времени согласно (2.4). Обоснование и оценка точности приближения (2.5) будет дана в § 3. Полученная система (2.4), (2.5) аналогична задаче, исследованной в /7/ и мы воспользуемся для дальнейшего теми же рассуждениями. Наиболее просто интерпретировать систему (2.4), (2.5) как движение нелинейного осциллятора с частотой $\omega(H)$ и энергией H под действием внешней силы.

Пусть теперь для некоторого значения $H = H_m$ выполняется условие резонанса

$$m \omega(H_m) = \nu \quad (2.6)$$

Ближайший к этому резонанс определяется условием

$$(m+1) \omega(H_{m+1}) = \nu$$

Таким образом, при $m \gg 1$ расстояние между ближайшими резонансными значениями частот равно:

$$\Omega = \omega(H_m) - \omega(H_{m+1}) \approx \frac{\nu}{m^2} = \frac{\omega^2}{\nu} \quad (2.7)$$

Если выполнено условие (2.6), то в правой части (2.4) можно оставить только резонансный член и оценить максимальное изменение энергии δH вследствие резонанса. Ввиду нелинейности частота $\omega(H)$ изменяется при этом на величину

$$\delta\omega \approx \frac{d\omega(H)}{dH} \delta H \quad (2.8)$$

Введем теперь параметр

$$K = \left(\frac{\delta\omega}{\Omega} \right)^2 \quad (2.9)$$

характеризующий отношение ширины резонанса $\delta\omega$ к расстоянию между резонансами Ω . Как было показано в /8,9/ при $K \gg 1$, когда происходит перекрытие резонансов, движение осциллятора становится перемещающимся, а фаза ϑ становится случайной функцией времени. Корреляция фаз расценивается:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\vartheta(\tau'+\tau)} e^{-i\vartheta(\tau')} d\vartheta(\tau') \sim e^{-\frac{\tau}{\tau_c}}$$

за время τ_c , равное (7):

$$\tau_c = \frac{\nu}{\omega^2} \frac{1}{\ln K} \quad (2.10)$$

Наоборот, при $K \ll 1$ имеет место устойчивость движения в смысле, определенном в конце § 1. Значение $K \sim 1$ можно считать границей перехода от устойчивого движения к стохастической неустойчивости.

Оценим параметр K . Из (2.4) получаем:

$$\delta H \sim \frac{\varepsilon U \Phi_m a_m}{m \delta \omega} \sim \frac{\varepsilon U \omega \Phi_m a_m}{\nu \frac{d\omega}{dH} \delta H}$$

откуда

$$\delta H \sim \left(\frac{\varepsilon U \omega \Phi_m a_m}{\nu \frac{d\omega}{dH}} \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

Амплитуду a_m можно найти, воспользовавшись разложением:

$$\operatorname{sn}^2 z = 2 \left[\frac{\pi}{k K(\frac{\pi}{2}, k)} \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q^n}{(1-q^{2n})^2} - \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi z}{K(\frac{\pi}{2}, k)} \right]; \quad (2.12)$$

$$q = \exp \left\{ - \frac{\pi K(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-k^2})}{K(\frac{\pi}{2}, k)} \right\}$$

где $K(\frac{\pi}{2}, k)$ - полный эллиптический интеграл 1-го рода и k - его модуль. Подставляя написанное выражение в (1.8) и пользуясь разложением вблизи сепаратрисы (т.е. тем, что

$1-k \ll 1$), находим:

$$a_m \sim \frac{\alpha}{N}; \quad N = K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (2.13)$$

Здесь N определяет характерное число гармоник в спектре. Оценка величины $d\omega/dH$ является более громоздкой. Заметим предварительно, что при фиксированном K гамильтониан \bar{C} в (σ, σ') - пространстве однозначно связан с U соотношением (1.9). Из (1.13) имеем:

$$\frac{dH}{d\omega} = \frac{1}{k} \frac{dH}{dU} = \frac{1}{k} \frac{d\bar{C}}{d\alpha} + \frac{\partial I}{\partial \bar{C}} \frac{d\bar{C}}{d\alpha} - \frac{\partial I}{\partial \alpha} - \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma^2(\xi) d\xi - \frac{U}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{C}} \right) \int_{-L/2}^{L/2} \sigma^2(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial I} = -k$$

и используя соотношение (1.8), (1.9) можно получить из (1.14) с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$\frac{dH}{d\omega} \sim U \sqrt{\alpha} \quad (2.15)$$

Объединяя (2.9), (2.7), (2.8), (2.11), (2.13) и (2.15) приходим к следующему условию разрушения интеграла движения:

$$K \sim \frac{\varepsilon V \Phi}{k^2 U^3} \geq 1 \quad (\Phi \equiv \Phi_m = \nu/\omega) \quad (2.16)$$

Откладывая детальный анализ критерия (2.16) и вытекающих из него следствий до следующего параграфа, мы обратим

сейчас внимание лишь на то, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированных параметрах, входящих в (2.16), критерий перестает выполняться и имеет место устойчивость, по крайней мере, на достаточно большое время. Возникающую при этом поправку к невозмущенному гамильтониану легко найти. Действительно, из (2.4) при наличии единственного резонанса на гармонике с номером n имеем:

$$\frac{dH}{d\tau} = \Psi(H) \cos(n\vartheta - \nu\tau)$$

$$\Psi(H) = 2\varepsilon U(H) \cdot a_n(H) \Phi_n(H)$$

где фазы амплитуд a_n и Φ_n для простоты опущены. Отсюда с учётом (2.5) имеем точный интеграл

$$\int^H dH \frac{n\omega(H) - \nu}{\Psi(H)} = \sin(n\vartheta - \nu\tau) + \text{const}$$

Разлагая $\omega(H)$ вблизи резонанса при $H = H_n$ имеем:

$$n \frac{d\omega(H)}{dH} (H - H_n)^2 = 2\Psi(H_n) \sin(n\vartheta - \nu\tau) + \text{const}$$

Полученное выражение показывает, что благодаря резонансу на нелинейной волне появляется слабая модуляция (сравни полученную формулу с (2.11)).

Наоборот, при любых сколь угодно малых ε всегда существует разрушение интеграла движения, если только K достаточно мало, т.е. невозмущенная периодическая волна достаточно "близка" к сепаратрисе (уединенной волне). Последнее обстоятельство, однако, требует уточнения, которое также будет обсуждено в § 3.

По ходу вывода критерия (2.16) мы сделали следующих три упрощения: 1) вместо исходной системы (1.1) рассматривалось приближение (1.4), когда число Маха мало отличается от единицы; 2) в возмущении $F(\tau, y)$ рассматривался только первый член; 3) возмущение $F(\tau, y)$ содержало только одну гармонику по времени τ .

Первое упрощение означает, что исследование устойчивости производится достаточно далеко от значений параметров, при которых происходит опрокидывание волны. При этом d является единственным параметром, который существенно меняется от значения много меньшего единицы, до величины $d_c \approx 0,6$. Последнее означает, что для очень грубой оценки вблизи режима опрокидывания неравенство (2.16) можно сохранить.

Учёт второго члена в $F(\tau, y)$ не приводит к каким-либо принципиальным изменениям и для экономии места рассматриваться не будет.

Остановимся более подробно на третьем упрощении. Очевидно, что для эффективного развития стохастической неустойчивости необходимо, чтобы в правой части уравнения (2.4) было достаточно много членов, которые в определенные моменты времени, в связи с изменением H могут оказаться резонансными. В случае, который рассматривался выше, это означает, что возмущение, содержащее только одну гармонику по времени, должно иметь много гармоник по координате. Можно рассмотреть и другой предельный случай, когда возмущение имеет только одну гармонику по координате:

$$F_n(\tau) = F_{n_0}(\tau) \delta_{nn_0}$$

Разлагая $F_{n_0}(\tau)$ в ряд Фурье по времени, получаем вместо (2.4):

$$\frac{dH}{d\tau} = \varepsilon U \left\{ a_{n_0} e^{in_0\vartheta} \sum_m F_{-n_0, m} e^{-im\nu\tau} + a_{-n_0} e^{-in_0\vartheta} \sum_m F_{n_0, -m} e^{im\nu\tau} \right\} \quad (2.17)$$

В этом случае большое число резонансных членов в правой части может быть обеспечено достаточно широким временным спектром возмущения. Рассмотрение случая (2.17) проводится аналогично предыдущему, причём расстояние между резонансами те-

перь равно

$$\Omega = \frac{v}{h_0} \quad (2.18)$$

и условие перекрытия (2.9) всегда может быть выполнено при достаточно малых v .

§ 3. Эволюция нелинейной периодической волны

Как уже отмечалось, систему (2.4) можно интерпретировать как движение нелинейного осциллятора с энергией H и частотой $\omega(H)$. При выполнении критерия (2.16) фаза такого эквивалентного осциллятора характеризуется за время (2.10) и все движение может быть рассмотрено как случайные блуждания. При этом происходит рост в среднем величины H , а, следовательно, ω и U . Таким образом, возникающее броуновское движение приводит к тому, что решением задачи (1.5) является выражение, функционально совпадающее с нелинейной волной, в которой скорость U является случайной функцией времени. Как следует из (2.16), с ростом U критерий ухудшается и область стохастического движения ограничена на фазовой плоскости некоторым максимальным значением U_{max} , при котором (2.16) уже не выполняется. Если теперь окажется, что $U_{max} > U_c$, то это означает, что рассмотренная неустойчивость, в конечном счете, приводит к опрокидыванию волны.

Другое ограничение на рост U может быть связано с тем, что при $v \leq \omega = kU$ резонансы (2.4) невозможны. И, наконец, третье ограничение связано с шириной спектра по координате возмущения $F(\tau, y)$, т.к. резонансы вне области отличных от нуля гармоник $F_n(\tau)$ отсутствуют.

Будем теперь считать для простоты, что ни одно из этих ограничений не действует и опишем с помощью кинетического уравнения развитие неустойчивости волны аналогично тому, как это делалось в [7].

Предварительно заметим, что правая часть в (2.4) пропорциональна, грубо говоря $U(\tau, y)$. Согласно (1.8) $U(\tau, y)$ представляет собой последовательность очень узких импульсов, отличных существенно от нуля на интервале $\tau \sim 1$ ($t \sim \tau d/c$)

в следующих периодически с частотой $\omega = kU \ll 1$

Каждый резонанс действует на эквивалентный осциллятор как толчок (столкновение) с интервалом между толчками:

$$\Delta \tau \sim \frac{1}{\Omega} = \frac{v}{\omega^2} \quad (3.1)$$

Этих сведений оказывается достаточно для того, чтобы записать уравнение Фоккера-Планка для функции распределения $f(H)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial H} \left[\frac{\langle \Delta H \rangle}{\Delta \tau} f \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H^2} \left[\frac{\langle (\Delta H)^2 \rangle}{\Delta \tau} f \right] \quad (3.2)$$

где угловые скобки означают усреднение по случайной фазе ϑ .

Вычислим $\langle \Delta H \rangle$ и $\langle (\Delta H)^2 \rangle$. Учитывая сделанные выше замечания, получаем из (2.1), (2.5) путем интегрирования по малому интервалу времени $\tau \sim 1$ в окрестности толчка (резонанса):

$$\sigma_n \approx a_n e^{in\vartheta} + \varepsilon F_n + o(\varepsilon^2) \quad (3.3)$$

Аналогично из (2.4) и (3.3)

$$\Delta H \approx 2\varepsilon U |a_n \Phi_n| \cos(n\vartheta - \nu\tau + \vartheta_0) + 2\varepsilon^2 U |\Phi_n|^2 \cos^2 \nu\tau + o(\varepsilon^2) \quad (3.4)$$

где ϑ_0 - фаза величина $(a_n \cdot \Phi_n)$. Из (3.4) получаем необходимые выражения для моментов, учитывая (2.13):

$$\begin{aligned} \langle \Delta H \rangle &\approx 2\varepsilon^2 U |\Phi|^2 \cos \nu\tau + o(\varepsilon^4) \\ \langle (\Delta H)^2 \rangle &\approx 2\varepsilon^2 U^2 |\Phi|^2 |a_n v / \omega|^2 \approx \\ &\approx 2\varepsilon^2 k^2 U^2 \alpha |\Phi|^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подстановка (3.5), (3.1) в (3.2) и замена переменных

$$f(H) = f(u) \frac{du}{dH} = \frac{1}{k} f(u) \frac{d\omega}{dH} = \frac{f(u)}{k u \sqrt{\alpha}}$$

даёт окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial \tau} = & -2 \varepsilon k |\Phi|^2 \frac{\cos^2 \nu \tau}{\nu} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u^2}{\sqrt{u-1}} f(u) \right) + \\ & + \varepsilon^2 \frac{k^2}{\nu} |\Phi|^2 \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{u \sqrt{u-1}} \frac{\partial}{\partial u} (u \sqrt{u-1} f(u)) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует оценка для характерного времени диффузии:

$$\frac{1}{\tau_D} \sim \frac{\varepsilon^2 k^2 |\Phi|^2}{\nu} \frac{u^2}{(\Delta u)^2}$$

где Δu - характерное изменение скорости волны за время диффузии. Поскольку u_c при опрокидывании также порядка единицы, то время T , в течение которого рассмотренная неустойчивость приведет к образованию многопоточкового движения, равно:

$$T \sim \frac{\nu}{\varepsilon^2 k^2 |\Phi|^2} \quad (3.7)$$

Перейдем теперь к исследованию эволюции спектра нелинейной периодической волны под влиянием возмущения. Под действием резонансов происходит изменение амплитуд гармоник и, вследствие нелинейности задачи, меняются, вообще говоря, частоты всех гармоник $\omega_n = n\omega$. До сих пор мы учитывали это изменение, полагая

$$\delta \omega_n = n \delta \omega \quad (3.8)$$

Последнее означало, что возникающие поправки к частотам не изменяли закона дисперсии и не учитывали связанное с этим изменением дополнительное распыление пакета (1.8).

Проведем теперь более точные оценки. Рассмотрим невозмущенное уравнение (2.1):

$$\frac{d \psi_n}{d \tau} = -i n k \left[(1 - k^2 n^2) \psi_n + \frac{1}{2} \sum_{n_1 + n_2 = n} \psi_{n_1} \psi_{n_2} \right]$$

или, после подстановки

$$\psi_n = a_n e^{-i n \psi}$$

имеем

$$\omega_n a_n = n k \left[(1 - k^2 n^2) a_n + \frac{1}{2} \sum_{n_1 + n_2 = n} a_{n_1} a_{n_2} \right]$$

Из полученного выражения следует:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial a_m} = - \frac{k n}{a_n} \left[\alpha + (k n)^2 \right] \delta_{nm} + k n \frac{a_{n-m}}{a_n} \quad (3.8)$$

или для любого $n \neq m$ и $n, m < N$:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial a_m} = k n \frac{a_{n-m}}{a_n} \approx k n \quad (3.9)$$

С другой стороны, согласно (2.13), (2.15) и (1.11) ранее было:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial a_m} = n \frac{\partial \omega}{\partial a_m} = n \frac{d\omega}{dH} \frac{\partial H}{\partial a_m} \approx n \frac{d\omega}{dH} u a_m \approx k n$$

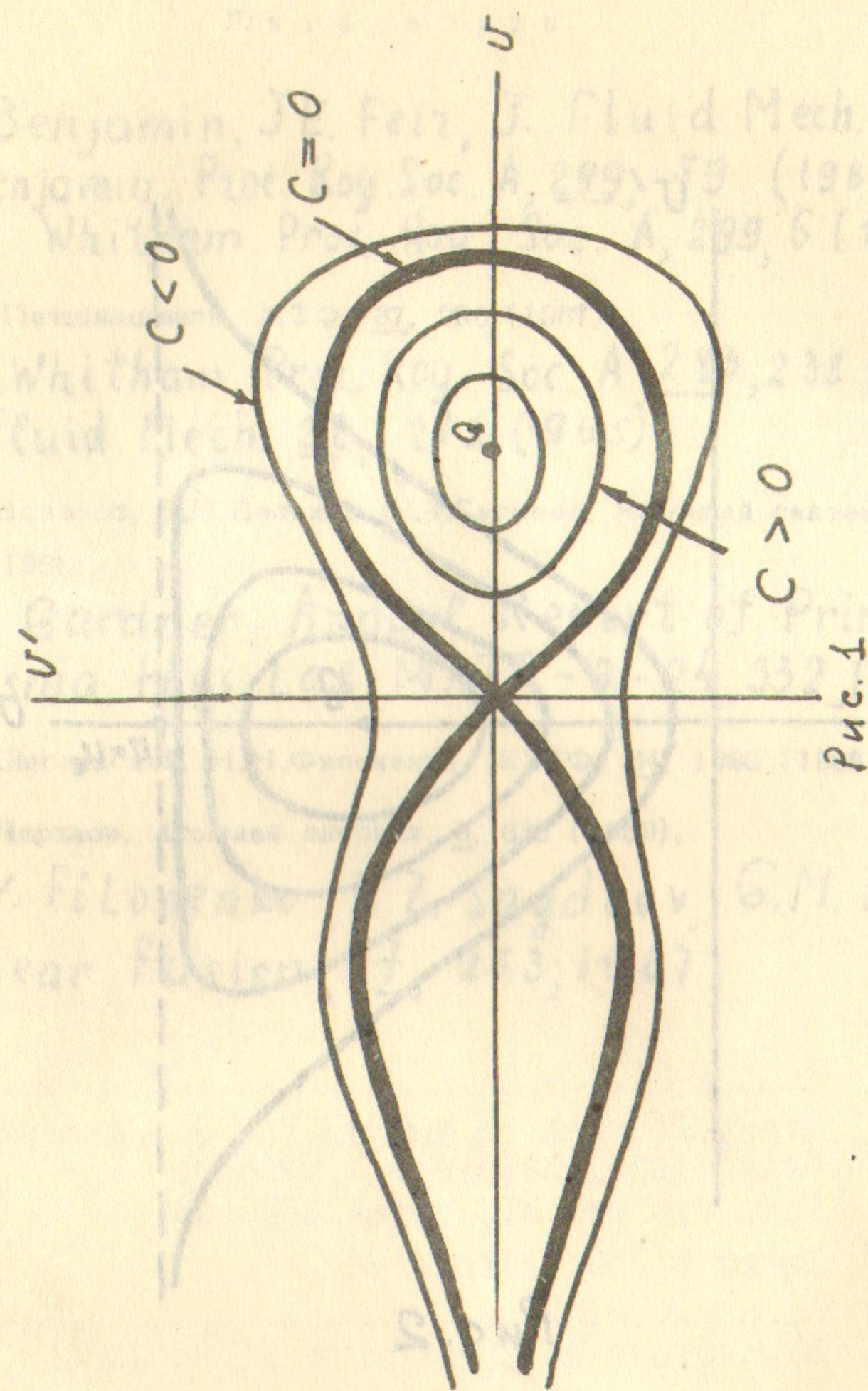
что совпадает с (3.9). Полученное совпадение показывает, что действительно, возмущенное движение волны можно рассматривать как движение нелинейного осциллятора, имеющего энергию H и фазу ψ . Тот факт, что фаза осциллятора хаотизируется, означает, что все гармоники пакета (точнее, гармоники основной

части спектра с номерами от нуля до N) имеют случайные фазы, не скоррелированные друг с другом.

Процесс стохастического разрушения нелинейной волны может происходить и иным образом в случае (2.17), когда внешнее возмущение имеет много временных гармоник. Оказывается возможным выделить два предельных случая. Первый из них аналогичен рассмотренному и соответствует условиям, когда вклад в резонансы дают лишь одна или несколько временных гармоник возмущения. Второй случай соответствует следующему механизму. Каждая гармоника волны оказывается в резонансном взаимодействии с большим числом временных гармоник возмущения. В этом случае изменение частоты гармоник определяется с помощью (3.9) (при $n=m$), а расстояние между резонансами равно (2.18). Каждая гармоника совершает независимо от других броуновское движение, и число степеней свободы в задаче становится очень большим. Такой механизм требует специального рассмотрения и мы на нем останавливаться не будем.

В заключение мы отметим, что при $k \rightarrow 0$ и заданном числе гармоник m_0 возмущения F начинает существенно сказываться третье ограничение (см. начало этого параграфа) на эволюцию волны. Относительное число резонансных гармоник m_0/N (т.к. $N \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 0$) и для исследования устойчивости уединенной волны необходим другой подход.

Выражаем благодарность М.А.Леонтовичу и Б.Б.Каломцеву за полезные обсуждения.



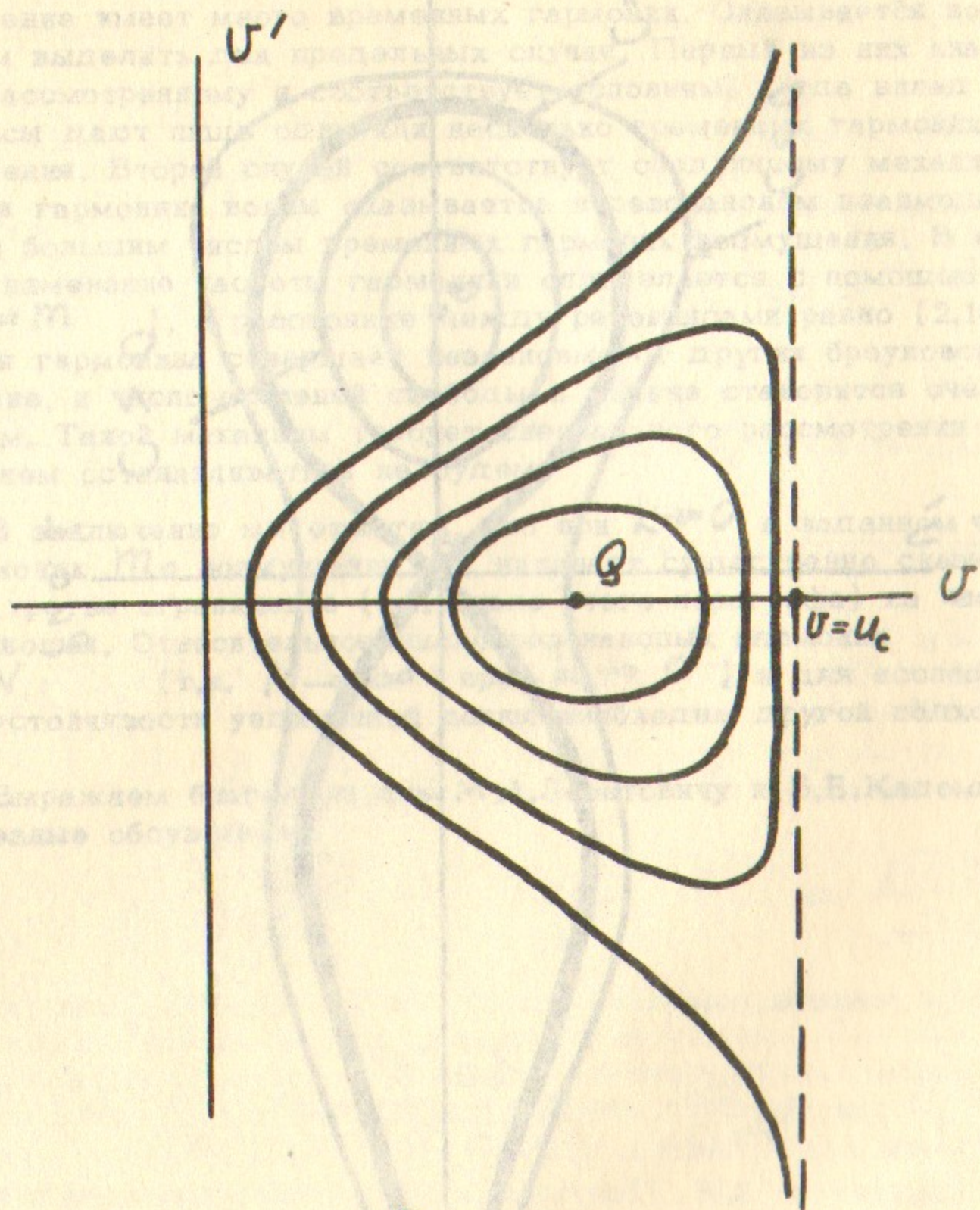


Рис. 2

Л и т е р а т у р а

1. T.B. Benjamin, J.E. Feiz, J. Fluid Mech. 27, 417 (1967)
T.B. Benjamin. Proc. Roy. Soc. A, 299, 59 (1967)
2. G.B. Whitham. Proc. Roy. Soc. A, 299, 6 (1967)
3. В.И.Петшиашвили. ЖТФ, 37, 206 (1967).
4. G.B. Whitham. Proc. Roy. Soc. A, 283, 238 (1965)
J. Fluid Mech. 22, 273 (1965)
5. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
6. C.S. Gardner. Annual Report of Princeton Plasma Phys. Lab. MATT-a-24, 332, (1966)
7. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ, 54, 1590 (1968).
8. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959).
9. N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev, G.M. Zaslavsky
Nuclear Fusion, 7, 253, 1967

Ответственный за выпуск Г.М.Заславский
 Подписано к печати 5.1.1968 г.
 Лек. 1, 5 пер. л., табл. 300 экз.
 Заказ № 258, бюджетно
 Ответственно за подготовку в ЦИО АН СССР

Ответственный за выпуск Г.М.Заславский
Подписано к печати 8.X-1968 г.
Усл. 1,5 печ.л., тираж 300 экз.
Заказ № 253, бесплатно

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР