

19

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 245

Д.Д.Рютов

К ТЕОРИИ ПУЧКОВОГО НАГРЕВА ПЛАЗМЫ  
В ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ

Новосибирск  
1968

Д.Д.Рютов

К ТЕОРИИ ПУЧКОВОГО НАГРЕВА ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ  
ЛОВУШКАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе исследуется механизм образования быстрых электронов при взаимодействии электронного пучка с холодной плазмой в открытой ловушке. Основное внимание уделяется случаю, когда электронная плазменная частота, рассчитанная по концентрации холодной плазмы, существенно превышает электронную циклотронную частоту. Предполагается, что источником электронов, вовлекаемых в процесс ускорения, является электронный пучок. Считается также, что пучок является источником ленгмюровских колебаний с анизотропным спектром, взаимодействуя с которыми "выбитые" из пучка электроны диффундируют в радиальном направлении и одновременно ускоряются. При этих предположениях удаётся решить кинетическое уравнение с квазилинейным интегралом столкновений и найти функцию распределения быстрых электронов в каждой точке ловушки. Можно вычислить также "температуру" быстрых электронов и их полную энергию и найти зависимость этих величин от напряжённости магнитного поля и от радиуса диафрагмы, ограничивающей поперечный размер плазмы. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

## 1. Введение

В 1961 году Я.Б.Файнбергом и И.Ф.Харченко с сотрудниками /1/ было обнаружено, что при пропускании электронного пучка через холодную плазму в ней появляются ускоренные электроны, энергия которых превосходит энергию пучка. В дальнейшем различные авторы /2-9/ провели целую серию опытов по пучковому нагреву плазмы в открытых (пробочных) ловушках. В этих опытах было показано, что взаимодействие пучка с холодной плазмой приводит к образованию некоторого количества горячей плазмы, температура которой в 5-15 раз превышает энергию электронов пучка, причём образовавшаяся горячая плазма заполняет весь объём ловушки (в то время, как поперечный размер пучка существенно меньше диаметра ловушки). Целью настоящей работы является исследование механизма образования горячей плазмы.

Рассматриваемая задача характерна тем, что её решение зависит от большого числа параметров, относительное влияние которых трудно оценить *a priori*. Поэтому в дальнейшем изложении нам часто придется обращаться к экспериментальным данным. В соответствующих случаях мы будем пользоваться, главным образом, результатами работы /5/, в которой впервые были найдены некоторые зависимости, весьма существенные для понимания механизма нагрева.

В эксперименте /5/ плазма создавалась в пробочной ловушке с расстоянием между пробками  $L = 80$  см. Поперечный размер плазмы можно было ограничивать с помощью набора диафрагм (максимальное значение внутреннего радиуса диафрагмы  $R_{\max} = 12$  см). Магнитное поле  $H$  в центре ловушки можно было изменять от 500 до 1800 эрст, пробочное отношение равнялось 5,5. Концентрация холодной плазмы  $n_c$  составляла примерно  $10^{12}$  см $^{-3}$  и не изменялась существенным образом в процессе нагрева. Температура холодной плазмы не превышала, по-видимому, нескольких десятков электронвольт. Пучок имел следующие параметры: радиус  $r_g \sim 1$  см, энергию  $\sim 25$  кэв, концентрацию  $n_g \sim 10^{10}$  см $^{-3}$ , максимальную длительность  $t_g \sim 250$  мксек.

В ходе экспериментов было установлено, что в течение нескольких десятков микросекунд после включения пучка температу-

ра, концентрация и поперечный размер горячей плазмы увеличиваются. Вслед за этим устанавливается стационарное состояние, в котором концентрация горячей плазмы  $n_h$  составляет примерно  $10^{10}$  см<sup>-3</sup>, а её температура  $T_h$  лежит в пределах от 40 до 200 кэВ (в зависимости от напряженности магнитного поля и от поперечного размера диафрагмы). В стационарном состоянии радиус области, занятой горячей плазмой, существенно превышает радиус пучка. Стационарное состояние сохраняется вплоть до момента выключения пучка, после чего горячая плазма распадается за время порядка нескольких сотен миллисекунд. В настоящей работе мы сосредоточим основное внимание именно на исследовании стационарного состояния; процесс распада плазмы после выключения пучка рассматриваться не будет.

Полная теория пучкового нагрева, несомненно, должна включать в себя описание процессов, происходящих как в пучке, так и в окружающем его пространстве. В настоящее время, однако, построение такой теории не представляется возможным, прежде всего, из-за нехватки экспериментальных данных относительно процессов внутри пучка. Поэтому мы попытаемся решить более узкую задачу и ограничимся исследованием процесса ускорения электронов в области вне пучка. Сам пучок при этом будет рассматриваться просто как источник колебаний с известным спектром. Кроме того, мы будем предполагать, что пучок является также источником быстрых электронов<sup>х)</sup> (с энергией порядка энергии электронов пучка), которые, покинув пучок, вовлекаются в процесс ускорения и, в конечном итоге, набирают энергию, существенно превышающую энергию электронов пучка.

Ясно, что свойства пучка как источника волн и частиц определяются происходящими внутри него процессами. К сожалению, относительно этих процессов можно сделать только грубые качественные предположения. Однако окончательные результаты, полученные в работе, не очень чувствительны к этим предположениям, что является некоторым оправданием используемого нами подхода к задаче.

х) Необходимость такого предположения будет разъяснена в разделе 2.

## 2. Модель нагрева

В настоящее время не вызывает сомнений, что образование горячей компоненты плазмы в опытах по пучковому нагреву обусловлено взаимодействием электронов с колебаниями, источником которых является электронный пучок. Попытаемся выяснить, какой именно тип колебаний ответствен за эффект нагрева.

В экспериментах /5/ было установлено, что основную долю своей окончательной энергии горячие электроны набирают не в области пучка, а на больших (по сравнению с радиусом пучка) расстояниях от него. На этом основании <sup>можно</sup> сразу исключить из рассмотрения те специфически "пучковые" типы колебаний, для существования которых необходимо наличие потоков заряженных частиц (см., например, /11/), поскольку такие колебания могли бы вызывать нагрев только в области пучка.

Концентрация холодной плазмы  $n_c$  в опытах /5/ значительно выше, чем концентрация горячей плазмы  $n_h$ . Следовательно, дисперсионные свойства колебаний определяются холодной плазмой. Кроме того, в этих опытах электронная плазменная частота  $\omega_p$  существенно (в 3-10 раз) превышает электронную циклотронную частоту  $\omega_H$  в объеме ловушки. Из линейной теории неустойчивости пучка следует, что в таких условиях среди всех типов колебаний, которые могут распространяться в области вне пучка, наиболее быстро возбуждаются электронные ленгмюровские колебания (см. /12/). Таким образом, можно предполагать, что нагрев электронов обусловлен их взаимодействием с ленгмюровскими колебаниями.

Вышеприведенные соображения находятся в согласии с результатами экспериментов /6,10/, в которых производилась регистрация СВЧ-колебаний плазмы при пучковом нагреве и было установлено, что при условии  $\omega_p \gg \omega_H$  эти колебания сосредоточены вблизи от электронной плазменной частоты.

В качестве характерного инкремента ленгмюровских колебаний следует взять величину  $\gamma_L \sim \omega_p n_h / n_c$ , так как в эксперименте /5/ выполняется условие  $\gamma_L L / v_L \gg 1$  (где  $v_L$  - скорость пучка при входе в плазму), т.е. пучок успевает за время пролёта через ловушку в значительной мере "размазаться" по скоростям. Вследствие такой "размазки" характерная фазовая скорость ленгмюров-

ских колебаний  $V_{ph}$  будет в 2 - 3 раза меньше  $V_b$ , а их характерный волновой вектор  $k$  будет порядка  $(2 \div 3) \omega_p / V_b$ .

Возникшие в области пучка ленгмюровские колебания распространяются от оси к периферии ловушки и заполняют всю область, занятую холодной плазмой. При условии  $\omega_p \gg \omega_n$  взаимодействие электронов с этими колебаниями определяется, в основном эффектом Черенкова, причём взаимодействие между электроном со скоростью  $\vec{V}$  и ленгмюровским колебанием с волновым вектором  $\vec{k}$  может иметь место только если выполняется соотношение

$$\omega_p - \vec{k}\vec{V} = 0$$

или, иначе,

$$V_{ph} = V \cos \psi \quad (1)$$

где  $\psi$  - угол между векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{V}$ , а  $V_{ph} = \omega_p / k$  - фазовая скорость. Отсюда видно, что электроны холодной плазмы не могут взаимодействовать с колебаниями, возбуждаемыми пучком, поскольку скорость этих электронов существенно меньше  $V_{ph}$ , и условие (1) для них не может быть выполнено. Следовательно, пучок не может вызывать нагрева электронов холодной плазмы. Поэтому необходимо предположить, что существует некоторый механизм, поставляющий в область вне пучка электроны, скорость которых превышает  $V_{ph}$ , т.к. только такие электроны могут взаимодействовать с колебаниями и ускоряться.

Естественно допустить, что вследствие развития пучковой неустойчивости некоторая доля электронов "выбивается" из пучка<sup>хх)</sup>. Скорости "выбитых" электронов превышают  $V_{ph}$ , и они могут взаимодействовать с колебаниями. Поэтому мы будем счи-

х) Отметим, что в эксперименте /5/ выполнялось неравенство  $k r_b \gg 1$ , т.е. для оценки инкремента действительно можно пользоваться приближением безграничного пучка, что мы и делали выше.

хх) Отметим, что для обеспечения наблюдаемой экспериментально скорости заполнения ловушки горячей плазмой достаточно, чтобы из пучка "выбивалось" всего лишь от 1 до 3% частиц.

тать, что источником быстрых электронов, вовлекаемых в процесс ускорения, является электронный пучок. В настоящее время затруднительно дать строгое обоснование этого предположения, но, как будет видно из дальнейшего, оно позволяет понять многие экспериментальные результаты.

Поскольку в процессе ускорения электроны приобретают скорости, существенно превышающие скорость пучка (и, следовательно,  $V_{ph}$ ), мы рассмотрим более подробно черенковское взаимодействие в случае  $V \gg V_{ph}$ . Из соотношения (1) следует, что при этом  $\psi \approx \pi/2$ , т.е. каждый электрон взаимодействует только с теми колебаниями, которые распространяются почти перпендикулярно вектору его скорости. Как известно /13/, такое взаимодействие сводится к двум эффектам: упругому рассеянию электронов и их ускорению, причём характерное время ускорения в  $V^2/V_{ph}^2$  раз больше времени упругого рассеяния.

Упругое рассеяние вызывает диффузию электронов и их уход через пробки. Может показаться, что из-за рассеяния в конус ухода быстрые электроны вообще не смогут удалиться от пучка на расстояние, превышающее их ларморовский радиус  $r_n$ , поскольку электрон рассеивается в конус ухода, грубо говоря, за время одного упругого столкновения, но за это же время он не может сместиться по радиусу ловушки на величину, существенно превышающую  $r_n$ .

Ситуация, однако, существенно изменяется, если в системе возбуждены преимущественно колебания, для которых угол  $\theta'$  между вектором  $\vec{k}$  и осью ловушки не слишком велик. Рассмотрим для простоты случай, когда колебания с углами  $\theta'$ , превышающими некоторое критическое значение  $\theta_0$ , вообще отсутствуют. Иными словами, мы будем считать, что спектральная плотность энергии колебаний  $W_k$  равна нулю при  $\theta' > \theta_0$  (естественно, что  $\theta_0 < \pi/2$ ). Как было отмечено выше, условие взаимодействия быстрого электрона с колебанием имеет вид

$\psi \approx \pi/2$ . Это означает, что при сделанном нами предположении относительно спектральной функции  $W_k$  взаимодействуют с колебаниями (т.е. рассеиваются и ускоряются) только такие электроны, для которых угол  $\theta$  между вектором скорости и осью ловушки достаточно велик (см.рис.1).

В процессе рассеяния угол  $\theta$  может меняться только в пределах области 2 на рис.1. Как видно из этого рисунка, при достаточно большом пробочном отношении рассеяние не будет приводить к уходу электронов из ловушки. Соответствующее ограничение на величину угла  $\alpha$  при вершине "конуса ухода" имеет вид:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \theta_0 \quad (2)$$

Если же неравенство (2) не выполняется, то электроны быстро рассеиваются в "конус ухода", и нагрев отсутствует. Эти соображения находятся в согласии с результатами экспериментов /4-6/, в которых была обнаружена пороговая зависимость эффекта нагрева от пробочного отношения  $\eta$ : нагрев отсутствовал, когда  $\eta$  было меньше некоторого критического значения  $\eta_0$ . Соотношение (2) позволяет связать значение  $\eta_0$  с величиной  $\theta_0$ :

$$\eta_0 = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} \quad (3)$$

Как следует из вышесказанного, предположение об анизотропии спектральной функции  $W_{\vec{k}}$  является совершенно необходимым для того, чтобы можно было объяснить нагрев электронов их черенковским взаимодействием с ленгмюровскими колебаниями. В качестве возможной причины такой анизотропии следует указать на зависимость инкремента ленгмюровских колебаний от угла  $\theta'$  между волновым вектором и направлением пучка<sup>х</sup>). С другой стороны, анизотропия спектра колебаний может в некотором смысле рассматриваться как экспериментальный факт, поскольку само по себе наличие нагрева свидетельствует о существовании такой анизотропии. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что функция  $W_{\vec{k}}$  обладает соответствующей анизотропией.

Отметим, что реально необходимая для объяснения экспериментов степень анизотропии не очень велика: подставляя в соотношение (3) измеренное в работах /4/ значение критического пробочного отношения  $\eta_0 \approx 4$ , получаем, что  $\theta_0 \approx 60^\circ$ , т.е. колебания должны отсутствовать только в области углов шириной

х) Известно, что инкремент уменьшается при увеличении  $\theta'$  /14/. Поэтому волновые векторы колебаний, испускаемых пучком, ориентированы преимущественно вдоль оси пучка.

$\sim 30^\circ$ . В действительности, по-видимому, имеется некоторый конечный (хотя и малый) уровень колебаний и в области  $\theta' > \theta_0$ . При взаимодействии с этими колебаниями электроны рассеиваются в конус ухода, но время такого процесса велико.

Сформулируем теперь главные предположения, положенные в основу рассматриваемой здесь модели нагрева. Предполагается, что источником электронов, вовлекаемых в процесс ускорения, является пучок. Начальная энергия этих электронов по порядку величины равна энергии электронов пучка. Считается также, что пучок является источником ленгмюровских колебаний с анизотропным спектром, взаимодействуя с которыми "выбитые" из пучка электроны диффундируют в радиальном направлении и одновременно ускоряются. Поскольку в рамках предлагаемой модели заполнение ловушки горячей плазмой происходит за счёт диффузии быстрых электронов от оси к периферии ловушки, мы будем называть эту модель нагрева диффузионной.

Холодная плазма в диффузионной модели играет, по существу, пассивную роль: она является просто той средой, в которой распространяются ленгмюровские колебания. В дальнейшем для простоты мы будем считать, что внутри той магнитной поверхности, которая проходит через край диафрагмы, холодная плазма однородна, а за этой поверхностью её концентрация быстро (на расстоянии порядка ларморовского радиуса холодных электронов) спадает до нуля.

### 3. Спектральная плотность энергии колебаний

Как было указано выше, мы считаем, что пучок возбуждает преимущественно колебания, в которых угол  $\theta'$  между направлением волнового вектора и осью системы не превышает некоторого критического значения  $\theta_0$ . Эти колебания распространяются из области пучка с групповой скоростью  $V_g$ , которая определяется зависимостью их частоты от волнового вектора. Легко видеть, что в условиях эксперимента /5/ дисперсионное соотношение для ленгмюровских колебаний следует записывать в виде:

$$\omega = \omega_p \left( 1 + \frac{K_1^2}{2(K_1^2 + K_{||}^2)} \frac{\omega_H^2}{\omega_p^2} \right) \quad (4)$$

где  $K_{||}$  и  $K_1$  - параллельная и перпендикулярная к магнитному полю составляющие волнового вектора. Поправка к частоте, связанная с учётом теплового движения электронов, незначительна.

Из формулы (4) находим, что  $v_{g1} \sim \frac{k_1^2 k_1}{k^4} \frac{\omega_H^2}{\omega_p} \sim \frac{\omega_H^2}{\omega_p^2} v_{ph}$

На основе этого результата можно показать, что колебания до - стигают внешней границы плазмы практически без затухания (т.е. на нагрев быстрых электронов расходуется только незначительная часть энергии колебаний). Действительно, время  $\tau$  распространения колебаний от оси ловушки до внешней границы плазмы равно

$R/v_{g1} \sim R/v_{ph} \cdot \omega_p^2/\omega_H^2$  (где  $R$  - радиус диафрагмы), а декремент

затухания колебаний вследствие их черенковского взаимодействия с быстрыми электронами, может быть оценен как  $\gamma_h \sim (n_h/n_c)(v_{ph}/v_h)^3 \omega_p$

(где  $v_h$  - характерная тепловая скорость быстрых электронов).

Произведение  $\tau \gamma_h$ , которое характеризует затухание колебаний,

равно  $(n_h/n_c) \cdot (\omega_p R/v_{ph}) \cdot (\omega_p/\omega_H)^2 (v_{ph}/v_h)^3$ . Из экспериментальных дан-

ных видно, что  $n_h/n_c \sim 10^{-2}$ ,  $\omega_p R/v_{ph} \lesssim 30$ ,  $(\omega_p/\omega_H)^2 \lesssim 30$ ,

$(v_{ph}/v_h)^3 \lesssim 10^{-2}$

. Следовательно, величина  $\tau \gamma_h$  во всяком случае не превышает  $10^{-1}$ , т.е. затухание колебаний при их распространении от пучка до границы плазмы несущественно.

С другой стороны, на границе холодной плазмы колебания должны почти полностью поглощаться из-за черенковского взаимодействия с холодными электронами, поскольку в этой области волновой вектор колебаний, распространяющихся из плазмы, возрастает и становится сравнимым с дебаевским волновым вектором (из-за уменьшения концентрации холодной плазмы в переходном слое).

На основании приведенных соображений мы будем считать, что колебания свободно распространяются от пучка до границы холодной плазмы, где они полностью поглощаются холодными электронами. Поэтому отраженные от границы плазмы колебания отсутствуют.

Чтобы найти зависимость спектральной функции  $W_{\vec{k}}$  от координат, следует воспользоваться уравнением

$$\vec{v}_{g\vec{k}} \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial \vec{r}} = 0, \quad (5)$$

которое описывает свободное (без затухания) распространение колебаний в однородной среде (см. /15/). Для исследования этого

уравнения удобно ввести сферическую систему координат  $(k, \theta', \varphi')$  в пространстве волновых векторов. Полярную ось этой системы мы направим вдоль вектора  $\vec{H}$ , который, в свою очередь, параллелен оси ловушки, а угол  $\varphi'$  будем отсчитывать от направления радиуса, проведенного от оси системы в точку наблюдения (рис.2). Область изменения угла  $\varphi'$  мы выберем следующим образом:

$$-\pi \leq \varphi' \leq \pi$$

В новых переменных уравнение (5) записывается в виде:

$$v_{g1} \left( \cos \varphi' \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial r} - \frac{\sin \varphi'}{r} \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial \varphi'} \right) + v_{g1} \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

где  $W_{\vec{k}} \equiv W(z, r, k, \theta', \varphi')$ . Это уравнение следует решить с граничным условием  $W_{\vec{k}}|_{r=r_0} = W^{(0)}(z, k, \theta', \varphi')$ , где через  $W^{(0)}(z, k, \theta', \varphi')$  обозначена спектральная плотность энергии колебаний на границе пучка. Функция  $W^{(0)}$  обладает следующими свойствами:

$$W^{(0)}(z, k, \theta', \varphi') = W^{(0)}(z, k, \theta', -\varphi'), \quad (7)$$

$$W^{(0)}(z, k, \theta', \varphi') = 0 \quad \text{при} \quad \varphi' < -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \varphi' > \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

$$W^{(0)}(z, k, \theta', \varphi') = 0 \quad \text{при} \quad \theta' > \theta_0. \quad (9)$$

Первое из этих свойств есть следствие симметрии задачи. Второе соответствует тому факту, что на границе пучка имеются только колебания, выходящие из него (отражение от внешней границы плазмы отсутствует!) Смысл равенства (9) обсуждался в разделе 2.

Характерные масштабы изменения функции  $W_{\vec{k}}$  по координатам  $z$  и  $r$  по порядку величины равны, соответственно,  $L$  и  $R$ . Поскольку имеет место неравенство  $L \gg R$ , мы можем пренебречь в уравнении (6) последним слагаемым:

$$\cos \varphi' \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial r} - \frac{\sin \varphi'}{r} \frac{\partial W_{\vec{k}}}{\partial \varphi'} = 0. \quad (10)$$

Как было отмечено в разделе 2, быстрые электроны набирают основную долю своей окончательной энергии в области  $r \gg r_b$ . Поэтому для исследования задачи о нагреве достаточно знать свойства функции  $W_{\vec{k}}$  при  $r \gg r_b$ . На таких расстояниях от пучка решение уравнения (10) может быть записано в виде:

$$W_{\vec{k}} = W^{(0)}(z, k, \theta', \frac{r}{r_b} \varphi') \quad (11)$$

Учитывая соотношение (8), находим отсюда, что в области  $r \gg r_b$  функция  $W_{\vec{k}}$  отлична от нуля только при  $|\varphi'| \lesssim r_b/r \ll 1$ , т.е. волновые векторы колебаний образуют малый угол с плоскостью, проходящей через ось системы и точку наблюдения.

Сейчас мы покажем, что функция  $W_{\vec{k}}^{(0)}$  не зависит от магнитного поля. В самом деле, в области пучка (т.е. при  $r \lesssim r_b$ ) вид функции  $W_{\vec{k}}$  определяется балансом трех процессов: возбуждением колебаний из-за пучковой неустойчивости, нелинейным взаимодействием колебаний и их уходом из области пучка за счёт отличной от нуля групповой скорости. Соответственно этому, уравнение для определения  $W_{\vec{k}}$  в области пучка может быть записано в следующей схематической форме:

$$\gamma_b W_{\vec{k}} + \hat{A}(W_{\vec{k}}) - \frac{v_{g\perp}}{r_b} W_{\vec{k}} = 0 \quad (12)$$

Здесь первый член описывает раскачку колебаний пучком, второй — нелинейное взаимодействие колебаний, а третий — вынос колебаний из области пучка. Легко видеть, что в условиях эксперимента /5/ выполняется неравенство  $\gamma_b r_b \gg v_{g\perp}$ , т.е. последним слагаемым в уравнении (12) можно пренебречь. Следовательно, функция  $W_{\vec{k}}$  определяется балансом двух слагаемых:  $\gamma_b W_{\vec{k}}$  и  $\hat{A}(W_{\vec{k}})$ . Но при условии  $\omega_p \gg \omega_{H\perp}$  инкремент неустойчивости и скорость нелинейных взаимодействий не зависят от магнитного поля. Поэтому не зависит от магнитного поля и функция  $W_{\vec{k}}$ , а следовательно, и  $W_{\vec{k}}^{(0)} = W_{\vec{k}}|_{r=r_b}$ .

#### 4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Чтобы дать количественное описание процесса черенковского взаимодействия быстрых электронов с ленгмюровскими колебаниями, мы воспользуемся кинетическим уравнением с квазилинейным интегралом столкновений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{mc} [\vec{v} \vec{H}] \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = St f \quad (13)$$

Здесь  $f$  — функция распределения быстрых электронов,  $\vec{H}$  — внешнее магнитное поле, а  $St f$  — квазилинейный интеграл столкновений, который имеет вид:

$$St f = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial v_\beta}, \quad (14)$$

причем тензор  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  выражается через спектральную плотность энергии колебаний  $W_{\vec{k}}$  с помощью соотношения (см. /14/):

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2} \int d^3 \vec{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W_{\vec{k}} \delta(\omega_p - \vec{k} \vec{v}). \quad (15)$$

Как указывалось в разделе 3, спектральная плотность энергии колебаний может зависеть от координаты  $z$ . Поэтому, строго говоря, может зависеть от  $z$  и функция распределения  $f$ . Однако, если характерная частота столкновений электронов с колебаниями  $\nu$  мала по сравнению с обратным временем пролета электрона между пробками (а именно этот случай, как мы увидим ниже, реализуется в экспериментах типа /5/), то зависимость  $f$  от  $z$  практически отсутствует: изменения  $f$  вдоль силовой линии в пространстве между пробками по порядку величины равно  $\frac{\nu L}{v} f \ll f$ . Имея в виду это обстоятельство, усредним уравнение (13) по  $z$ . В результате получим уравнение, которое имеет тот же вид, что и (13), но в котором  $W_{\vec{k}}$  заменяется на  $\overline{W_{\vec{k}}} = \frac{1}{L} \int_0^L W_{\vec{k}} dz$ , а член  $v_z \frac{\partial f}{\partial z}$  исчезает.

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 3, введем сферическую систему координат  $(v, \theta, \varphi)$  в пространстве скоростей. В этой системе кинетическое уравнение для  $f$  записывает-



ся следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \sin \theta \left( \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \omega_H \frac{\partial f}{\partial \varphi} = St f \quad (16)$$

причем интеграл столкновений имеет вид:

$$\begin{aligned} St f = & \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left( D_{vv} \frac{\partial f}{\partial v} + D_{v\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D_{v\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\ & + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( D_{v\theta} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{D_{\theta\theta}}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D_{\theta\varphi}}{v \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + (17) \\ & + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( D_{v\varphi} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{D_{\theta\varphi}}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D_{\varphi\varphi}}{v \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Тензор  $D_{\alpha\beta}$  по-прежнему определяется соотношением (15), но в это соотношение вместо  $\vec{W}_k$  следует теперь подставлять  $\vec{W}_k$ , а вместо проекций  $\vec{k}$  на орты декартовой системы — проекции на орты сферической системы ( $v, \theta, \varphi$ ):

$$k_v = k [\sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'],$$

$$k_\theta = k [\cos \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') - \sin \theta \cos \theta'],$$

$$k_\varphi = k \sin \theta' \sin(\varphi' - \varphi).$$

Те члены в интеграле столкновений (17), которые содержат компоненты  $D_{\theta\theta}$ ,  $D_{\theta\varphi}$  и  $D_{\varphi\varphi}$  тензора  $D_{\alpha\beta}$ , соответствуют упругому рассеянию электронов на колебаниях, а остальные учитывают обмен энергией между колебаниями и электронами, приводящий к нагреву последних.

Аргумент  $\delta$  - функции в формуле (15) может быть записан в виде  $\omega_p - K_v v$ , откуда следует, что  $K_v = \omega_p / v$ . С другой стороны,  $K_\theta$  и  $K_\varphi$  по порядку величины равны  $\omega_p / v_{ph}$ . Соответственно этому, можно сделать следующие оценки:

$$D_{vv} \sim \frac{v_{ph}}{v} (D_{v\theta}, D_{v\varphi}) \sim \frac{v_{ph}^2}{v^2} (D_{\theta\theta}, D_{\theta\varphi}, D_{\varphi\varphi}), \quad (18)$$

т.е. для горячих электронов  $D_{vv} \ll D_{v\theta}, D_{v\varphi} \ll D_{\theta\theta}, D_{\theta\varphi}, D_{\varphi\varphi}$  и упругие столкновения преобладают над неупругими.

Взаимодействуя с колебаниями, электроны рассеиваются по углу и диффундируют поперек магнитного поля. Согласно оценкам (18) при исследовании этого процесса можно ограничиться учётом упругих столкновений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \sin \theta \left( \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \omega_H \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \\ = \frac{1}{v^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( D_{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D_{\theta\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( D_{\theta\varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{D_{\varphi\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right] \equiv St_{\theta\varphi} f \quad (19) \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (19) по порядку величины равна  $v f$  где  $v$  — эффективная частота столкновений электронов с колебаниями. В разделе 5 будет показано, что  $v \ll \omega_H$ . Поэтому при исследовании уравнения (19) можно воспользоваться малостью  $v / \omega_H$ .

Предварительно запишем  $f$  в виде:

$$f = \langle f \rangle_{\theta\varphi} + \delta f$$

где символ  $\langle \dots \rangle_{\theta\varphi}$  обозначает усреднение по угловым переменным:

$$\langle \dots \rangle_{\theta\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^\pi \dots d\varphi$$

Из уравнения (19) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle_{\theta\varphi} = -\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle \sin\theta \cos\varphi \delta f \rangle_{\theta\varphi}.$$

Величина  $-v \langle \sin\theta \cos\varphi \delta f \rangle_{\theta\varphi}$  представляет собой диффузионный поток. Уравнение для поправки  $\delta f$  к функции распределения имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta f + v \sin\theta \left( \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \delta f + \\ + v \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \langle f \rangle_{\theta\varphi} + \omega_H \frac{\partial}{\partial \varphi} \delta f = St_{\theta\varphi} \delta f. \end{aligned} \quad (20)$$

Пренебрегая первыми двумя слагаемыми в левой части уравнения (20) по сравнению с третьим (это можно сделать, т.к.

$\delta f \sim r_H \frac{\partial}{\partial r} \langle f \rangle_{\theta\varphi} \ll \langle f \rangle_{\theta\varphi}$ ), получаем:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} - \frac{1}{\omega_H} St_{\theta\varphi} \delta f = -\frac{v}{\omega_H} \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} \langle f \rangle_{\theta\varphi} \quad (21)$$

Функцию  $\delta f$  можно найти отсюда с помощью метода последовательных приближений по параметру  $v/\omega_H$ :  $\delta f = \delta f^{(0)} + (v/\omega_H) \delta f^{(1)}$ . Однако оказывается более удобным сначала усреднить уравнение (21) по угловым переменным с весом  $\sin\varphi \sin\theta$ , что приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \langle \sin\theta \cos\varphi \delta f \rangle_{\theta\varphi} = \frac{1}{4\pi \omega_H} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[ (\cos\theta \sin\varphi \mathcal{D}_{\theta\theta} + \cos\varphi \mathcal{D}_{\theta\varphi}) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} + (\cos\theta \sin\varphi \mathcal{D}_{\theta\varphi} + \cos\varphi \mathcal{D}_{\varphi\varphi}) \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} \right] \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть этого соотношения функцию

$$\delta f^{(0)} = -\frac{v}{\omega_H} \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} \langle f \rangle_{\theta\varphi},$$

находим диффузионный поток

$$-v \langle \sin\theta \cos\varphi \delta f \rangle_{\theta\varphi} = \mathcal{D}(v, r) \frac{\partial}{\partial r} \langle f \rangle_{\theta\varphi}$$

где коэффициент диффузии определяется выражением:

$$\mathcal{D}(v, r) = \frac{v^2}{4\pi \omega_H^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[ \cos^2\theta \sin^2\varphi \mathcal{D}_{\theta\theta} + 2 \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \mathcal{D}_{\theta\varphi} + \cos^2\varphi \mathcal{D}_{\varphi\varphi} \right] \sin\theta d\theta$$

Таким образом, мы получили уравнение диффузии для быстрых электронов:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mathcal{D} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (22)$$

Здесь и ниже через  $F$  обозначается величина  $\langle f \rangle_{\theta\varphi}$ .

Зависимость коэффициента диффузии от спектральной плотности энергии колебаний можно найти с помощью формулы (15):

$$\mathcal{D}(v, r) = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 \omega_H^2} \frac{1}{v} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\pi} \sin^3\theta' d\theta' \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi' \overline{W}(r, k, \theta', \varphi') d\varphi'$$

(мы ограничиваемся нулевым приближением по параметру  $v_{ph}/v$ ). Принимая во внимание формулу (11), можно найти явную зависимость  $\mathcal{D}$  от  $r$  при  $r \gg r_B$ :

$$\mathcal{D}(v, r) = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 \omega_H^2} \frac{1}{v} \left( \frac{r_B}{r} \right)^3 \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\theta_0} \sin^3\theta' d\theta' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi'^2 \overline{W}^{(0)}(k, \theta', \varphi') d\varphi' \quad (23)$$

Отсюда видно, что  $\mathcal{D}(v, r) \sim r^{-3} v^{-1}$ .

Введем величину

$$U = \int_0^{\infty} k^2 dk \int_0^{\theta_0} \sin\theta' d\theta' \int_{-\pi}^{\pi} \overline{W}(r, k, \theta', \varphi') d\varphi'$$

которая представляет собой плотность энергии ленгмюровских колебаний. При  $r \gg r_B$

$$U = \frac{r_B}{r} U_0 \quad (24)$$

где  $U_0$  - плотность энергии колебаний при  $r = r_g$ . Из формулы (23) следует, что

$$D = A \left( \frac{r_g}{r} \right)^2 r_H^2 \omega_p \frac{v_{ph}}{v} \frac{U}{m n_c v^2}, \quad r_H = \frac{v}{\omega_H}$$

где  $A$  - численный коэффициент порядка единицы, зависящий от детального вида функции  $W_{\vec{k}}$ . В этом выражении можно выделить множитель

$$v = \omega_p \frac{v_{ph}}{v} \frac{U}{m n_c v^2}, \quad (25)$$

который имеет смысл эффективной частоты столкновений электронов с колебаниями /13/. Поэтому

$$D = A \left( \frac{r_g}{r} \right)^2 r_H^2 v \quad (26)$$

Обращает на себя внимание множитель  $(r_g/r)^2$ , которым последний результат отличается от обычной оценки для коэффициента замагниченной диффузии. Появление этого множителя обусловлено резкой зависимостью функции  $W_{\vec{k}}$  от угла  $\varphi'$ : при  $r \gg r_g$  функция  $W_{\vec{k}}$  отлична от нуля только при  $|\varphi'| \leq r_g/r$  (см. раздел 3).

С помощью метода усреднения по угловым переменным можно рассмотреть также эффекты, связанные с неупругими столкновениями. Не останавливаясь на промежуточных вычислениях (вполне аналогичных предыдущим), приведем только окончательный результат. Оказывается, что учёт неупругих столкновений приводит к появлению в правой части уравнения (22) нового слагаемого, которое имеет вид:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 d(v, r) \frac{\partial F}{\partial v}$$

где

$$d(v, r) = \left\langle \left\langle D_{vv} \right\rangle_{\varphi} - \frac{\left\langle D_{v\theta} \right\rangle_{\varphi}^2}{\left\langle D_{\theta\theta} \right\rangle_{\varphi}} \right\rangle_{\theta}$$

- "коэффициент диффузии" в пространстве скоростей. Угловые скобки в этой формуле имеют следующий смысл:

$$\langle \dots \rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots d\varphi, \quad \langle \dots \rangle_{\theta} = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \dots \sin\theta d\theta.$$

Связь между  $d$  и спектральной функцией  $W_{\vec{k}}$  можно найти с помощью равенства (15). Получающееся выражение очень громоздко, и мы не будем его выписывать. Отметим, что "коэффициент диффузии"  $d$  оказывается пропорциональным  $v^{-3} r^{-1}$  и может быть оценен по формуле

$$d = B v_{ph}^2 v \quad (27)$$

где  $B$  - численный множитель порядка единицы.

До сих пор мы считали, что функция  $W_{\vec{k}}$  в точности равна нулю при  $\theta' > \theta_0$ . Однако, во всяком реальном эксперименте имеется, по-видимому, некоторый отличный от нуля (хотя и малый) уровень колебаний и в области углов  $\theta' > \theta_0$ . Взаимодействуя с этими колебаниями, электроны будут рассеиваться в конус ухода и вылетать из ловушки. Соответствующие потери можно учесть, включая в правую часть уравнения (22) член  $-v_s F$ , где  $v_s$  - частота рассеяния электрона в конус ухода ( $v_s \ll v$ ). Поскольку фазовая скорость колебаний, возбуждаемых пучком, мала по сравнению со скоростью быстрых электронов, а плотность энергии этих колебаний убывает по радиусу пропорционально  $r^{-1}$  можно записать, что

$$v_s \sim r^{-1} v^{-3} \quad (28)$$

(напомним, что при  $v \gg v_{ph}$  частота столкновений электронов с колебаниями пропорциональна  $v^{-3}$ ). Таким образом, кинетическое уравнение, учитывающее диффузию электронов, их ускорение, а также рассеяние в конус ухода, имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r D \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 d \frac{\partial F}{\partial v} - v_s F \quad (29)$$

Сформулируем теперь граничные условия для уравнения (29). Конкретный вид функции  $F(v)$  при  $r = r_g$  (ниже мы будем использовать обозначение  $F(v, r_g) \equiv F_0(v)$ ) определяется процессами, происходящими в самом пучке. Однако, соображения, в точности аналогичные тем, которые были приведены в конце раздела 3, показывают, что функция  $F_0(v)$  не зависит от магнитного поля. Кроме того, на основании экспериментальных данных можно утверждать, что значения  $v$ , при которых функция  $F_0$  существенно отлична от нуля, малы по сравнению с окончательной величиной скорости, набираемой электронами в процессе ускорения.

Поэтому дальнейшие результаты слабо зависят от конкретного вида функции  $F_0$ . Для простоты мы положим  $F_0$  равным  $\frac{n_0}{4\pi v_0^2} \delta(v-v_0)$ , где  $n_0$  и  $v_0$  некоторые фиксированные величины, не зависящие от магнитного поля и определяемые параметрами пучка. Таким образом, мы будем пользоваться граничным условием

$$F(v, r_e) = F_0(v) = \frac{n_0}{4\pi v_0^2} \delta(v-v_0). \quad (30)$$

Величина  $n_0$  имеет смысл концентрации быстрых электронов вблизи от пучка, а  $v_0$  представляет собой скорость этих электронов.

Граничное условие при  $V=0$  может быть найдено следующим способом. Если скорость электрона сравнима с  $v_{ph}$ , то, как легко видеть из формулы (15), несмотря на анизотропию спектра колебаний, компоненты тензора  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$  отличны от нуля во всей области изменения угла  $\theta$ :  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Поэтому, если скорость электрона становится сравнимой с  $v_{ph}$ , то он быстро (в масштабе времени ускорения) рассеивается в конус ухода и покидает ловушку. Следовательно, функция  $F$  обращается в нуль при  $v \sim v_{ph}$ . Но так как  $v_{ph}$  мало по сравнению со скоростью быстрых электронов, это условие можно записать в виде:

$$F(0, r) = 0 \quad (31)$$

Граничные условия при  $r=R$  и  $v=\infty$  очевидны:

$$F(v, R) = 0 \quad (32)$$

$$F(\infty, r) = 0 \quad (33)$$

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решая уравнение (29) с граничными условиями (30)-(33), можно определить параметры горячей плазмы в объеме ловушки в любой момент времени. Мы ограничимся исследованием стационарного состояния, которое описывается уравнением:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 d(v, r) \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \mathcal{D}(v, r) \frac{\partial F}{\partial r} - \nu_s(v, r) F = 0 \quad (34)$$

Учитывая соотношения  $d(v, r) \propto v^{-3} r^{-1}$ ,  $\mathcal{D}(v, r) \propto v^{-1} r^{-3}$ ,  $\nu_s \propto v^{-3} r^{-1}$ , можно написать, что

$$d(v, r) = d_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^3 \frac{r_e}{r},$$

$$\mathcal{D}(v, r) = \mathcal{D}_0 \left(\frac{v_0}{v}\right) \left(\frac{r_e}{r}\right)^3,$$

$$\nu_s(v, r) = \nu_{s0} \left(\frac{v_0}{v}\right)^3 \left(\frac{r_e}{r}\right),$$

где  $d_0 \equiv d(v_0, r_e)$ ,  $\mathcal{D}_0 \equiv \mathcal{D}(v_0, r_e)$ ,  $\nu_{s0} \equiv \nu_s(v_0, r_e)$ . Введем, далее, новые переменные:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \varepsilon = \frac{v^2}{v_0^2}$$

которые представляют собой, соответственно, безразмерный радиус и безразмерную энергию. В этих переменных уравнение (34) и граничные условия (30)-(33) приобретают вид:

$$\frac{1}{\tau_a} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{\tau_b} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \rho} - \frac{1}{\tau_s} \frac{F}{\varepsilon} = 0 \quad (35)$$

$$F(\varepsilon, \frac{r_e}{R}) = \frac{n_0}{4\pi v_0^2} \delta(\varepsilon-1), \quad F(\rho, 0) = 0, \quad (36)$$

$$F(1, \varepsilon) = 0, \quad F(\rho, \infty) = 0.$$

Здесь  $\tau_a = (R/r_e)(4v_0^2/d_0)$ ,  $\tau_b = (R^2/\mathcal{D}_0)(R/r_e)^3$ ,  $\tau_s = \nu_{s0}^{-1} R/r_e$ . Физический смысл этих констант следующий:  $\tau_a$  представляет собой время, в течение которого энергия электрона в процессе ускорения изменяется на величину порядка единицы;  $\tau_b$  есть время диффузии электрона от оси ловушки до диафрагмы; наконец,  $\tau_s$  есть эффективное время рассеяния электрона в конус ухода.

Конечная энергия, набираемая быстрыми электронами в процессе ускорения, определяется временем их жизни в ловушке. Как было отмечено в разделе 2 (и как это формально отражено в уравнении (35)), существует два механизма потерь быстрых электронов: диффузионный уход на диафрагму (характерное время  $\tau_b$ ) и рас-

сеяние в конус ухода (характерное время  $\tau_s$ ). Величина  $\tau_D$  пропорциональна  $H^2$ , а  $\tau_s$  от  $H$  не зависит. Поэтому при рассмотрении эффекта нагрева в области слабых магнитных полей можно пренебречь потерями, связанными с рассеянием электронов в конус ухода и опустить последнее слагаемое в левой части уравнения (35):

$$\frac{1}{\tau_a} \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{\tau_D} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 0.$$

Полученное уравнение характерно тем, что из него выпадает плотность энергии колебаний  $U_0$ , т.к. константы  $\tau_a$  и  $\tau_D$  пропорциональны  $U_0$ . Решение этого уравнения может быть получено с помощью метода разделения переменных. Результат имеет вид:

$$F = \frac{n_0}{2\pi^2 v_0^3} \left(\frac{\rho R}{r_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_D}} \int_0^\infty dq \sin\left(q \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_D}}\right) \times$$

$$\times \sin\left(q \varepsilon \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_D}}\right) \frac{I_{3/4}(q \rho^2) I_{-3/4}(q) - I_{3/4}(q) I_{-3/4}(q \rho^2)}{I_{3/4}\left(q \frac{r_0^2}{R^2}\right) I_{-3/4}(q) - I_{3/4}(q) I_{-3/4}\left(q \frac{r_0^2}{R^2}\right)}, \quad (37)$$

где через  $I_{3/4}$  и  $I_{-3/4}$  обозначены функции Бесселя от мнимого аргумента.

В реальных экспериментах сама функция  $F$  не измеряется, а определяются только некоторые её интегральные характеристики, которые мы будем обозначать буквами  $Q$  и  $E$ :

$$Q = 8\pi^2 \int_{r_0}^R r dr \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} F v^2 dv, \quad (38)$$

$$E = \frac{\int_{r_0}^R r dr \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} F v^2 dv}{\int_{r_0}^R r dr \int_0^\infty F v^2 dv}. \quad (39)$$

Величина  $Q$  представляет собой энергию горячей плазмы, приходящуюся на единицу длины установки, а  $E$  - среднюю энергию горячих электронов<sup>x/</sup>. Вычисление  $Q$  и  $E$  по формулам (38) и (39)

x/ В работе /5/ величина  $Q$  называлась энергосодержанием плазмы, а  $E$  - температурой быстрых электронов.

приводит к следующему результату:

$$Q = A' \pi R_0^2 \frac{m n_0 v_0^2}{2} \left(\frac{\tau_D}{\tau_a}\right)^{1/4}, \quad (40)$$

$$E = B' \frac{m v_0^2}{2} \left(\frac{\tau_D}{\tau_a}\right)^{1/2}, \quad (41)$$

где  $A'$  и  $B'$  - численные константы порядка единицы, которые выражаются в виде некоторых сложных интегралов от функций Бесселя<sup>x/</sup>. Эти формулы можно представить в виде следующих оценок:

$$Q \sim m v_0^2 n_0 R^2 \sqrt{\frac{\omega_H R^2}{v_0 r_0}}, \quad (42)$$

$$E \sim m v_{ph} R \omega_H \frac{R}{r_0}. \quad (43)$$

Отсюда следует, что  $Q \sim R^3 H^{1/2}$ ,  $E \sim R^2 H$ . Такой вид зависимостей  $Q$  и  $E$  от  $R$  и  $H$  хорошо согласуется с результатами эксперимента /5/ для области слабых полей. Что же касается абсолютных значений  $Q$  и  $E$ , то они зависят от констант  $v_0$ ,  $n_0$  и  $v_{ph}$ , которые в настоящее время не могут быть определены теоретически. Соответствие с экспериментальными данными получается, если положить

$$v_0 \sim v_0,$$

$$n_0 \sim n_0, \quad (44)$$

$$v_{ph} \sim \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) v_0.$$

Оценки (44) представляются вполне разумными с точки зрения теории квазилинейной релаксации пучка в плазме /14/.

В экспериментах /5/ определялось также время диффузии электронов от пучка до дифрагмы. Оказалось, что эта величина пропорциональна  $H^2$  - в согласии с приведенной выше формулой для  $\tau_D$ . Используя экспериментально измеренное значение  $\tau_D$ , можно с помощью соотношения

$$\frac{U_0}{m n_0 v_0^2} \sim \frac{\omega_H^2 R^2}{v_0^2} \frac{1}{\omega_p \tau_D} \frac{v_0}{v_{ph}} \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \frac{n_c}{n_0} \quad (45)$$

x/ Можно, в принципе, найти точные значения  $A'$  и  $B'$ , но это не имеет особого смысла, т.к. сами величины  $\tau_a$  и  $\tau_D$  определены с точностью до множителей порядка единицы.

оценить плотность энергии колебаний вблизи от пучка. Подставляя в (45)  $\omega_n = 1,7 \cdot 10^{10}$  сек<sup>-1</sup>,  $\tau_D \sim 10^{-4}$  сек,  $R \sim 10$  см,  $v_g \sim 10^{10}$  см/сек,  $r_g \sim 1$  см,  $\omega_p \sim 5 \cdot 10^{10}$  сек<sup>-1</sup> (см. /5/) и учитывая оценки (44), получим

$$\frac{U_0}{m n_g v_g^2} \sim 1,$$

т.е. плотность энергии колебаний вблизи от пучка сравнима с плотностью энергии электронов пучка. Этот вывод хорошо согласуется с современными представлениями о механизме квазилинейной релаксации пучка /14/. При удалении от пучка плотность энергии колебаний убывает пропорционально  $r^{-1}$  (как это следует из (24)).

Зная  $U_0$ , можно оценить по формуле (25) частоту столкновений электронов с колебаниями в области пучка:

$$\nu_0 \equiv \nu(v_0, r_g) \sim 3 \cdot 10^{-3} \omega_p \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$$

( $\nu_0$  не следует путать с  $\nu_{s0}$ ). Частота столкновений при произвольных значениях  $r$  и  $v$  определяется из соотношения:

$$\nu = \nu_0 \frac{r_g}{r} \left( \frac{v_0}{v} \right)^3$$

Легко видеть, что для быстрых электронов частота столкновений мала по сравнению с пролетной частотой  $v/L$  (это обстоятельство использовалось в разделе 4).

Рассмотрим теперь уравнение (35) в области сильных магнитных полей, когда основным механизмом потерь электронов становится их уход через пробки. Сопоставление второго и третьего членов в уравнении (35) показывает, что этот механизм сравнивается с диффузионным при

$$\tau_D \tau_a \sim \tau_s^2,$$

или, иначе, при

$$H \sim H_0 = \frac{mc}{e} \frac{r_g}{R} \frac{v_0}{v_{s0}} \frac{V_{ph}}{R}$$

В области  $H > H_0$  время жизни быстрого электрона в ловушке определяется величиной  $\tau_s$ , которая не зависит от магнитного поля. Соответственно этому, не зависит от магнитного поля и средняя энергия быстрых электронов  $E$ :

$$E \sim \frac{m v_0^2}{2} \frac{\tau_s}{\tau_a} \quad (46)$$

Оценка (46) получается путем сравнения первого и третьего слагаемых в уравнении (35). Из соотношений (41) и (46) следует, что функция  $E(H)$  должна иметь вид, изображенный на рис.3а - в согласии с результатами эксперимента /5/. Если воспользоваться экспериментально измеренным значением  $E$  при больших  $H$ , то с помощью (46) можно оценить частоту рассеяния в конус ухода  $\nu_{s0}$ . Оказывается, что

$$\nu_{s0} \sim 10^{-2} \nu_0,$$

т.е. уровень колебаний в области углов  $\theta' > \theta_0$  примерно в 100 раз меньше уровня колебаний в области углов  $\theta' < \theta_0$ .

На основе уравнения (35) можно также показать, что при  $H \gg H_0$

$$Q \sim Q_0 \frac{H_0}{H} \quad (47)$$

где  $Q_0 \equiv Q(H_0)$ . Из сопоставления формул (40) и (47) видно, что функция  $Q(H)$  имеет максимум при  $H \sim H_0$ . Полученная нами форма функции  $Q(H)$  (рис.3б) хорошо согласуется с данными эксперимента /5/.

Причина уменьшения  $Q$  при больших  $H$  может быть объяснена следующим образом. В области  $H > H_0$  время диффузии превышает время рассеяния в конус ухода. Это означает, что быстрые электроны вылетают в пробки раньше, чем успевают достигнуть диафрагмы, т.е. радиус горячей плазмы  $R_k$  становится меньше радиуса диафрагмы  $R$ . Увеличение магнитного поля приводит к уменьшению  $R_k$  (т.к. коэффициент диффузии  $D$  пропорционален  $H^{-2}$ ). Поскольку, с другой стороны, величина  $Q$  пропорциональна  $E R_k^2$ , уменьшение  $R_k$  (при  $E = \text{const}$ ) вызывает соответствующее уменьшение  $Q$ .

В заключение резюмируем главные выводы, следующие из диффузионной модели нагрева. Прежде всего, диффузионная модель нагрева удовлетворительно объясняет наблюдавшийся экспериментально вид зависимостей  $Q(H, R)$  и  $E(H, R)$ . Далее, при разумных предположениях относительно свойств пучка как источника воли и частиц, диффузионная модель даёт правильные абсолютные значения  $Q$  и  $E$ . Наконец, эта модель позволяет понять многие качественные особенности эксперимента (например, пороговую зависимость эффекта нагрева от пробочного отношения, зависимость времени диффузии от магнитного поля, уменьшение

радиуса плазмы в области больших магнитных полей}.

Автор приносит глубокую благодарность Л.П.Закатову, А.Г.Плахову, Л.И.Рудакову и В.В.Шапкину за постоянный интерес к работе.

#### Л и т е р а т у р а

1. И.Ф.Харченко, Я.Б.Файнберг, Р.М.Николаев, Е.А.Корнилов, Е.И.Лученко, Н.С.Педенко. Конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Зальцбург, докл. CN -10/230. Ядерный синтез, дополнение. ч.3, стр.1101, 1961.
2. F.Alexeff, R.V.Neidigh, W.F.Peet, E.D.Shipley, Phys.Rev.Lett., 10, 273, 1963.
3. I.Alexeff, W.D.Jones, R.V.Neidigh, W.F.Peet and W.L.Stirling. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham, Report CN-21/102, 1965.
4. П.И.Блинов, Л.П.Закатов, А.Г.Плахов, Р.В.Чикин, В.В.Шапкин, ЖЭТФ, письма, 2, 426, 1965; ЖЭТФ, 52, 670, 1967.
5. Л.П.Закатов, А.Г.Плахов, Д.Д.Рютов, В.В.Шапкин, ЖЭТФ, 54, 1968.
6. L.D.Smullin, W.D.Getty. Conf.on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham, Report CN-21/194, 1965.
7. Р.А.Демирханов, А.К.Говорков, А.Ф.Попов, Г.А.Хорасанов. Конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Калем, CN -21/194, 1965.
8. Э.З.Тарумов, Ю.Л.Бакшаев, В.Л.Борзенко, В.С.Пенькина, В.И.Розанова. ЖЭТФ, 52, 49, 1967.
9. M.Seidl, P.Šunka. Research Report IPPCZ-81, Institute of Plasma Physics, CSSR, 1967.

10. Е.А.Корнилов, О.Ф.Ковник, Я.Б.Файнберг, И.Ф.Харченко. ЖТФ, 35, 1372, 1965.
11. А.Б.Михайловский. ЖТФ, 35, 1945, 1965.  
Е.Е.Ловецкий, А.А.Рухадзе. Ядерный синтез, 6, 9, 1966.
12. Я.Б.Файнберг. Атомная энергия, 11, 313, 1961.
13. Л.И.Рудаков, Л.В.Кораблев. ЖЭТФ, 50, 220, 1966.
14. А.А.Веденов. Сб. "Вопросы теории плазмы", т.3, стр.203, Москва, Госатомиздат, 1963.
15. Б.Б.Кадомицев. Сб. "Вопросы теории плазмы", т.4, стр.209, Москва, Госатомиздат, 1966.

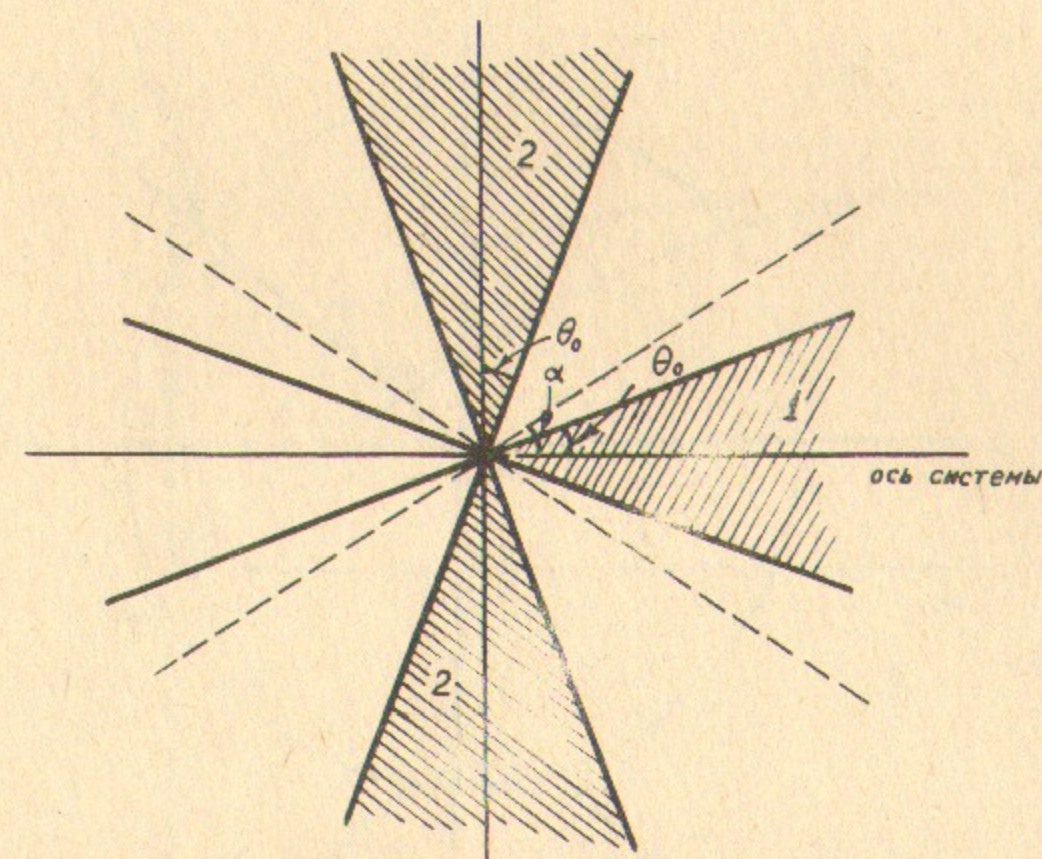


Рис. 1

Рис.1. Взаимодействие быстрых электронов с ленгмюровскими колебаниями, имеющими анизотропный спектр.

1 - область углов в пространстве волновых векторов, в которой возмущены ленгмюровские колебания;

2 - область углов в пространстве скоростей, в которой находятся электроны, взаимодействующие с ленгмюровскими колебаниями;  $\alpha$  - угол при вершине конуса ухода.



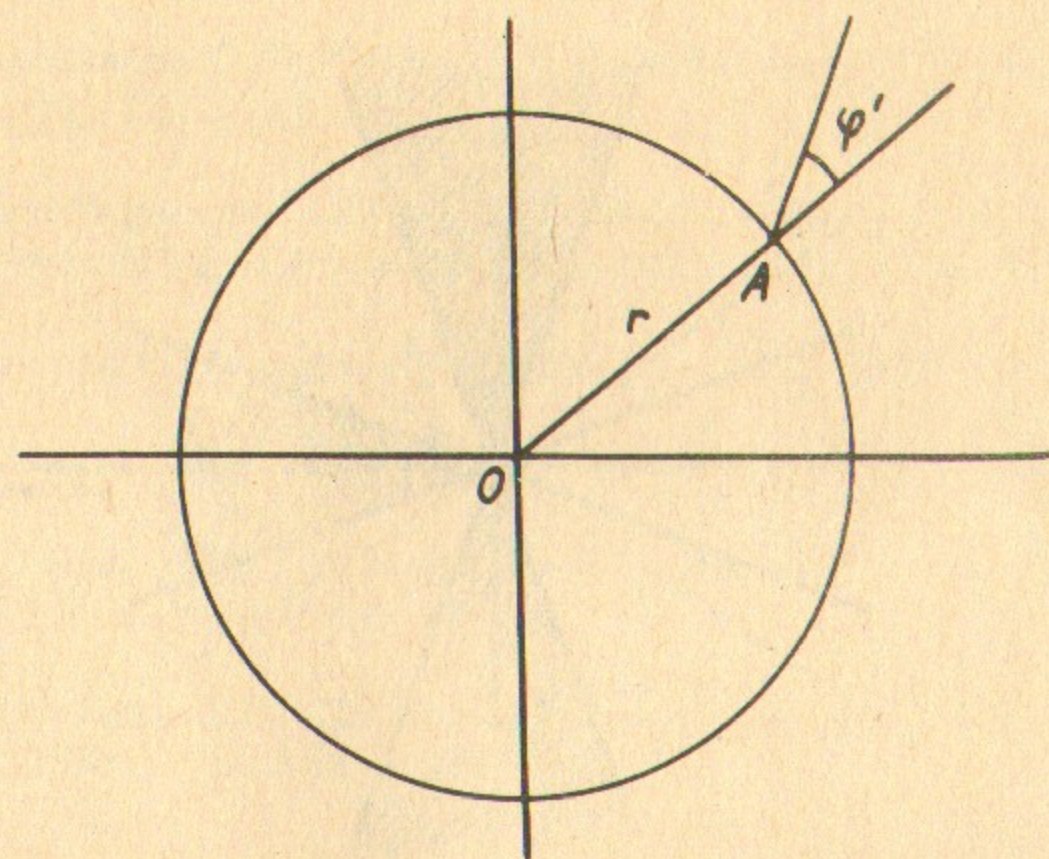


Рис. 2

Рис.2. Определение азимутального угла  $\varphi'$  в пространстве волновых векторов.

O - ось системы; A - точка наблюдения;  $r$  - радиус, проведенный от оси системы в точку наблюдения.

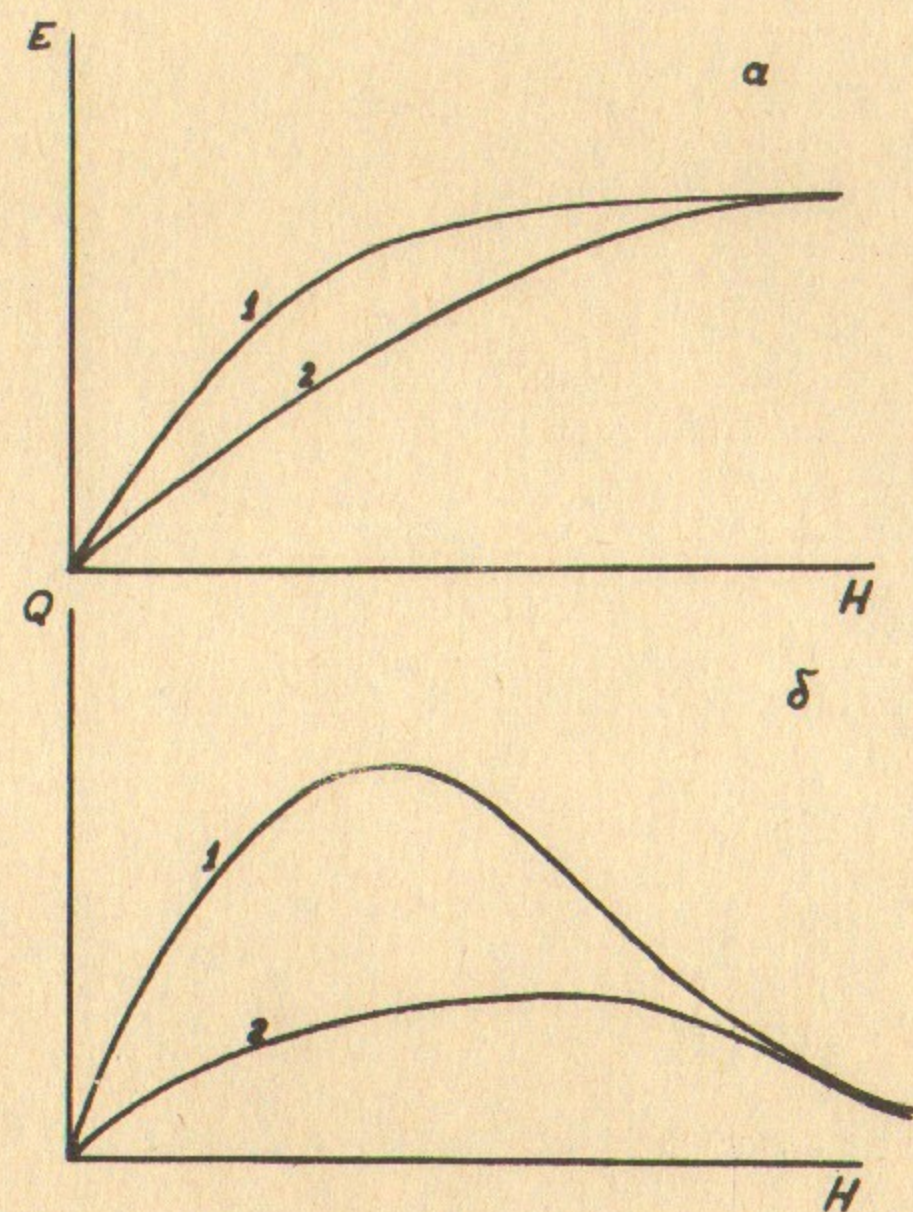


Рис. 3.

Рис.3. Зависимость средней энергии  $E$  и энергосодержания  $Q$  быстрых электронов от магнитного поля. Кривые 1 и 2 соответствуют двум различным радиусам диафрагм, причём  $R_1 > R_2$


Одобрено в печать 28.08.1987 г.

Подписано в печать 28.08.1987 г.

Уч. 2.0 гон. 300 экз.

Заказ № 243, бесплатно.

Отпечатано на ротационной машине в ЦНИИ ФН СО АН СССР.



---

Ответственный за выпуск Рютов Д.Д.

Подписано к печати 28.УШ.1968г.

Усл. 2,0 печ.л., тираж 300 экз.

Заказ № 245, бесплатно.

---

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР.