3

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 227

В.Е.Захаров, В.С.Львов
С.С.Старобинец

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ СПИНОВЫХ ВОЛН

Новосибирск
1968

В.Е.Захаров, В.С.Львов
С.С.Старобинец

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ СПИНОВЫХ ВОЛН

## А Н Н О Т А Ц И Я

В работе изучается неустойчивость волн конечной амплитуды в средах с затуханием. Подробно изучен случай неустойчивости одной монохроматической волны, а также неустойчивость пары волн. Полученные результаты используются для использования неустойчивостей в системах спиновых волн в ферромагнетике.

# ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается устойчивость монохроматических волн в нелинейных средах с дисперсией. Как известно /1/, наиболее сильные неустойчивости волн обуславливаются процессами трех волнового взаимодействия по закону сохранения,

$$\omega_{k'} = \omega_k + \omega_{k'-k} \tag{B.1}$$

Нас будет интересовать случай, когда эти процессы по каким-либо причинам несущественны. В этом случае главную роль играют четырехволновые процессы с законами сохранения

$$\omega_{k'} + \omega_{k''} = \omega_{k'+\varkappa} + \omega_{k''-\varkappa} \tag{B.2}$$

Здесь $k', k''$ - волновые вектора тех волн, неустойчивость которых мы изучаем, $k'+\varkappa, k''-\varkappa$ волновые вектора возмущений. Характер неустойчивости существенно зависит от того, является $\varkappa$ малым по сравнению с $k', k''$ или нет. При $\varkappa \sim k', k''$, эта неустойчивость является аналогом процессов (B.1). При $\varkappa \ll k', k''$ неустойчивость представляет собой спонтанное нарастание пространственно-временной модуляции исходных волн. Неустойчивость бегущей монохроматической волны в нелинейных средах без диссипации относительно процессов типа (B.2) была рассмотрена в /2.3/. В этих работах показано, что неустойчивыми могут быть ионнозвуковые волны в плазме, а также волны на поверхности жидкости. Частные типы "модуляционных" неустойчивостей рассматривались также для электромагнитной волны в нелинейных диэлектриках в работах /4,5-6/и для волн в плазме в работах/7,8/. Неустойчивость пары монохроматических волн кратко рассмотрена в работе / 6 /.

В перечисленных работах рассматривались среды без диссипации и считалось, что трехволновые процессы запрещены законами сохранения. В нашей работе основное внимание уделяется средам с диссипацией. Для них существует более общая причина, по которой трехволновые процессы несущественны. Действительно, для возбуждения волны необходимо скомпенсировать её затухание.

При этом оно компенсируется одновременно в некоторой области $k$ - пространства и наименьший порог будут иметь неустойчивости относительно возбуждений с волновыми векторами, лежащими именно в этой области $k$ - пространства. Трехволновые процессы к этому типу неустойчивостей не принадлежат.

Действительно, если волна в среде возбуждается с помощью создания отрицательного затухания в малой области $k$ — пространства, то наиболее опасными будут неустойчивости типа (В-2) с $k' = k''$ и достаточно малыми $\varkappa$. При параметрическом возбуждении пары волн волновой накачки с $k = k_p$ (например, "параллельная" накачка с $k_p = 0$ спиновых волн в ферромагните / 9 /).

$$k' + k'' = k_p \qquad \omega_{k'} + \omega_{k''} = \omega_p$$

и затухание почти скомпенсировано для всех $\varkappa$ , удовлетворяющих (В.2).

В первой части работы (§1 - §4) не конкретизируется вид нелинейной среды. Волновые процессы в ней мы описываем в рамках классического гамильтонова формализма. Динамическими переменными системы служат канонические нормальные переменные - комплексные амплитуды бегущих волн. Эти канонические переменные являются классическим аналогом бозе-операторов в пределе больших чисел заполнения.

В первом параграфе рассматривается неустойчивость бегущей монохроматической волны. Получено и исследовано выражение для инкремента неустойчивости в недиссипативной среде /(1-4), (1.7) и (1.10), в среде с диссипацией и в среде с отрицательным затуханием (активная среда( (3.18). В недиссипативной среде бегущая волна либо устойчива, либо ннеустойчива, эта неустойчивость имеет самофокусирующий характер и не имеет порога. В частном случае, когда в среде отсутствуют дальнодействующие взаимодействия (например, диполь-дипольное взаимодействие в ферромагнетиках) выражение для инкремента (1.10) совпадет с полученным ранее /5,6/. В диссипативной среде неустойчивость имеет высокий порог (1-14), в активной среде неустойчивость не имеет порога. Это связано с тем, что затухание волн в конечном состоянии скомпенсировано.

Далее в работе рассматривается случай, когда в нелинейной среде одновременно существуют две монохроматические волны. В такой системе кроме неустойчивостей, характерных для одной волны (§ 1), возникает неустойчивость нового типа, связанная с взаимодействием волн друг с другом. Мы будем полагать, что волны находятся в среде, в которой действует периодическая вынуждающая сила — волна накачки, компенсирующая их затухание. Это соответствует параметрическому механизму возбуждения волн, для которого существенны фазовые соотношения между накачкой и исходными волнами.

Теоретически и экспериментально подробно изучалось параметрическое возбуждение спиновых волн в ферромагнетиках/9/. Полем накачки в этом случае может быть электромагнитное поле, однородные или неоднородные колебания намагниченности, упругие волны. Другим примером параметрического возбуждения волн может служить вынужденное рассеяние света Мандельштама — Бриллюэна /10/, В работах /9,10/ были были рассмотрены условия возбуждения волн и стационарное состояние за порогом.

Во втором параграфе мы исследуем устойчивость двух параметрических возбужденных волн по отношению к процессам когерентного рассеяния (В-2) с большим изменением волнового вектора. Получено и исследовано выражение для критической амплитуды волн (2-12) при которой возникает неустойчивость. Оказывается, что она соответствует весьма незначительному относительному превышению над порогом возникновения исходных волн $\rho_{кр}$ :

$$\left(\frac{\eta}{S}\right)^2 \ll \rho_{кр} \ll \frac{\eta}{S} \qquad \text{(В-3)}$$

Здесь $\eta/S$ — отношение диссипативной и недиссипативной части функции описывающей четвертые взаимодействия. Часто оказывается так, что

$\eta/S \sim \gamma/\omega$ , где $\gamma$ и $\omega$ — затухание и частота исходных волн. Низкий порога неустойчивости (В-3) объясняется тем, что распад исходной пары волн происходит на пару волн, автоматически находящуюся в резонансном взаимодействии с накачкой, так что затухание волн в конечном состоянии скомпенсировано почти полностью.

В третьем и четвертом параграфах рассматривается модуляционная неустойчивость стоячей монохроматической волны, возбуждаемой параметрически. В третьем параграфе получаются динамические уравнения для медленно меняющихся амплитуд двух волн в диссипативной среде с накачкой. В частном случае одной волны в консервативной среде эти уравнения переходят в полученные ранее / 6 /. В четвертом параграфе линеаризованные уравнения для медленно меняющихся амплитуд применяются для анализа устойчивости системы двух волн. Получено и исследовано общее выражение для инкремента неустойчивости (4-3). При больших волновых векторах возмущения $\varkappa$ характер неустойчивости совпадает с исследованным в §2 при малых $\varkappa$ инкремент убывает как $\varkappa^2$ /(4.13) и (4.15)/, а при $\varkappa$ =0 система либо устойчива, либо находится в состоянии безразличного равновесия относительно изменения разности фаз исследуемых волн. Это говорит о том, что в задачах о неустойчивости волн принципиально важно учитывать пространственную неоднородность возмущения. Так же, как при больших $\varkappa$ (§2), исследуемая в §4 модуляционная неустойчивость начинается практически сразу же за порогом возбуждения исходной пары волн. По-прежнему, это связано с тем, что исходные волны распадаются на волны, чье затухание практически полностью скомпенсировано.

Кроме того, в четвертом параграфе исследована устойчивость стоячей монохроматической волны в недиссипативной среде. В отличие от случая бегущей волны, которая может быть и устойчивой, стоячая волна неустойчива всегда. Естественно, что эта неустойчивость не имеет порога, так как рассматривается среда без диссипации энергии. Получены и исследованы выражения для инкремента неустойчивостей /(4-18)-(4-23)/. Величины инкрементов для стоячей волны в недиссипативной среде оказывается существенно большими, чем в диссипативной среде с накачкой в аналогичных случаях.

В предыдущих параграфах проводилось общее исследование неустойчивости волн. Далее эти результаты применяются при рассмотрении неустойчивости спиновых волн в ферромагнетиках. Такйо выбор обусловлен, в частности тем, что спиновая система отличается весьма высоким уровнем нелинейности, так что амплитуды волн, при которых существенны нелинейные процессы, достигаются сравнительно просто. В пятом параграфе уравнения движения магнитного момента Ландау-Лифшица приводятся к каноническому виду. Это необходимо для того, чтобы в задаче о неустойчивости спиновых волн можно было воспользоваться общими результатами §1-§4. Преобразование, связывающее найденные канонические переменные с круговыми $M_{\pm} = M_x \pm i M_y$, является классическим аналогом преобразований Гольдштейна-Примакова /11/.

Энергия ферромагнетика, записанная в канонических переменных становится функцией Гамильтона. Для кубического и одноосного ферромагнетиков она рассматривается в Приложениях А и Б. Там же вычислен ряд функций, играющих важную роль в задаче о неустойчивости спиновых волн, рассмотренной в последнем, шестом параграфе.

Показано, что монохроматическая спиновая волна малой, но конечной амплитуды в ферромагнетике без диссипации неустойчива по отношению к появлению длиннопериодной модуляции её амплитуды. Эта неустойчивость имеет самофокусировочный характер, в ферромагнетике с затуханием она имеет высокий порог. В случае, когда магнитное поле внутри исталла мало, так что ферромагнетик близок к разбиению на домены, этот порог резко уменьшается для длинных спиновых волн. Это обстоятельство связано с дальнодействующим характером диполь-дипольного взаимодействия. Далее рассматривается неустойчивость пары волн, возбужденных параметрических (параллельной накачкой). Они становяися неустойчивыми, когда относительное превышение над порогом их возникновения составляет $10^{-4} \div 10^{-6}$. Получена величина инкремента этой неустойчивости и найдена область в которой он максимален.

## § 1. Неустойчивость бегущей монохроматической волны

1. Будем предполагать, что среда описывается с помощью нормальных переменных $a_k$ -комплексных амплитуд бегущих волн, а её гамильтониан имеет вид

$$H = \int \omega_k a_k a_k^* dk + \frac{1}{2} \int T_{k k_1 k_2 k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \times$$
$$\times \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \, dk \, dk_1 \, dk_2 \, dk_3 \qquad (1.1)$$

Здесь $\omega(k)$ – закон дисперсии волн. Обычно гамильтониан совпадает с энергией системы.

Функция $T_{kk_1k_2k_3}$ подчиняется очевидным условиям симметрии

$$T_{kk_1k_2k_3} = T_{k_1kk_2k_3} = T_{kk_1k_3k_2} = T^*_{k_2k_3kk_1} \qquad (1.2)$$

В случае, если гамильтониан содержит члены, кубичные по $a_k$, $a_k^*$, их следует исключить с помощью канонического преобразования, описанного в приложении $A$. От этих членов возникнут дополнительные вклады в функцию $T_{kk_1k_2k_3}$

Уравнения движения получаются варьированием гамильтониана по правилу

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta a_k^*} \qquad (1.3)$$

Здесь символ $\frac{\delta}{\delta a_k^*}$ обозначает вариационную производную. В результате варьирования получим

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i\int T_{kk_1k_2k_3} a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \times \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk_1 dk_2 dk_3 \qquad (1.4)$$

К этому уравнению необходимо добавить еще диссипативные члены. Их можно ввести, добавляя к частоте малую мнимую добавку $i\gamma_k$, а к функции $T$ – малую антиэрмитову добавку – $i\eta_{kk_1k_2k_3}$

Окончательно получим

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + (\gamma_k + i\omega_k) a_k = -i\int (T_{kk_1k_2k_3} - i\eta_{kk_1k_2k_3}) \times a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3}\, \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk_1 dk_2 dk_3 \qquad (1.5)$$

$\eta_{kk_1k_2k_3}$ подчиняется условиям симметрии (1.2).

В дальнейшем будем считать функцию $\eta_{kk_1k_2k_3}$ действительной и положительно определенной. В таком виде она описывает нелинейное затухание, пропорциональное квадрату амплитуды волны. В некоторых случаях нелинейное затухание зависит от более высоких степеней амплитуды, однако это не приводит к существенным изменениям результатов.

В ряде важных случаев оказывается, что

$$\frac{\eta}{T} \sim \frac{\gamma}{\omega} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.4), описывающее среду без диссипации, имеет точное решение

$$a_k^0 = a\, e^{-i\omega t}\, \delta(k-k_0) \tag{1.7}$$

$$\omega = \omega(k_0) + T_0 |a|^2 \tag{1.8}$$

$$T_0 = T(k_0, k_0, k_0, k_0)$$

Исследуем устойчивость волны (1.7) по отношению к малым возмущениям вида:

$$a_k = a_k^0 + \left[\alpha\, e^{-i\omega(k_0)t}\, \delta(k-k_0-\varkappa) + \alpha^* e^{i\omega(k_0)t}\, \delta(k-k_0+\varkappa)\right] e^{-i\Omega t} \tag{1.9}$$

Выбор возмущения в другом виде не приводит к новым результатам, так как произвольное возмущение можно представить в виде суперпозиции возмущений (1.9).

Подставляя (1.9) в уравнение движения (1.4), получим дисперсионное соотношение $\Omega(\varkappa)$ для волновых векторов $\varkappa$ :

$$\Omega(\varkappa) = \frac{\omega(k_0+\varkappa) - \omega(k_0-\varkappa) + 2|a|^2\left[G(\varkappa) - G(-\varkappa)\right]}{2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[\omega(k_0+\varkappa) - 2\omega(k_0) + \omega(k_0-\varkappa) + 2|a|^2\left(G(\varkappa)+G(-\varkappa)-T_0\right)\right]^2 -}$$

$$\overline{-|F(\varkappa)|^2|a|^4}$$

где $$G(\varkappa) = G^*(\varkappa) = T_{k_0+\varkappa,\, k_0,\, k_0+\varkappa,\, k_0}$$

$$F(\varkappa) = T_{\varkappa+k_0,\, k_0-\varkappa,\, k_0,\, k_0} \qquad (1.11)$$

В том случае, когда $\varkappa$ не мало по сравнению с $k_0$ , первое слагаемое под радикалом можно всегда обратить в ноль немного изменив $\varkappa$, если существует решение у уравнения:

$$\omega(k_0+\varkappa) + \omega(k_0-\varkappa) = 2\omega(k_0) \qquad (1.12)$$

При этом частота $\Omega_\varkappa$ приоьретает мнимую добавку $+i|F|\,|a|^2$ , что означает неустойчивость. Эта неустойчивость представляет четырехволновой процесс с законом сохранения энергии (1.12).

Нас главным образом будет интересовать случай $\varkappa \ll k_0$ Тогда функции $G(\varkappa)$ , $F(\varkappa)$ могут зависеть только от $\vec{\xi} = \frac{\vec{\varkappa}}{|\varkappa|}$ и (1.10) приобретает вид

$$\Omega_{\varkappa} = \frac{(\varkappa v)}{2} + |a|^2 \left[ G(\xi) - G(-\xi) \right] \pm$$

$$\pm \left[ \left( \varkappa^2 L(\xi) + |a|^2 T(\xi) \right)^2 - |a|^4 |F(\xi)|^2 \right]^{1/2} \qquad (1.13)$$

где $V = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$ – групповая скорость

$$L(\xi) = \frac{1}{2} \xi_\alpha \xi_\beta \left. \frac{\partial^2 \omega(k)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \right|_{k=k_0} \qquad (1.14)$$

$$T(\xi) = G(\xi) + G(-\xi) - T_0$$

Неустойчивость волны (1.7) возникает, если $\varkappa^2_{max}$ – большее из чисел

$$\frac{T(\xi) \pm |F(\xi)|}{L(\xi)} \quad \text{больше нуля} \qquad (1.15)$$

При этом $\varkappa^2_{max}$ – верхняя граница области неустойчивости; нижняя граница либо меньшее из этих чисел, если оно положительно, либо $0$. Максимальный инкремент неустойчивости пропорционален $|a|^2$. В связи с отсутствием диссипации рассмотренная неустойчивость не имеет порога.

В особенно простом случае, когда $F(\xi)$ и $T(\xi)$ не зависит от $\xi$, $F(\xi) = T(\xi) = T_0$ и

$$\Omega_{\varkappa} = (\varkappa \sigma) \pm \left[ 2\varkappa^2 L(\xi) T_0 |a|^2 + \varkappa^4 (L(\xi))^2 \right]^{1/2} \qquad (1.16)$$

Это выражение для аналогичной неустойчивости электромагнитных волн в нелинейной среде, а также для волн на поверхности жидкости получено ранее в работах /3,5,6/.

2. Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости бегущей монохроматической волны в диссипативной среде.

Стационарное решение (1.7) уравнения (1.5) можно осуществить, например, добавлением в правую часть (1.5) члена с вынуждающей силой

$$f_k = f_0 e^{i\omega t}\,\delta(k-k_0)$$

Эта ситуация может осуществиться для электромагнитных волн в кристалле. Вынуждающей силой будет служить мощная световая волна, для которой рассматриваемая нами волна есть вторая гармоника. Если частота основной волны лежит в области прозрачности, а частота второй гармоники находится вблизи полосы поглощения, то нелинейность и затухание следует учитывать только для неё.

Силой $f_k$ возбуждается волна (1.7) для которой

$$\mathrm{Re}\,\frac{f_0}{a} = 0 \qquad \mathrm{Im}\,\frac{f_0}{a} = \gamma + \eta|a|^2$$

$$\omega = \omega_{k_0} + T_0|a|^2$$

$$\eta = \eta_{k_0,k_0,k_0,k_0}$$

Анализ неустойчивости этой волны проводится так же, как и в предыдущем случае. Выражения для $\Omega_\varkappa$ имеют вид (1.13), (1.16) с дополнительным членом в правой части $i\gamma$. Это означает, что неустойчивость имеет порог, при котором мнимая часть выражений (1.13) или )1.16) равна $\gamma$.

В простейшем случае, когда $T(\xi)$ и $F(\xi)$ не зависят от $\xi$, а $L(\xi)T_0 < 0$ неустойчивость ранее всего достигается на поверхности в $\varkappa$ - пространстве, определяемой уравнением

$$\varkappa^2 = \frac{\gamma}{L(\xi)}$$

при пороговом значении амплитуды

$$a^2_{пор} = \frac{2\gamma}{|T_0|} \qquad (1.17)$$

3. Другим важным случаем является стационарная бегущая волна в среде с отрицательным затуханием (активная среда). Такая ситуация может быть осуществлена, например, в газовом лазере.

В этом случае рост амплитуды ограничивается нелинейным затуханием. В уравнении (1.5) будем считать, что

$$\gamma = -\gamma_0 + \varkappa^2 P(\xi)$$

$$P(\xi) = \frac{1}{2}\xi_\alpha \xi_\beta \left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right|_{k=k_0} \qquad (1.18)$$

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\varkappa}}{|\varkappa|} \qquad \vec{\varkappa} = \vec{k} - \vec{k}_0$$

Стационарное решение (1.5) имеет вид (1.7), где

$$|a_{k_0}|^2 = \frac{\gamma_0}{\eta}$$

Неустойчивость ищется по отношению к возмущениям (1.9), при этом

$$\Omega_{\varkappa} = (\varkappa v) + a^2\left[G(\varkappa) - G(-\varkappa)\right] + \\ + i\,|a_{k_0}|^2\left\{\eta + P(\xi)\frac{\varkappa^2}{|a_{k_0}|^2} \pm \right. \\ \left. \pm\left[-\left(L(\xi)\frac{\varkappa^2}{|a_{k_0}|^2} + T(\xi)\right)^2 + F^2(\xi) + \eta^2\right]^{1/2}\right\} \tag{1.19}$$

Отметим, что при $F=0$ и $T=0$ система либо устойчива, либо (при $\varkappa^2=0$ ) находится в состоянии безразличного равновесия по отношению к одновременному изменению фазы волны во всем пространстве. При $F\neq 0$ , $T\neq 0$ система может стать неустойчивой и эта неустойчивость не имеет порога. Достаточным условием неустойчивости является

$$\eta P + LT < 0$$

Ширина области неустойчивости и максимальное значение инкремента пропорциональны квадрату амплитуды $a^2$, с ростом $P(\xi)$ область неустойчивости сужается.

При $\eta/T \ll 1$ в области максимального инкремента выражение (1.19) переходит в (1.13) и не зависит от $\eta$.

## § 2. Неустойчивость двух волн (случай больших $\varkappa$).

Приступим к изучению системы, в которой возбуждены две монохроматические волны. Мы будем считать, что эти волны возбуждаются параметрически волной накачки. При этом в гамильтониане надо учесть взаимодействие с волной накачки, вводя член

$$W_{int} = \frac{1}{2}\int\left[h^*_{k_p}(t)\,V^*_{k_p,k}\,a_k\,a_{k_p-k} + \right. \\ \left. + h_{k_p}(t)\,V_{k_p,k}\,a^*_k\,a^*_{k_p-k}\right]dk \tag{2.1}$$

Здесь $h_{k_p}(t) = h_{k_p} e^{2i\omega_p t}$ – волна накачки с волновым вектором $k_p$. В дальнейшем для простоты будем считать накачку однородной $k_p = 0$, возбуждаемые волны в этом случае имеют волновые вектора $k_{1,2} = \pm k$. Случай $k_p \neq 0$ можно рассмотреть аналогичным образом.

Уравнения движения для двух волн $a_k$ и $a^*_{-k}$ имеют вид:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + (\gamma_k + i\omega_k) a_k = -i\int \left(T_{kk_1k_2k_3} - i\eta_{kk_1k_2k_3}\right)$$

$$\times\, a_{k_1} a^*_{k_2} a^*_{k_3}\, \delta(-k + k_1 - k_2 - k_3) + i h V_k C_k \times \tag{2.2}$$

$$\times\, dk_1\, dk_2\, dk_3$$

Здесь $h = h_0(t)$

Заметим, что начальная фаза накачки выбрана так, чтобы $hV$ была вещественной величиной.

Исследуем устойчивость стационарного состояния:

$$a_k^0 = \left[A\,\delta_{k-k_0} + B\delta_{k+k_0}\right] e^{-i\omega_k^{(0)} t} \tag{2.3}$$

где

$$\omega_k^{(0)} = \omega_{k_0} + \left(T_{k_0,k_0,k_0,k_0} + 2\,T_{k_0,-k_0,k_0,-k_0}\right)|A|^2$$

$$A = -iB^* \qquad |A|^2 = \frac{hV_A - \gamma_A}{\eta_{AA}}$$
$$V_A = V_{k_0} \tag{2.4}$$

Коэффициент $\eta_{AA}$ представляет собой нелинейное затухание волн $\pm k_0$

$$\eta_{AA} = \eta_{k_0, k_0, k_0, k_0} + 2\eta_{k_0, -k_0, k_0, -k_0} \tag{2.5}$$

В общем случае возмущение выбирается в виде:

$$a_k = a_k^0 e^{i\omega_k^{(0)} t} + \left[\alpha\,\delta(k - k_0 - \varkappa) + \beta(k + k_0 - \varkappa)\right] e^{-i\omega_p t - i\Omega t} + \left[\alpha^*\,\delta(k - k_0 + \varkappa) + \beta^*(k + k_0 + \varkappa)\right] e^{i\omega_p t - i\Omega t} \tag{2.6}$$

В этом параграфе рассматривается случай, когда $\varkappa$ не мало по сравнению с $k_0$. Тогда волны возмущения $\alpha(k_0 + \varkappa)$ и $\alpha^*(k_0 - \varkappa)$, на которые распадается волна $A(k_0)$, и волны $\beta(-k_0 - \varkappa)$ и $\beta^*(-k_0 + \varkappa)$, на которые распадается $B(-k_0)$, имеют сумму волновых векторов $\pm 2k_0$. Это означает, что они попадают в такую область $k$ - пространства, где затухание не скомпенсировано накачкой. Как показано в §1 такая неустойчивость имеет высокий порог, связанный с затуханием волн в конечных состояниях. Поэтому в случае больших $\varkappa$ достаточно рассматривать комбинированную неустойчивость волн $k_0$ и $-k_0$ относительно распада на волны ( $k_0+\varkappa$ ) и $-$ ( $k_0+\varkappa$ ), сумма волновых векторов которых равна нулю. Мы покажем, что такая неустойчивость имеет низкий порог, связанный с тем, что затухание волн $\alpha$ и $\beta^*$ почти полностью скомпенсировано накачкой.

Подставляя (2.6) в уравнения движения (2.2) и сохраняя в нем члены линейные по $\alpha$ и $\beta^*$, получим:

$$\alpha\left[\omega_{k_0+\varkappa}-\omega_p-\Omega+i\Gamma_\alpha+2\left(G(\varkappa)+R(\varkappa)\right)|A|^2\right]+$$

$$+\beta^*\left[hV_\alpha-\tilde{\eta}|A|^2-2iS(\varkappa)|A|^2\right]=0$$

$$\alpha\left[hV_\alpha-\tilde{\eta}|A|^2+2iS(\varkappa)|A|^2\right]- \tag{2.7}$$

$$-\beta^*\left[\omega_p-\omega_{k_0+\varkappa}-\Omega+i\Gamma_\beta-2\left(G(\varkappa)+R(\varkappa)\right)|A|^2\right]=0$$

где

$$V_\alpha=V_{k_0+\varkappa}$$

$$G(\varkappa)=T_{k_0+\varkappa,k_0;k_0+\varkappa,k_0}$$

$$R(\varkappa)=T_{k_0+\varkappa,-k_0,k_0+\varkappa,-k_0}$$

$$S(\varkappa)=T_{k_0+\varkappa,-(k_0+\varkappa),k_0,-k_0} \tag{2.8}$$

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta = \gamma_\alpha + \eta_{\alpha A} |A|^2$$

$$\eta_{\alpha A} = 2\left( \eta_{k_0+\varkappa, k_0, k_0+\varkappa, k_0} + \eta_{k_0+\varkappa, -k_0, k_0+\varkappa, -k_0} \right)$$

$$\tilde{\eta}_{\alpha A} = 2\, \eta_{k_0+\varkappa, -(k_0+\varkappa), k_0, -k_0}$$

Дисперсионное уравнение $\Omega(\varkappa)$ имеет вид:

$$\Omega = i\Gamma_\alpha \pm \left\{ \left[ \omega_{k_0+\varkappa} - \omega_p + 2\left( G(\varkappa) + R(\varkappa) \right) |A|^2 \right]^2 - 4 S^2(\varkappa) |A|^4 - \left( hV_\alpha - \tilde{\eta}_{\alpha A} |A|^2 \right)^2 \right\}^{1/2}$$

(2.9)

Наибольший инкремент (и наименьший порог) будут, если

$$\omega_{k_0+\varkappa} - \omega_p + 2\left( G(\varkappa) + R(\varkappa) \right) |A|^2 = 0$$

При не очень малых $\varkappa$ этому условию всегда можно удовлетворить. Максимальный инкремент задается формулой

$$\mathrm{Im}\,\Omega = \Gamma_\alpha - \sqrt{4 S^2(\varkappa)|A|^4 + \left( hV_\alpha - \tilde{\eta}_{\alpha A} |A|^2 \right)^2}$$

(2.10)

Из условия $\mathrm{Im}\,\Omega = 0$ найдем уравнение для критической амплитуды $|A|^2_{крит}$, при которой возникает неустойчивость

$$\left[\gamma_A - h(V_A - V_\alpha)\right]^2 - \gamma_\alpha^2 + 2\left\{\left[\gamma_A - h(V_A - V_\alpha)\right](\eta_{AA} - \tilde{\eta}_{\alpha A}) - \right.$$

$$\left. - \gamma_\alpha \eta_{\alpha A}\right\}|A|^2_{крит} + \left[(\eta_{AA} - \tilde{\eta}_{\alpha A})^2 - \eta_{\alpha A}^2 + 4S^2(\alpha)\right]|A|^4_{кр} =$$

$$= 0 \qquad (2.11)$$

В случае $S(\varkappa) = 0$, когда отсутствует нелинейное взаимодействие между волнами $\pm K_0$ и $\pm(K_0 + \varkappa)$ уравнение (4.12) не имеет решения ни при каких вещественных $|A|^2$ Это означает, что при $S = 0$ система из двух волн сохраняет устойчивость при сколь угодно большой амплитуде накачки. Физически это обусловлено тем, что исходные волны вносят такое большое затухание во все остальные волны, которое не может быть скомпенсировано накачкой. Так происходит потому, что собственное нелинейное затухание $\eta_{AA}$ (2.5) всегда меньше нелинейного затухания $\eta_{\alpha A}$ (2.8), вносимого в другие волны. При исследовании этого уравнения мы воспользуемся предположением $\eta/S \ll 1$. В простейшем случае, когда все входящие в уравнение (2.10) величины не зависят от $\varkappa$, т.е. $V_A = V_\alpha$, $\gamma_A = \gamma_\alpha$ $2\eta_{AA} = \eta_{\alpha A} + \tilde{\eta}_{\alpha A}$, критическая амплитуда равна:

$$|A|^2_{крит} = \frac{\gamma_A \eta_{AA}}{2S^2} \qquad (2.12)$$

Практически формула (2.11) будет справедливл при некотором отличии $V_\alpha$ от $V_A$, таким что

$$(2.13)$$

В другом предельном случае, когда

$$\frac{V_A - V_\alpha}{V_A} \gg \left(\frac{\eta_{AA}}{S}\right)^2 \qquad (2.14)$$

Критическая амплитуда оказывается равной

$$|A|^2_{крит} = \frac{\gamma_A}{S}\left(\frac{V_A - V_\alpha}{2V_A}\right)^{1/2} \qquad (2.15)$$

Введем относительное превышение накачки над затуханием

$$\rho = \frac{hV - \gamma}{\gamma} = \frac{\eta_{AA}|A|^2}{\gamma} \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.11) следует, что пороговое значение $\rho$, при котором возникает неустойчивость пары волн

$$\rho_{крит} = \frac{\eta^2_{AA}}{2S^2} \sim \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \qquad (2.17)$$

Это весьма малая величина и практически всегда можно считать, что $\rho \gg \rho_{крит}$. Если еще при этом выполняется неравенство

$$\rho \gg \frac{\gamma}{\omega}\left(\frac{V_A - V_\alpha}{2V_A}\right)^{1/2}$$

то можно пренебречь зависимостью накачки от $\varkappa$. После этого выражения для инкремента приобретает весьма простой вид

$$\mathrm{Im}\,\Omega = \frac{2S^2(\varkappa)|A|^4}{\gamma} \sim \gamma\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \rho^2 \qquad (2.18)$$

Заметим, что в случае малых $\varkappa$ возмущения с волновыми векторами $k_0-\varkappa$ и $-k_0+\varkappa$ также попадают в область влияния накачки, поэтому их также необходимо учитывать. Это будет сделано в следующих параграфах.

## § 3. Уравнения для медленно-меняющихся амплитуд

Задачу о неустойчивости двух параметрически возбужденных волн при малых $\varkappa$ в принципе можно исследовать методом, использованным в § 2. Однако, получающиеся уравнения для $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*$ мало наглядны и трудны для анализа. В важном частном случае, когда функции $G(\varkappa)$, $R(\varkappa)$, $S(\varkappa)$ и $F(\varkappa)$ допускают предельный переход при $\varkappa \to 0$, задачу о неустойчивости двух волн можно сформулировать более прозрачно. Для того нужно получить уравнения для волн огибающих, что и будет сделано в этом параграфе.

В уравнениях (1.5) перейдем к новым переменным

$$a(k) = \left[ A(\varkappa-k_0) + B(\varkappa+k_0)\right] e^{-i\omega(k_0)t} \qquad (3.1)$$

Будем рассматривать только волны, у которых К сосредоточены вблизи $\pm k_0$, так что функции $A(\varkappa)$ и $B(\varkappa)$ отличны от нуля при $|\varkappa| \ll k_0$.

Тогда

$$\frac{\partial A_\varkappa}{\partial t} + \left(\gamma_k + i\left(\omega_{k_0+\varkappa} - \omega_{k_0}\right)\right) A_\varkappa = -ihV(\varkappa) B^*_{-\varkappa} -$$

$$-(\eta_1 + iT_0)\int A^*_{\varkappa_1} A_{\varkappa_2} A_{\varkappa_3}\, \delta(\varkappa+\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3)\, d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\varkappa_3 -$$

$$-\ 2(\eta_2 + iR_0)\int B^*_{\varkappa_1} B_{\varkappa_2} A_{\varkappa_3}\, \delta(\varkappa+\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3)\, \times$$

$$\times\, d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\varkappa_3$$

$$\frac{\partial B_{\varkappa}}{\partial t} + \left[\gamma_k - i\left(\omega_{k_0+\varkappa} - \omega_{k_0}\right)\right] B_{\varkappa} =$$

$$= -i h V(\varkappa) \overset{*}{A}_{-\varkappa} - \left(\eta_1 + i T_0\right) \int \overset{*}{B}_{\varkappa_1} B_{\varkappa_2} B_{\varkappa_3} \times$$

$$\times\, \delta(\varkappa + \varkappa_1 - \varkappa_2 - \varkappa_3)\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2\, d\varkappa_3 -$$

$$-2\left(\eta_2 + i R_0\right) \int \overset{*}{A}_{\varkappa_1} A_{\varkappa_2} B_{\varkappa_3}\, \delta(\varkappa + \varkappa_1 - \varkappa_2 - \varkappa_3) \times$$

$$\times\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2\, d\varkappa_3$$

В уравнениях (3.2) использовано существенное предположение о непрерывности коэффициентов $W_{k_1, k_2, k_3, k_4}$ как и прежде:

$$T_0 = W_{k_0, k_0, k_0, k_0} \tag{3.3}$$

$$R_0 = W_{k_0, -k_0, k_0, -k_0}$$

Для малых $\varkappa$ , получим

$$\omega(k_0+\varkappa)-\omega(k_0) = \vec{\varkappa}\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}$$

$$V_\varkappa = V_0 - \frac{1}{2}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\left|\frac{\partial^2 V_\varkappa}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\right|_{k=k_0} \tag{3.4}$$

Здесь мы предположили, что волны с $k = \pm k_0$ возбуждаются первыми, так что функция $V_\varkappa$ максимальна при $\varkappa = 0$ . Используя (3.3) и )3.4) перейдем в (3.2) к $r$ - представлению по формулам:

$$A_\varkappa = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int A(r)e^{-i\varkappa r}dr$$

$$A(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int A_\varkappa e^{i\varkappa r}d\varkappa \tag{5.5}$$

Тогда уравнения для медленно меняющихся амплитуд
* $A(r)$ и $B(r)$ имеют вид:

$$i\left[\frac{\partial A}{\partial t}+V\frac{\partial A}{\partial z}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2 A}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=$$

$$=-i\left[\gamma+(2\pi)^3\left(\eta_1|A|^2+2\eta_2|B|^2\right)\right]A+$$

$$+\left(hV_0+\frac{h}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)B^*+$$

$$+(2\pi)^3\left[T_0|A(z)|^2A(z)+2R_0|B(z)|^2A(z)\right]$$

$$i\left[\frac{\partial B(z)}{\partial t}-V\frac{\partial B}{\partial z}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2 B}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=$$

$$=-i\left(\gamma+(2\pi)^3\left(\eta_1|B|^2+2\eta_2|A|^2\right)\right)B+ \qquad (3.6)$$

$$+(2\pi)^3\left[2R_0|A(z)|^2+T_0|B(z)|^2\right]B(z)+$$

$$+\left(hV_0+\frac{h}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)A^*$$

Полагая $B=0$, получим уравнение для одной волны. В консервативной среде без накачки оно имеет вид:

$$i\left[\frac{\partial A(z,t)}{\partial t}+\vec{V}\,\frac{\partial A(z,t)}{\partial z}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=(2\pi)^3T_0|A|^2A(z,t)$$

Это уравнение применялось ранее в задачах об устойчивости электромагнитных волн в диэлектрике /6/ и волн на поверхности жидкости /3/. В уравнениях (2.5) перейдем от комплексных амплитуд $A(z)$, $B(z)$ к вещественным переменным $a$, $b$,

$$A(z)=a(z)\,e^{i\Phi(z)}$$
$$B(z)=b(z)\,e^{i\Psi(z)} \qquad (3.7)$$

имеющим смысл амплитуд и фаз волн огибающих. Тогда

$$\frac{1}{2}\biggl(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial z}\biggr)a^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\biggl(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\biggr)=$$

$$=\Bigl[\gamma+(2\pi)^3\bigl(\eta_1 a^2+2\eta_2 b^2\bigr)\Bigr]a^2-ab\,hV_0\sin(\varphi+\psi)-$$

$$-\frac{h}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\biggl[\sin(\varphi+\psi)\biggl(a\frac{\partial^2 b}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-ab\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\biggr)+$$

$$+\cos(\varphi+\psi)\biggl(2a\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}+ab\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\biggr)\biggr]$$

$$\biggl(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{U}\frac{\partial}{\partial z}\biggr)\varphi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}-\qquad(3.8)$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\biggr)=-(2\pi)^3\bigl[T_0a^2+2R_0b^2\bigr]-$$

$$-hV_0\cos(\varphi+\psi)\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}\frac{h}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\biggl[\cos(\varphi+\psi)\times$$

$$\times\biggl(\frac{\partial^2 b}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-b\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}\biggr)+$$

$$+\sin(\varphi+\psi)\biggl(2\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}+b\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\biggr)\biggr]$$

Уравнения для амплитуды $b$ и соответствующей фазы $\psi$ получаются из (3.8) заменой

$$V \rightarrow -V \qquad a \rightarrow b \qquad \psi \rightarrow \Phi$$

В стационарном состоянии

$$a_0^2 = b_0^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{hV_0 - \gamma}{\eta_1 + 2\eta_2} \tag{3.9}$$

$$\sin(\varphi + \psi) = -1$$

$$\eta_1 = \eta_{k_0, k_0, k_0, k_0} \qquad \eta_2 = \eta_{k_0, -k_0, k_0, -k_0}$$

$$\eta_1 + 2\eta_2 = \eta_{AA} \qquad 2\eta_2 = \tilde{\eta}_{A\alpha}$$

$$\eta_{A\alpha} = \eta_{AA} + \tilde{\eta}_{A\alpha} \tag{3.10}$$

В следующем параграфе мы исследуем устойчивость решения (5.9) по отношению к малым возмущениям амплитуды и фазы волн $a$ и $b$ :

$$a + b = 2a_0 + \alpha_+ \qquad a - b = \alpha_-$$

$$\varphi + \psi = -\frac{\pi}{2} + \varphi_+ \qquad \varphi - \psi = \varphi_0 - \psi_0 + \varphi_- \tag{3.11}$$

Для этого необходимо линеаризовать уравнения (3.8):

$$\left(\frac{\partial \alpha_+}{\partial t} + v\frac{\partial \alpha_-}{\partial \tau}\right) + a\hat{L}\varphi_+ = -2\left[hV_0 - \gamma - \frac{h\hat{p}}{2}\right]\alpha_+$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_-}{\partial t} + v\frac{\partial \alpha_+}{\partial \tau}\right) + aL\varphi_- = -2\left[\gamma + (2\pi)^3 2a^2\eta_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{h\hat{p}}{2}\right]\alpha_-$$

$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi_-}{\partial \tau} - \frac{1}{a}\hat{L}\alpha_+ = -(2\pi)^3 2a\,(T_0 + 2R_0)\alpha_+^-$$

$$-\left(2hV_0 + h\hat{p}\right)\varphi_+$$

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial t} + v\frac{\partial \varphi_+}{\partial \tau} - \frac{1}{a}\hat{L}\alpha_- = -(2\pi)^3\cdot 2a\,(T_0 - 2R_0)\alpha_-^+$$

$$\pm h p \varphi_-$$

(3.12)

В этих уравнениях $\vec{v} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{\tau}}$ групповая скорость волн с $K = \pm K_0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \right| \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \tag{3.13}$$

Анализ линеаризованных уравнений (3.12) проводится в следующем параграфе.

## § 4. Неустойчивость стоячей монохроматической волны

Исследование неустойчивости двух встречных монохроматических волн с $K = \pm K_0$ существенно усложняется из-за того, что при малых $\vec{\varkappa}$ необходимо одновременно учитывать процессы распада каждой из волн (§ 1) и комбинированную неустойчивость (§ 2). Поэтому дисперсионное уравнение для $\Omega$, полученное из (3.12) оказывается, вообще говоря, четвертого порядка.

Мы исследуем его в двух важных случаях - консервативной среды, когда оно сводится к биквадратному, и при малом превышении над порогом параметрической неустойчивости, когда его можно свести к квадратному.

## 1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТОЯЧЕЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ МАЛОМ ПРЕВЫШЕНИИ ПОРОГА

Здесь мы будем считать, что превышение над порогом $\rho$ :

$$\rho = \frac{hV_0 - \gamma}{\gamma} \ll 1$$

Тогда стационарная амплитуда волн (3.9) мала и нелинейное затухание $(2\pi)^3 \eta_{AA} a^2 = hV_0 - \gamma \ll \gamma$ .
Важно то, что уравнение (3.22) оказываются резко несимметричными: второе и четвертое уравнения - для разности амплитуд $\alpha_-$ и суммы фаз $\varphi_+$ - обладают большим запасом устойчивости $\sim 2\gamma$ . "Устойчивость" первого уравнения - для суммы амплитуд - и третьего - для разности фаз - существенно меньше, она связана с небольшим превышением над порогом и со слабой зависимостью порога возбуждения волн от $k$ .

Физическая причина этого понятна - наиболее сильно взаимодействует с накачкой пары волн с равной амплитудой и со строго определенной суммой фаз (см. 3.9). Поэтому возмущения, приводящие к появлению разности амплитуд и изменению суммы фаз волн, ухудшают взаимодействие с накачкой и быстро затухают. По отношению к возмущениям суммы амплитуд $\alpha_+$ разности фаз $\varphi_-$ -, не изменяющим взаимодействия с накачкой, система параметрических волн при бесконечно малом превышении над порогом находится в безразличном равновесии и потому легко становится неустойчивой. Роль "пассивных" переменных $\alpha_-$ и $\varphi_+$ сводится к тому, что через них осуществляется связь между "безразличными" переменными $\alpha_+$ и $\varphi_-$, приводящая к интересующей нас неустойчивости.

Для получения её инкремента в уравнениях (3.12) можно выбросить производные по времени от "пассивных" переменных $\alpha_-$ и $\varphi_+$ и с той же точностью (по параметру $\rho \ll 1$ ) считать что

$$\gamma + 2(2\pi)^3 a^2 \eta_1 + \frac{h\hat{\rho}}{2} \simeq \gamma$$

$$hV_0 + h\hat{\rho} \simeq \gamma$$

Тогда

$$\left(-i\Omega + 2(hV_0 - \gamma) + hp\varkappa^2\right)\alpha_+ =$$
$$= a\varkappa^2 L\varphi_+ - i(\varkappa v)\alpha_- \tag{4.1}$$
$$(-i\Omega - hp\varkappa^2)a\varphi_- = -Q_-\alpha_- - i(\varkappa v)a\varphi_+$$

$$\alpha_- = \frac{1}{2\gamma}\left[\varkappa^2 L a\varphi_- - i(\varkappa v)\alpha_+\right]$$
$$\varphi_+ = \frac{1}{2\gamma}\left[-Q_+\alpha_+ - i(\varkappa v)a\varphi_-\right] \tag{4.2}$$

где
$$\varkappa^2 L = \frac{1}{2}\varkappa_\alpha\varkappa_\beta\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}$$
$$Q_\pm = \varkappa^2 L(\xi) + (2\pi)^3 a^2(T_0 \pm 2R_0)$$

Подставляя (4-2) в (4-1), получаем систему двух линейных однородных уравнений для $\alpha_+$ и $\varphi_-$ –, имеющую ненулевое решение, если

$$\Omega = -i\left\{(2\pi)^3 a^2\eta_{AA} + \varkappa^2 hP + \right.$$
$$+\frac{1}{2\gamma}\left[(\varkappa v)^2 + L\varkappa^2\left(L\varkappa^2 + 2(2\pi)^3 T_0 a^2\right)\right] \pm$$
$$\pm\left[\frac{1}{4}(2\pi)^3 a^2\left(\eta_{AA} + \frac{4\varkappa^2 L R_0}{\gamma}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(\varkappa v)^2}{\gamma^2}\varkappa^2\left(\varkappa^2 L + 2(2\pi)^3 T_0 a^2\right)\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

Следует ожидать, что неустойчивость будет развиваться в основном для волновых векторов, лежащих вблизи поверхности

$$\omega(k_0+\varkappa) = \omega(k_0) .$$

Для $\varkappa \ll k_0$ можно разложить это выражение в ряд по $\varkappa$. Получим

$$(v_{гр}\varkappa) + L\varkappa^2 = 0 \qquad (4.4)$$

Для весьма малых $\varkappa$ это уравнение означает, что вектор $\varkappa$ "почти перпендикулярен" вектору $V_{гр}$ и следовательно, скалярное произведение ( $\varkappa v$ ) является наиболее чувствительной по отношению к изменению направления $\varkappa$ величиной в уравнении (4-3). Будем искать максимальный инкремент, варьируя выражение (4.3) по величине ( $\varkappa v$ ); при варьировании величину $L\varkappa^2$ будем считать неизменной. Получим в результате, что максимальный инкремент $\gamma_{max}$ достигается на поверхности в $\varkappa$ - пространстве, определяемой уравнением

$$(\varkappa v)^2(\varkappa^2 L)\left(\varkappa^2 L + 2T_0(2\pi)^3 a^2\right) = (L\varkappa^2)^2\left(L\varkappa^2 + 2\cdot(2\pi)^3 T_0 a^2\right)^2 - \frac{1}{4}(2\pi)^6 a^4\left(\gamma\eta_{AA} + 4\varkappa^2 L R_0\right)^2 \qquad (4.5)$$

и задается выражением

$$\gamma_{max} = -(2\pi)^3 a^2 \eta_{AA} - hP\varkappa^2 + \frac{1}{8}\,\frac{(2\pi)^6 a^4\left(\eta_{AA} + \frac{4\varkappa^2 L R_0}{\gamma}\right)^2}{L\varkappa^2\left(L\varkappa^2 + 2T_0(2\pi)^3 a^2\right)} \qquad (4.6)$$

При достаточно больших $\varkappa$ в (4.6) можно пренебречь всеми членами, содержащими $a^2$. Тогда условие (4.5) переходит в (4.4). Считая, что

$$|L\varkappa^2| > |(2\pi)^3 a^2 T_0|$$

$$|L\varkappa^2| > \left|\frac{\gamma \eta_{AA}}{R_0}\right| \tag{4.7}$$

получаем

$$\nu_{max} = \frac{1}{8}\,\frac{\left[4R_0(2\pi)^3 a^2\right]^2}{\gamma} - (2\pi)^3 a^2 \eta_{AA} - LP\varkappa^2$$

Отсюда видно, что неустойчивость имеет порог. При $P=0$, когда порог возбуждения волн не зависит от $K$, получим

$$\rho_{пор} = \frac{(2\pi)^3 a^2_{пор}\,\eta_{AA}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_{AA}}{R_0}\right)^2 \simeq \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \tag{4.8}$$

и инкремент не зависит от $\varkappa$. При $P \neq 0$ неустойчивость исчезает при очень больших $\varkappa$.

При $\rho \gg \rho_{пор}$ инкремент нарастания $\nu_{max}$ становится пропорциональным $\rho^2$:

$$\nu_{max} = 2\gamma\left(\frac{R_0}{\eta_{AA}}\rho\right)^2 \simeq \gamma\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \rho^2 = \frac{2R_0^2 a^4}{\gamma} \tag{4.9}$$

а второе из условий (4.7) автоматически следует из первого.

Действительно, считая

$$L\varkappa^2 \sim \omega\left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2, \quad \frac{\eta}{T_0} \simeq \frac{\eta}{R_0} \simeq \frac{\gamma}{\omega}$$

получим вместо (6.9)

$$\frac{\varkappa^2}{k_0^2} \gg \rho \qquad \frac{\varkappa^2}{k_0^2} \gg \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2$$

Заметим, что эта неустойчивость есть не что иное как неустойчивость пары волн, описанная в § 2. Действительно, если $S(\varkappa)$ имеет предел при $\varkappa \to 0$, то $S(\varkappa) \to R_0$ и формулы (4.8) и (4.9) переходят в формулы (3.17) и (2.18).

В случае малых $\varkappa$, когда

$$\left|(2\pi)^3 a^2 T_0\right| > L\varkappa^2 > \left|\frac{\gamma\eta_{AA}}{R_0}\right| \tag{4.10}$$

или

$$\rho > \frac{\varkappa^2}{k_0^2} > \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2$$

выражения (4.7) и (4.8) справедливы, если отсутствует самофокусировочная неустойчивость одной волны, т.е. если

$$L\varkappa^2 T_0 > 0$$

Тогда максимальный инкремент

$$\nu_{max} = (2\pi)^3 a^2 \frac{R_0^2}{T_0} \frac{L\varkappa^2}{\gamma} \sim \gamma\rho\left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \tag{4.11}$$

достигается при

$$\frac{(\varkappa v)^2}{L\varkappa^2} = (2\pi)^3 \cdot 2T_0 a^2 \left[ 1 - \frac{R_0^2}{T_0^2} \right] \tag{4.12}$$

Наконец, при малых $\varkappa$ (4.10) в случае, когда одна волна имеет неустойчивость самофокусировочного типа

$$T_0 L \varkappa^2 < 0$$

из (6.3) видно, что максимальный инкремент достигается при $\vec{\varkappa}\vec{v} = 0$ и

$$\nu_{max} = \frac{(2\pi)^3 a^2}{\gamma} \left\{ |T_0 L\varkappa^2| + |2R_0 L\varkappa^2| \right\} \simeq \tag{4.13}$$

$$\simeq \gamma \rho \left(\frac{\varkappa}{k_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2$$

Таким образом, при больших $\varkappa$ неустойчивость имеет чисто "комбинированный" характер, а её инкремент (4.9) определяется только параметром $R$. При уменьшении $\varkappa$ в случае, когда самофокусировка одной волны отсутствует ( $T_0 L\varkappa^2 > 0$ ), неустойчивость сохраняет свой "комбинированный" характер, однако её инкремент (4.11) зависит уже и от $T_0$. Чисто "самофокусировочная" неустойчивость с инкрементом: зависящим только от $T_0$ наблюдаться не может. Это связано с тем, что её инкремент максимален в поперечном направлении $\vec{\varkappa} \perp \vec{v}$, когда велика и "комбинированная" неустойчивость. Изученные в этом параграфе неустойчивости существуют при любых соотношениях между параметрами вещества $L\varkappa^2$, $T_0$, $R_0$, они носят универсальный характер. Неустойчивость практически не имеет порога. При $\frac{\varkappa^2}{K^2} \ll \rho$ максимальный инкремент пропорционален $\rho \frac{\varkappa^2}{K^2}$; когда $\frac{\varkappa^2}{K^2} \gg \rho$ величина инкремента выходит на плато (по $\varkappa^2$ ) и $\nu_{max} \sim \rho^2$. При дальнейшем увеличении $\varkappa$ если $\rho \neq 0$ инкремент снова начинает уменьшаться и при фиксированном превышении над порогом $\rho$ область неустойчивости ограничена по $\varkappa^2$.

## 2. Неустойчивость стоячей монохроматической волны в консервативной среде.

Подставляя в (3.12)

$$\alpha_\pm, \varphi_\pm \sim e^{-i\Omega t + i\varkappa r}$$

и полагая в нем $\gamma = 0$, $\eta = 0$, $h = 0$, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&-i\Omega\alpha_+ + i(\varkappa v)\alpha_- = \varkappa^2 L a\varphi_+ \\
&-i\Omega\alpha_- + i(\varkappa v)\alpha_+ = \varkappa^2 L a\varphi_- \\
&-i\Omega a\varphi_+ + i(\varkappa v) a\varphi_- = -Q_+\alpha_+ \\
&-i\Omega a\varphi_- + i(\varkappa v) a\varphi_+ = -Q_-\alpha_-
\end{aligned}
\qquad (4.14)
$$

$$Q_\pm = \varkappa^2 L + 2a^2(2\pi)^3(T_0 \pm 2R_0)$$

имеющую нетривиальные решения, если

$$\Omega^4 - \Omega^2\left[(Q_+ + Q_-)L\varkappa^2 + 2(\varkappa v)^2\right] + \qquad (4.15)$$
$$+\left((\varkappa v)^2 - L\varkappa^2 Q_+\right)\left((\varkappa v)^2 - L\varkappa^2 Q_-\right) = 0$$

откуда

$$\Omega^2 = \varkappa^2 L\left(\varkappa^2 L + 2(2\pi)^3 a^2 T_0\right) + (\varkappa v)^2 \pm$$

$$\pm 2\left[(\varkappa v)^2 \varkappa^2 L\left(\varkappa^2 L + 2(2\pi)^3 a^2 T_0\right) + 4(2\pi)^6 a^4 R_0^2 (\varkappa^2 L)^2\right]^{1/2} \tag{4.16}$$

Отметим, что это выражение для $\Omega^2$ совпадает с выражением (4.3) для $2i\Omega\gamma$, если в (4.3) считать $\eta_{AA} = 0$ и $P = 0$

Поэтому во всех случаях, когда существовала неустойчивость в среде с накачкой, будет неустойчивость и для консервативной среды:

При

$$|L\varkappa^2| > |(2\pi)^3 a^2 T_0| \tag{4.17}$$

максимальный инкремент

$$\nu_{max} = 2R_0 (2\pi)^3 a^2 \tag{4.18}$$

достигается при $\varkappa v + \varkappa^2 L = 0$

Эта формула совпадает с формулой (2.9) в пределе $S(\varkappa) \to R_0$ и в предположении, что $R_0 a^2 \gg \Gamma$.

При

$$|L\varkappa^2| < |(2\pi)^3 a^2 T_0|$$

$$L T_0 > 0 \tag{4.19}$$

$$\nu_{max} = \left[2(2\pi)^3 a^2 \frac{R_0^2}{T_0} L\varkappa^2\right]^{1/2}$$

достигается на поверхности (4.14).

При

$$|L\varkappa^2| < |(2\pi)^3 a^2 T_0| \quad и \quad LT_0 < 0 \tag{4.20}$$

$$\nu_{max} = \left[2(2\pi)^3 a^2 \left(|T_0 L\varkappa^2| + |2R_0 L\varkappa^2|\right) - 2(L\varkappa^2)^2\right]^{1/2}$$

достигается при $\varkappa v = 0$

Кроме того, при $LT_0<0$ имеет место неустойчивость чисто самофокусировочного типа. Действительно, при $(\varkappa v) >> L\varkappa^2$ в формуле (4.16) можно пренебречь под радикалом членом с $(L\varkappa^2)^2 a^4$. Тогда

$$\Omega_{1,2} = \varkappa v \pm \sqrt{\varkappa^2 L(\varkappa^2 L + 2(2\pi)^3 a^2 T_0)} \tag{4.21}$$

$$\Omega_{3,4} = -\varkappa v \pm \sqrt{\varkappa^2 L(\varkappa^2 L + 2(2\pi)^3 a^2 T_0)}$$

Здесь первая пара корней описывает неустойчивость волны, бегущей вправо, вторая пара - влево. Эти неустойчивости исследовались в § 1.

Отметим, что величина инкрементов неустойчивости (4.19), (4.19) и (4.20) в консервативной среде существенно больше, чем величина соответствующих (4.9), (4.11) и (4.13) в диссипативной среде с накачкой.

Важно отметить, что если в консервативной системе одна волна волна может быть устойчивой (при $LT_0 > 0$ ), то стоячая монохроматическая волна неустойчива всегда.

## § 5. Канонический вид уравнений Ландау-Лифшица

В предыдущих параграфах проводилось общее рассмотрение неустойчивостей одной и двух волн в средах различной природы, допускающих описание в рамках гамильтонова формализма.

В этом и следующих параграфах полученные результаты применяются в случае спиновых волн ферромагнетика.

Будем исходить из феноменологических уравнений Ландау-Лифшица /11/, описывающими движение плотности магнитного момента в сплошной среде. Такой выбор объясняется прежде всего тем, что поведение спиновых волн в интересущих нас нелинейных процессахявляется существенно классическим, так как их амплитуда велика по сравнению с уровнем нулевых колебаний.

В настоящее время отсутствует последовательный вывод нелинейных классических уравнений движения ферромагнетика из микроскопической теории. Однако спектры достаточно длинных спиновых волн, полученные микроскопически /12/ и из уравнений Ландау-Лифшица совпадают, что свидетельствует об их справедливости в линейном приближении. Можно надеяться, что эти уравнения справедливы и для достаточно малой нелинейности ( $\Delta M/M < 10^{-3}$ ), при которой происходят интересующие нас процессы.

Существенно, то что спиновые волны с $a/\lambda \gg \frac{T_c - T}{T_c}$ являются слабо затухающими /12/ (здесь $\lambda$ - длина волны, $a$ - постоянная решетки, $T_c$ - температура Кюри). Для интересующих нас длин волн ( $a/\lambda < 10^{-2}$ ) фактором, ограничивающим применимость теории в области высоких температур, является не затухание волн, а предположение о сохранении величины момента $|M(r)|$ в каждой точке.
В работе /13/ рассмотрены неустойчивости, связанные с несохранением $|M(r)|$. Ввиду того, что предлагаемый нами механизм неустойчивости носит принципиально другую природу, естественно рассматривать его отдельно, то-есть предполагать, что

$|M(r)| = M_0$

Рассмотрим уравнение Ландау-Лифшица без диссипативного члена:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = g\left[\vec{M}, \frac{\delta W}{\delta \vec{M}}\right] \qquad (5.1)$$

где $g$ - гиромагнитное отношение. В приближении длинных волн полная энергия ферромагнетика / 11 /:

$$W = \int\limits_V d\vec{r} \left[ F\left(M, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\vec{M}\vec{H}^{(m)} - \frac{1}{2}\vec{M}\vec{H}_0 \right] \qquad (5.2)$$

где $F$ - плотность обменной энергии и энергии анизотропии, $H^0$ - сторонее магнитное поле, $H^{(m)}$ - поле, обусловленное намагниченностью . Функциональная производная определяется соотношением /11/:

$$-\frac{\delta W}{\delta \vec{M}} = \vec{H}^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial \vec{M}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_k}\right)} \qquad (5.3)$$

В круговых переменных

$$M_{\pm} = M_x \pm i M_y$$

уравнения (5.1) принимают более простой вид

$$\frac{\partial M_+}{\partial t} = -2ig M_z \frac{\delta W}{\delta M_-}$$

$$M_z^2 = M_0^2 - M_+ M_- \qquad (5.4)$$

От переменных $M_+$ , $M_-$ удобно перейти к переменным $a(r)$, $a^*(r)$ в которых уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -i\frac{\delta W}{\delta a^*} \qquad \frac{\partial a^*}{\partial t} = i\frac{\delta W}{\delta a} \qquad (5.5)$$

Переменные $a$ и $a^*$ являются канонически сопряженными, а энергия $W$ в этих переменных становится функцией Гамильтона.

Введение канонических переменных позволит нам при изучении неустойчивостей спиновых волн воспользоваться общими результатами, сформулированными в предыдущих параграфах.

Будем искать переменные $a$, $a^*$ в виде

$$M^+ = f(aa^*)a, \qquad M^- = f(aa^*)a^* \tag{5.6}$$

где $f$ - действительная функция. После преобразований уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{2ig\,M_z(aa^*)}{f^2 + 2aa^* ff'}\,\frac{\delta W}{\delta a^*} \tag{5.7}$$

$$M_z(aa^*) = \sqrt{M_0^2 - f^2 aa^*}$$

Потребовав, чтобы это уравнение совпадало с (5.5), получим дифференциальное уравнение для функции $f$:

$$f^2 + 2aa^* ff' = 2g\sqrt{M_0^2 - aa^* f^2}$$

единственным решением которого, удовлетворяющим требованию конечности $\lim\limits_{|a|^2 \to 0} f(|a|^2) = const$ является:

$$f(|a|^2) = \pm\sqrt{2g(M_0 - gaa^*)}$$

Выбирая для определенности положительный знак корня, получим

$$M_+ = \sqrt{2gM_0}\cdot a\sqrt{1 - \frac{gaa^*}{2M_0}} \tag{5.8}$$

$$M_z = M_0 - gaa^*$$

Найденное нами преобразование (5.8) является классическим аналогом преобразования Гольдштейна-Примакова /11/.

Используя малость амплитуды спиновых волн

$$g a a^* \ll 2M_0$$

, в гамильтониане $W(a, a^*)$ произведем разложение по степеням $a$ до членов четвертого порядка включительно и совершим каноническое преобразование от переменных $a(r)$, $a^*(r)$ к комплексным амплитудам бегущих спиновых волн $b_k$, $b_k^*$, являющимися нормальными переменными квадратичной части гамильтониана. При этом гамильтониан примет вид

$$W = \int \omega_k b_k b_k^* dk + \int \Big[ V_{k,k_1,k_2} b_k^* b_{k_1} b_{k_2} +$$
$$+ V^*_{k,k_1,k_2} b_k b_{k_1}^* b_{k_2}^* \Big] \delta(k - k_1 - k_2)\, dk\, dk_1\, dk_2 +$$
$$+ \frac{1}{3} \int \Big[ U_{k k_1 k_2} b_k b_{k_1} b_{k_2} + U^*_{k k_1 k_2} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2}^* \Big] \times$$
$$\times \delta_{k + k_1 + k_2}\, dk\, dk_1\, dk_2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \int W_{k k_1 k_2 k_3} b_k^* b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k + k_1 - k_2 - k_3} \times$$
$$\times dk\, dk_1\, dk_2\, dk_3 \qquad (5.9)$$

Для коэффициентов $V$, $U$, $W$, из факта существования гамильтониана (5.9): следуют соотношения симметрии

$$V_{kk_1k_2} = V_{kk_2k_1}$$

$$U_{kk_1k_2} = U_{kk_2k_1} = U_{k_2kk_1}$$

$$W_{kk_1k_2k_3} = W_{k_1kk_2k_3} = W_{kk_1k_3k_2} = W^*_{k_2k_3kk_1} \tag{5.10}$$

Конкретный вид этих функций для некоторых моделей ферромагнетика получен в приложении Б. В дальнейшем производится исключение кубичных членов в гамильтониане - эта процедура описана в приложении А.

## § 6. Неустойчивости спиновых волн в ферромагнетиках

Пользуясь результатами общей теории неустойчивости волн, развитой в § 1-§ 4, рассмотрим вопрос об устойчивости спиновых волн ферромагнетика. Уравнение движения спиновых волн приведены к гамильтонову виду в § 5, функция гамильтона для кубического и одноосного ("легкая плоскость") ферромагнетика рассмотрена в приложении Б.

## 1. Неустойчивость бегущей спиновой волны

Покажем, что бегущая спиновая волна в диссипативном ферромагнетике как правило неустойчива. Рассмотрим вначале одноосный ферромагнетик типа "легкая плоскость", в случае, когда анизотропия велика по сравнению с диполь-дипольным взаимодействием. Тогда

$$T_0 = F(\varkappa) = G(\varkappa)$$ /см. (Б.0), (Б.10)/ и

для неустойчивости волны достаточно $L(\xi) T_0 < 0$ см /(Б.0), (1.15)/.

В приложении Б показано, что $T_0 < 0$ /см.(Б-11), (Б-12), (Б-14) и (Б-15)/, а $L(\xi)$ может иметь разный знак: так для спиновой волны, распространяющейся вдоль оси трудного намагничения

$$k_0^2 L(\xi) = \sqrt{\frac{2\omega_a}{\omega_H - \omega_M N_z}} \left( \omega_{ex} (lk)^2 - \omega_M \left( \xi_y^2 + \xi_z^2 \right) \right)$$

/см.(Б.24)/. Здесь $\vec{\xi} = \vec{k}/|k|$, $K_0$ – волновой вектор спиновой волны, $\varkappa \ll K_0$ – волновой вектор неустойчивости /см.(В-2)/.

При больших $K_0$, когда преобладает обменное взаимодействие, вообще

$$k_0^2 L(\xi) = \omega_{ex} (lk)^2 > 0$$

при любых $\xi$, а бегущая спиновая волна неустойчива.

В кубических кристаллах, когда важно учитывать диполь-дипольное взаимодействие, $L(\xi)$ может иметь любой знак при соответствующем выборе направления $\xi$, если $2\omega_{ex} (lk)^2 < \omega_M$, тогда условию (1.15), необходимому для существования неустойчивости, всегда можно удовлетворить. Если же $2\omega_{ex} (lk)^2 > \omega_M$, то

$L(\xi) > 0$ . Однако, /см.(1.14), (Б-18), (Б-20), (Б-21) и (Б-22)/ всегда может стать отрицательным, и условие возникновения неустойчивости (1.15) удовлетворится.

Таким образом, монохроматическая спиновая волна конечной амплитуды в недиссипативном ферромагнетике всегда неустойчива по отношению к модуляции её амплитуды (неустойчивость самофокусировочного типа). Максимальный инкремент $\nu_{max}$ равный

$$\nu_{max} = a^2 F(\xi) \simeq \omega \frac{\Delta M_z}{M} \tag{6.1}$$

имеет неустойчивость по отношению к модуляции амплитуды с волновым вектором $\varkappa_m$ :

$$\left(\frac{\varkappa_m}{k}\right)^2 \simeq a^2 \frac{T(\xi)}{k^2 L(\xi)} \simeq \frac{\Delta M_z}{M} \tag{6.2}$$

/см (1.13), (1.16), (Б-11), (Б-20)/

Здесь $\Delta M_z$ - продольное изменение намагниченности $M$, возникающее при появлении спиновой волны с частотой $\omega$ и волновым вектором $k$. Оценки (6.1), (6.2) довольно грубы. Более точные оценки в различных конкретных ситуациях можно получить, воспользовавшись формулами (Б-10) - Б-(25) приложения Б.

При учете затухания спиновых волн ( $\gamma$ - коэффициент затухания), самофокусировочная неустойчивость имеет порог /см. (1.17)/

$$a^2_{пор} = \frac{2\gamma}{|T_0|}$$

$$\left(\frac{\Delta M_z}{M}\right)_{пор} \simeq \frac{\gamma}{\omega} \tag{6.3}$$

При небольшом превышении над порогом (6.3) спиновая волна становится неустойчивой относительно модуляции амплитуды с

$$\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2 \simeq \frac{\gamma}{\omega} \tag{6.4}$$

Отметим, что порог неустойчивости (6.3) спиновых волн довольно велик. В IYG, например $(\gamma/\omega) \sim 10^{-3}$. Существует однако ситуация, когда нелинейность спиновой системы растёт, а порог неустойчивости уменьшается. Рассмотрим случай, когда магнитное поле внутри образца мало, так что образец находится в состоянии близком к разбиению на домены:

$$\omega_M \gg \omega_0 - \omega_M N_z$$

Тогда при

$$\omega_M \gg \omega_{ex} (\ell k)^2$$

можно воспользоваться (Б-20), (Б-5) и вместо (6.2) получим

$$\frac{\Delta M_z}{M} \simeq \sqrt{\frac{\omega_0 - \omega_M N_z + \omega_{ex} (\ell k)^2}{\omega_M}} \, \frac{\gamma}{\omega_M} \tag{6.5}$$

Порог (6.5) резко уменьшается для длинных спиновых волн с не очень большим $\omega_{ex} (\ell k)^2$.
Это уменьшение порога связано с дальнодействующим характером диполь-дипольного взаимодействия.

Отметим, что рассмотренная здесь самофокусировочная неустойчивость спиновой волны, является предельным случаем ($\varkappa / k \ll 1$) Сулловской неустойчивости с законом сохранения

$$2\,\omega(k_0) = \omega(k_0 + \varkappa) + \omega(k_0 - \varkappa)$$

## 2. Неустойчивость стоячей монохроматической спиновой волны при параллельной накачке

При изучении состояния за порогом возбуждения спиновых волн существенным является вопрос о механизме, ограничивающем амплитуду. Обычно полагают /9,10/, что при параллельной накачке амплитуда волн ограничивается нелинейным затуханием. Для стоячей спиновой волны трехволновые процессы запрещены законами сохранения, её нелинейное затухание обусловлено четверными процессами (В-2) типа "два в два", по порядку величины /см.приложение А/

$$\frac{\eta}{T} \sim \frac{\gamma}{\omega} \qquad (6.6)$$

В § 2 и § 4 показано, что стоячая спиновая волна устойчива, если относительное превышение над порогом её возникновения (2.16) меньше, чем

$$\rho_{крит} \simeq \left(\frac{\gamma}{\omega}\right)^2 \qquad (6.7)$$

/см.(2.17Э, (4.8)/.

При значительном превышении над порогом (6.7) стоячая волна неустойчива относительно возникновения модуляции её амплитуды, или распада на другую стоячую волну; инкремент этой неустойчивости определяется формулами (2.18), (4.9), (4.13).

Неустойчивость приводит к развитию турбулентности на фоне исходной пары волн - возникают спиновые волны с хаотизированной фазой, заполняющие слой вблизи поверхности $\omega_{k_0+\varkappa} = \omega_p$ или часть этого слоя. Средний уровень этой турбулентности определяется механизмом нелинейного взаимодействия волн, описываемым гамильтонианом (1.1). Не исключено, что на фоне этой турбулентности возникнут крупномасштабные пульсации.

В следующей работе мы надеемся показать, что ограничение уровня возбуждения спиновой системы при параллельной накачке происходит чаще всего не из-за нелинейного затухания, а вследствие ухудшения связи с накачкой, обусловленном турбулентностью. Ограничение амплитуды будет происходить на уровне, эквивалентном введению эффективного нелинейного затухания

$\eta \sim T_0$ .

В заключение авторы благодарят В.Г.Вакса.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е   А

Здесь мы рассмотрим случай, когда функция Гамильтона содержит члены, описывающие трехволновые процессы:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \int \omega_k c_k c_k^* \, dk + \\
& + \int \left[ V(k,k_1,k_2)\, c_k^* c_{k_1} c_{k_2} + V^*(k,k_1,k_2)\, c_k c_{k_1}^* c_{k_2}^* \right] \times \\
& \times \delta(k-k_1-k_2)\, dk\, dk_1\, dk_2 + \\
& + \frac{1}{3} \int \left[ U(k,k_1,k_2)\, c_k c_{k_1} c_{k_2} + U^*(k,k_1,k_2)\, c_k^* c_{k_1}^* c_{k_2}^* \right] \times \\
& \times \delta(k+k_1+k_2)\, dk\, dk_1\, dk_2 + \\
& + \frac{1}{2} \int W_{k k_1 k_2 k_3}\, c_k^* c_{k_1}^* c_{k_2} c_{k_3} \times \\
& \times \delta_{k+k_1-k_2-k_3}\, dk\, dk_1\, dk_2\, dk_3
\end{aligned}
\qquad (A\text{-}1)
$$

Трехволновые процессы не могут приводит к интересующим нас неустойчивостям. Однако, следует учесть их вклад в четырехволновые процессы во втором порядке теории возмущения.

Для этого произведем нелинейное преобразование в гамильтониане (A-1) к новым переменным $a_k$

$$a_k = c_k - \int \frac{V(k, k_1, k_2)\, c_{k_1} c_{k_2}\, \delta(k - k_1 - k_2)}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}}\, dk_1 dk_2 +$$

$$+ 2 \int \frac{V^*(k_2, k, k_1)\, c_{k_1} c^*_{k_2}\, \delta(k_2 - k - k_1)}{\omega_{k_2} - \omega_k - \omega_{k_1}}\, dk_1 dk_2 - \qquad \text{(A-2)}$$

$$- \int \frac{U(k, k_1, k_2)\, c^*_{k_1} c^*_{k_2}\, \delta(k + k_1 + k_2)}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}\, dk_1 dk_2$$

Преобразование (A-2), во-первых, с точностью до членов третьего порядка является каноническим и не меняет потому гамильтоновой формы уравнений движения, во-вторых, выбрано так, чтобы результирующий гамильтониан не содержал тройных членов, т.е. имел вид (1.1). При этом:

$$T(k, k_1, k_2, k_3) = W(k, k_1, k_2, k_3) -$$

$$- \frac{U^*(-k-k_1, k, k_1)\, U(-k_2-k_3, k_2, k_3)}{\omega(k_2+k_3) + \omega(k_2) + \omega(k_3)} -$$

$$- \frac{U^*(-k-k_1, k, k_1)\, U(-k_2-k_3, k_2, k_3)}{\omega(k+k_1) + \omega(k) + \omega(k_1)} -$$

$$- \frac{V^*(k_2+k_3, k_2, k_3) \cdot V(k+k_1, k, k_1)}{\omega(k+k_1) - \omega(k) - \omega(k_1)}$$

$$-2\,\frac{V_{k_1,k_2,k-k_2}\,V^*_{k_3,k_1,k_3-k_1}}{\omega(k_3-k_1)+\omega(k_1)-\omega(k_3)}-$$

$$-2\,\frac{V_{k_1,k_3,k_1-k_3}\,V^*_{k_2,k,k_2-k}}{\omega(k_2-k)+\omega(k)-\omega(k_2)}-$$

$$-2\,\frac{V_{k_1,k_2,k_1-k_2}\,V^*_{k_3,k,k_3-k}}{\omega(k_2-k_1)+\omega(k_1)-\omega(k_2)}-$$

$$-2\,\frac{V_{k,k_3,k-k_3}\,V^*_{k_2,k_1,k_2-k_1}}{\omega(k_3-k)+\omega(k)-\omega(k_3)}$$

Кроме того появляются члены, описывающие четверные процессы типа "три в один", однако они не приводят к интересующим нас неустойчивостям.

Заметим еще, что если исходные уравнения системы содержали линейную диссипацию $\gamma_k$ , то после преобразования (А-2) появятся вклады в функцию $\eta_{k k_1 k_2 k_3}$ имеющие порядок $\eta/T \sim \gamma/\omega$ .

## П Р И Л О Ж Е Н И Е  Б

В параграфах 1-4 показано, что характер неустойчивости волн определяется величинами

$$T_0 = T_{k_0, k_0, k_0, k_0}$$

$$F(\varkappa) = T_{k_0+\varkappa,\, k_0-\varkappa,\, k_0,\, k_0}$$

$$G(\varkappa) = T_{k_0+\varkappa,\, k_0,\, k_0+\varkappa,\, k_0}$$

$$R_0 = T_{k_0, -k_0, k_0, -k_0} \qquad \text{(Б-О)}$$

$$R(\varkappa) = T_{k_0+\varkappa,\, -k_0,\, k_0+\varkappa,\, -k_0}$$

$$S(\varkappa) = T_{k_0+\varkappa,\, -(k_0+\varkappa),\, k_0,\, -k_0}$$

$$\varkappa^2 L(\varkappa) = \frac{1}{2}\varkappa_\alpha \varkappa_\beta \left.\frac{\partial^2\omega(k)}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right|_{k=k_0}$$

зависящими от волнового вектора $\vec{\varkappa}$ волны огибающей.

Здесь мы вычислим эти величины для спиноволновой системы ферромагнетика.

1. Разложим намагниченность ферромагнетика $\vec{M}(r,t)$ в интеграл Фурье:

$$M(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int M(k)\, e^{ikr}\, dk$$

$$M(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int M(r)\, e^{-ikr}\, dr \qquad \text{(Б-1)}$$

Энергия ферромагнетика $W$ состоит из обменной энергии $W_{ex}$, энергии анизотропии $W_a$, энергии диполь-дипольного взаимодействия $W_d$ и $W_H$ – энергия ферромагнетика во внешнем поле :

$$W = W_{ex} + W_a + W_d + W_H$$

Предполагая, что образец имеет форму эллипсоида вращения вокруг оси $z$, внешнее поле $H$ параллельно этой оси $x$ – ось трудного намагничивания запишем

$$W_{ex} = \frac{\omega_{ex}}{2gM} \int \left(\vec{M}(k), \vec{M}^*(k)\right)(lk)^2\, dk$$

$$W_a = \frac{\omega_a}{2gM} \int M_x(k)\, M_x^*(k)\, dk \qquad \text{(Б-2)}$$

$$W_d = \frac{\omega_M}{2gM} \int \frac{(\vec{k}, \vec{M}(k))(\vec{k}, \vec{M}^*(k))}{k^2} \left(1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right) d\vec{k} -$$

$$- \frac{\omega_M}{2gM} \frac{M_z^2(0)}{V}$$

$$W_H = -(2\pi)^{3/2} H M_z(0)$$

Здесь $g$ – гиромагнитное отношение, $\frac{\omega_{ex}}{g}$ – обменное поле, $l$ – постоянная решетки $\omega_0/g$ – поле анизотропии, $\omega_M = 4\pi g M$, $N_z$ – размагничивающий фактор вдоль оси $z$ ($N_z \ll 1$). Интегрирование в (Б-1) производится в пределах образца, так что $\delta$ – функции по импульсам имеют эффективную ширину порядка $1/L$ где $L$ – линейные размеры образца, $\int \delta(k) dk = 1$, $\delta(0) - (2\pi)^3 V$, где $V$ – объем образца. При записи энергии $W$ предполагалось, что отсутствуют магнитостатические колебания намагниченности.

Выражение для энергии $W$ в дальнейшем будет использоваться в двух предельных случаях: в кубических ферромагнитах, где $\omega_a = 0$ (например $YIG$) и в одноосных ферромагнитах типа "легкая плоскость" с $\omega_a \gg \omega_M$ (например, $Zn_2Y$, $RbNiF_3$).

Используя классический аналог преобразований Гольдштейна-Примакова (5-8) и разложение (Б-1) получим соотношения, связывающие компоненты намагниченности $M_z(k)$ и $M_\pm(k) = M_x(k) \pm i M_y(k)$ с каноническими переменными $a_k$ и $a_k^*$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} M_z(k) = M\delta(k) - \frac{g}{(2\pi)^3} \int dk_1 dk_2 a_{k_1} a^*_{k_2} \delta_{k_1-k_2-k} \times dk_1 dk_2 \qquad \text{(Б-3)}$$

$$M_+(k) = \sqrt{2gM} \Big\{ a_k - $$

$$- \frac{g}{2(2\pi)^3 M} \int dk_1 dk_2 dk_3\, a_{k_1} a_{k_2} a^*_{k_3} \delta(k_1+k_2-k-k_3) \times$$

x) Одноосные ферромагнетики типа "легкая ось" здесь не рассматриваются, так как они имеют значительно более высокий порог возбуждения спиновых волн при параллельной подкачке.

Энергия ферромагнетика $W$ (П-2), записанная в канонических переменных $a_k$ $a_k^*$ с помощью (Б-3), становится функцией Гамильтона:

$$W = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}$$

$$W^{(2)} = \int \Big[ A(k)\, a_k a_k^* + \frac{1}{2}\Big( B(k)\, a_k a_{-k} +$$

$$+ B^*(k)\, a_k^* a_{-k}^* \Big)\Big]\, dk$$

$$W^{(3)} = -\,\omega_M \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{g}{2M}} \int \frac{K_{1z}}{K_1^{\,2}} \left( 1 - \frac{\delta(k)}{\delta(0)} \right) \times$$

$$\Big[ K_{1+}\, a_{-k_3}^* + K_{1+}^*\, a_{k_1} \Big]\, a_{k_2}\, a_{k_3}^*\, \delta(k_1 + k_2 - k_3)\, dk_1\, dk_2\, dk_3$$

$$W^{(4)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{2M} \int a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* a_{k_4}^* \times$$

$$\times\, \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_3) \times$$

$$\times \frac{1}{4} \Big[ C(k_1 - k_3) + C(k_1 - k_4) + C(k_2 - k_3) + C(k_2 - k_4) -$$

$$- D(k_1) - D(k_2) - D(k_3) - D(k_4) \Big]\, dk_1\, dk_2\, dk_3\, dk_4$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{4M}\int a^*_{k_1} a^*_{k_2} a^*_{k_3} a_{k_4}\,\delta(-k_1-k_2-k_3+k_4)\,\times$$

$$\times\frac{1}{3}\left[B^*(k_1)+B^*(k_2)+B^*(k_3)\right]dk_1\,dk_2\,dk_3\,dk_4\;-$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{4M}\int a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} a^*_{k_4}\,\delta(k_1+k_2+k_3-k_4)\,\times$$

$$\times\frac{1}{3}\left[B(k_1)+B(k_2)+B(k_3)\right]dk_1\,dk_2\,dk_3\,dk_4$$

Здесь

$$A(k)=\omega_H-\omega_M N_z+\omega_a+\omega_{ex}(lk)^2+$$
$$+\,\omega_M\frac{|k_+|^2}{2k^2}\left(1-\frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right)$$

$$B(k)=\omega_a+\omega_M\frac{k_+^2}{2k^2}\left(1-\frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right)$$

$$C(k)=\omega_{ex}(lk)^2+\omega_M N_z\frac{\delta(k)}{\delta(0)}+ \qquad \text{(Б-5)}$$
$$+\,\omega_M\frac{k_z^2}{k^2}\left(1-\frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right)$$

$$D(k)=\omega_a+\omega_{ex}(lk)^2+\omega_M\frac{|k_+|^2}{2k^2}\left(1-\frac{\delta(k)}{\delta(0)}\right)$$

$$\omega_H=g\,H_0 \qquad k_+=k_x+ik_y$$

Совершим каноническое преобразование

$$a_k = b_k \operatorname{ch}\psi_k - b^*_{-k} e^{i\tilde{\varphi}_k} \operatorname{sh}\psi_k$$

$$a^*_{-k} = -b_k \operatorname{sh}\psi_k e^{-i\tilde{\varphi}_k} + b^*_{-k} \operatorname{ch}\psi_k$$

$$\operatorname{th}\psi_k = \frac{A(k)}{B(k)}$$

$$e^{i\tilde{\varphi}_k} = \frac{B(k)}{|B(k)|} \qquad (Б-6)$$

приводящее $W^{(2)}$ к диагональному виду

$$W^{(2)} = \int \omega_k b_k b_k^* dk$$

$$\omega_k^2 = A^2(k) - |B(k)|^2 \qquad (Б-7)$$

Тогда гамильтониан (Б-4) приводится к виду (А-1), где

$$V(k_1,k_2,k_3) = -\omega_M \sqrt{\frac{g}{2(2\pi)^3 M}} \Big[ Y_{12} X_3 + Y_{13} X_2 + \frac{1}{2} X_1^* \left( Z_{23} + Z_{32} \right) \Big]$$

$$3\,U(k_1,k_2,k_3) = -\omega_M \sqrt{\frac{g}{2(2\pi)^3 M}}\; \frac{1}{2} \Big[ X_1 \left( Z_{23} + Z_{32} \right) + X_2 \left( Z_{13} + Z_{31} \right) + X_3 \left( Z_{12} + Z_{21} \right) \Big]$$

$$X_i = X(k_i) \qquad Y_{23} = Y(k_2, k_3)$$

$$Z_{ij} = Z(k_i, k_j)$$

$$X(k) = \frac{k_z^2 |k_+|^2}{k^4} \Big[ e^{-i\varphi_k} \operatorname{sh}\psi_k - e^{i(\varphi_k - \tilde{\varphi}_k)} \operatorname{sh}\psi_k \Big] \tag{Б-8}$$

$$Y(k_2,k_3) = Y^*(k_2,k_3) = \frac{1}{2} \Big[ \operatorname{sh}\psi_{k_2} \operatorname{sh}\psi_{k_3}\, e^{i(\varphi_{k_2} - \hat{\varphi}_{k_3})} + \operatorname{ch}\psi_{k_2} \operatorname{ch}\psi_{k_3} \Big]$$

$$Z(k_2,k_3) = -\operatorname{ch}\psi_{k_2} \operatorname{sh}\psi_{k_3}\, e^{i\tilde{\varphi}_{k_3}}$$

$$e^{i\varphi_k} = \frac{k_+}{|k_+|}$$

Общее выражение для $W_{k_1,k_2,k_3,k_4}$ еще более громоздко. В интересующем нас случае, когда все $k_i$ близки к $\pm k_0$ получим:

$$W_{k_1 k_2, k_3 k_4} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\gamma}{M} \frac{1}{\omega^2(k_0)} \left\{ \frac{A^2}{4} \left[ C(k_1-k_3) + C(k_1-k_4) + C(k_2-k_3) + C(k_2-k_4) \right] + \frac{B^2}{2} \left[ C(k_1-k_2) + C(k_3-k_4) \right] - \left( A^2 + \frac{B^2}{2} \right) D(k_0) + \frac{3}{2} B^2 A \right\} \qquad \text{(Б-9)}$$

Здесь $A \equiv A(k_0)$, $B \equiv |B(k_0)|$.

3. Перейдем к рассмотрению одноосных ферромагнитов с большой анизотропией ( $\omega_a \gg \omega_M$ ). Тогда можно не учитывать диполь-дипольное взаимодействия в нелинейных частях гамильтониана $W^{(3)}$ и $W^{(4)}$. Существенно то, что в отсутствие диполь-дипольных членов в выражениях для $T(\varkappa)$, $G(\varkappa)$, $R(\varkappa)$ и $S(\varkappa)$ можно перейти к пределу $\varkappa \to 0$. Тогда

$$T_0 = G(0) = F(0) = W_{k_0, k_0, k_0, k_0} = -\rho\left[ (2A^2 + B^2)\omega_{ex}(lk_0)^2 + B(A-B)(2A-B) \right] \qquad \text{(Б-10)}$$

$$R_0 = R(0) = S(0) = W_{k_0, -k_0, k_0, -k_0} = -\rho\left[ (7B^2 - 2A^2)\,\omega_{ex}(lk_0)^2 + B(A-B)(2A-B) \right]$$

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\gamma}{2M} \frac{1}{\omega^2(k_0)} \qquad \omega^2(k_0) = A^2 - B^2$$

Здесь и в дальнейшем существенно использовано предположение $K_{0z}=0$. Это по-существу не ограничивает область рассмотрения, так как при возбуждении спиновых волн с $K\neq 0$ параллельной накачкой минимальным будет порог для волн с $k_z=0$.

Исследуем полученные выражения в двух важных предельных случаях:

а) $\omega_{ex}(lk)^2 \gg (\omega_0-\omega_M N_z)$ Тогда

$$T_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\left[\omega_q+\omega_{ex}(lk)^2\right] \tag{Б-11}$$

$$R_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\left[\frac{3\omega_q^2-\omega_q\omega_{ex}(lk)^2-\omega_{ex}^2(lk)^4}{\omega_{ex}(lk_0)^2+2\omega_q}\right]$$

Интересно, что при $\omega_{ex}\gg\omega_q$

$$-T_0=R_0=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\omega_{ex}(lk)^2 \tag{Б-12}$$

а при выполнении обратного соотношения $\omega_{ex}\ll\omega_q$

$$T_0=\frac{2}{3}R_0=-\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\omega_q \tag{Б-13}$$

Таким образом $T_0$ отрицательно, а $R_0$ становится положительным при

$$\omega_{ex}(lk_0)^2>\omega_q(\sqrt{13}-1)\simeq 2,6\,\omega_q$$

б) $\omega_{ex}(lk_0)^2 \ll \omega_0 - \omega_M N_z$ тогда

$$T_0 = R_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\frac{\omega_a(\omega_a + 2\omega_0)}{2(\omega_0 + 2\omega_a)} \qquad (\text{Б-14})$$

Интересно, что в случае $\omega_a \gg \omega_M,\ \omega_{ex}$, коэффициенты $T_0$ и $R_0$ зависят от соотношения между $\omega_{ex}$ и $\omega_0 - \omega_M N_z$.

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\omega_a \\ R_0 &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{3}{4}\frac{g}{M}\omega_a \end{aligned}\right\} \text{ при } \omega_{ex}(lk)^2 > \omega_0 - \omega_M N_z \qquad (\text{Б-15})$$

$$T_0 = R_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{g}{2M}\frac{\omega_a}{4} \text{ при}$$

$$\omega_{ex}(lk_0)^2 < \omega_0 - \omega_M N_z \qquad (\text{Б-16})$$

4. В кубических кристаллах анизотропия весьма мала, важную роль играет диполь-дипольное взаимодействие и необходимо учитывать вклад тройных членов гамильтониана (А-1) в интересующее нас нелинейное взаимодействие (1.1) между спиновыми волнами. При вычислении этого вклада будем учитывать, что $k_{0z} = 0$ и $\varkappa \ll k_0$.

Тогда интересующие нас матричные элементы:

$$V(2K_0, K_0, K_0) = V(K_0, 2K_0, K_0) = U(2K_0, K_0, K_0) =$$

$$= V(K_0, K_0, K_0) = U(K_0, K_0, K_0) = 0$$

$$|V(\varkappa, K_0, K_0)|^2 = |U(\varkappa, K_0, K_0)|^2 = \frac{A^2}{B^2} |V(K, \varkappa, K)|^2 =$$

$$= \rho \frac{\omega_M^2 B^2}{4} \frac{\omega(\xi) \cos^2\theta \sin^2\theta}{\omega_0 - \omega_M N_z + \omega_M \sin^2\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\varkappa_z}{|\varkappa|} = \xi_z$$

(Б-17)

Видно, что в этих выражениях остается зависимость от направления $\vec{\xi} = \vec{\varkappa}/|\varkappa|$, что связано с дальнодействующим характером диполь-дипольного взаимодействия. Это приводит к тому, что функции $T(\varkappa)$, $G(\varkappa)$ и т.д. не имеют пределы при $\varkappa \to 0$.

Используя (Б-17) и (Б-0) получим для интересующих нас функций:

$$T_0 = G(0) + 4\rho B(A^2 + B^2) N_z$$

$$G(\xi) = G(0) + 2\rho B \left\{ B^2 N_z + \cos^2\theta \left[ B^2 + 2A^2 \Phi(\xi) \right] \right\}$$

(Б-18)

$$F(\xi) = G(0) + 2\rho B \left\{ A^2 N_z + \cos^2\theta \left[ 2B^2 + A^2 \Phi(\xi) \right] \right\}$$

$$R_0 = R(0) + 2\rho B A^2 N_z$$

$$R(\xi) = R(0) + 2\rho B \Big[ A^2 N_z + \frac{1}{2} B^2 \cos^2\theta \, \big(1 - \Phi(\xi)\big) \times$$

$$\times \frac{\omega(\xi)}{2\omega(K_0) - \omega(\xi)} \Big] \qquad \text{(Б-19)}$$

$$S(\xi) = R(0) + 2\rho B \cos^2\theta \, A^2 N_z$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\omega_0 - \omega_M N_z + \omega_M (\cos^2\theta - 1)}{\omega_0 - \omega_M N_z + \omega_M \sin^2\theta}$$

В этих формулах $G(0)$ и $R(0)$ определено соотношениями (В-10), в которых $B = \omega_M / 2$ Можно пользоваться и формулами (Б-11) после замены $\omega_0 \to \omega_N / 2$

Общее исследование выражений (Б-18) - (Б-19) при произвольных соотношениях между $\omega_M$, $\omega_{ex}$ и $\omega_0 - \omega_M N_z$ довольно громоздко.

Полезно рассмотреть несколько важных частных случаев:

1. $\omega_M \gg \omega_{ex} (\ell K_0)^2$; $\omega_M \gg \omega_0 - \omega_M N_z$

$$\frac{F(\xi)}{N_z - \cos^2\theta} = \frac{G(\xi)}{N_z + \cos^2\theta} = - \frac{S(\xi)}{\cos^2\theta} = \frac{R(\xi)}{N_z} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g}{2M} \frac{\omega_M}{8} \frac{\omega_M}{\omega_0 - \omega_M N_z + \omega_{ex} (\ell K_0)^2}$$

$$\frac{\omega_M}{2} = \omega_{ex}\,(ek)^2 \gg \omega_0 - \omega_M N_z$$

$$\frac{F(\xi)}{N_z - 6 - 7\cos^2\theta} = \frac{G(\xi)}{4N_z - 6 - 2\cos^2\theta} =$$

$$= -\frac{S(\xi)}{1 + 4\cos^2\theta} = \frac{R(\xi)}{4N_z - 1} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{2M}\,\frac{\omega_M}{6}$$

В формулах (Б-20), (Б-21) предполагается, что $\Phi(\xi) = -1$. Это ограничение несущественно, т.к. предполагать, что $\omega_0 - \omega_M N_z \ll \omega_M$.

3. $\dfrac{\omega_M}{2} = \omega_0 - \omega_M N_z \gg \omega\, ex$. Тогда

$$F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{2M}\,\frac{\omega_M}{6}\left[N_z - 3 + \cos^2\theta\left(1 + 8\,\Phi(x)\right)\right]$$

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{2M}\,\frac{\omega_M}{6}\left[4N_z - 3 + 2\cos^2\theta\left(1 + 2\,\Phi(x)\right)\right]$$

$$S(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{2M}\,\frac{\omega_M}{6}\left[4\,\Phi(\xi) - 3\right] \qquad \text{(Б-22)}$$

$$R(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{2M}\,\frac{\omega_M}{6}\left[4N_z - 3 + \frac{\cos^2\theta}{2}\left(1 - \Phi(\xi)\right) \times \right.$$

$$\left. \times\, \frac{\sqrt{1 + 2\sin^2\theta}}{2\sqrt{3} - \sqrt{1 + 2\sin^2\theta}}\right]; \quad \text{здесь } \Phi(\xi) = \frac{\cos 2\theta}{1 + 2\sin^2\theta}$$

В заключение вычислим

$$L(\xi) = \frac{1}{2} \xi_\alpha \xi_\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\Bigg|_{k=k_0} \qquad |\vec{\xi}| = 1$$

Для одноосных ферромагнетиков вычислим $L(\xi)$ в предположении

$$\omega_a \gg \omega_H - \omega_M N_z \gg \omega_{ex} (\ell k)^2$$

Тогда из (Б-5) и (Б-7) получим

$$\omega(k) = \omega_0 \left[ 1 + \frac{\omega_{ex} (\ell k)^2}{2(\omega_H - \omega_M N_z)} + \frac{\omega_M \frac{k_x^2}{k^2}}{2(\omega_H - \omega_M N_z)} \right]$$

$$\omega_0 = \sqrt{2\omega_a (\omega_H - \omega_M N_z)}$$

(Б-23)

$$\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} = \sqrt{\frac{2\omega_a}{\omega_H - \omega_M N_z}}\ \omega_{ex} (\ell k)^2 > 0$$

$$\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} = \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_z^2} = \sqrt{\frac{2\omega_a}{\omega_H - \omega_M N_z}} \left[ \omega_{ex} (\ell k)^2 - \omega_M \right]$$

(Б-24)

при $K \parallel$ оси $X$ (X - ось трудного намагничивания).

Для кубических ферромагнетиков вычислим $L(\xi)$ в предположении

$$\omega_H - \omega_M N_z \gg \omega_{ex} (lk)^2$$

$$\omega_H - \omega_M N_z \gg \omega_M$$

Тогда из (Б-5) и (Б-7) имеем

$$\omega(k) = \omega_H - \omega_M N_z + \omega_{ex} (lk)^2 + \frac{\omega}{2} \frac{k^2 - k_z^2}{k^2}$$

$$\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_x^2} = \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_y^2} = \omega_{ex} (lk)^2 > 0$$

$$\frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_z^2} = \omega_{ex} (lk)^2 - \frac{\omega_M}{2} \tag{Б-25}$$

Литература


1. Веденев А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. УФН, 73, 701, (1961).
2. Захаров В.Е. ЖЭТФ 51, 1107 (1966).
3. Захаров В.Е. ПМТФ вып. 2 89 (1968).
4. Беспалов В.И., Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ 3, 471 (1966).
5. Литвак А.И., Таланов В.И. ИВУЗ, Радиофизика.
6. Захаров В.Е., ЖЭТФ 53, 1735 (1967).
7. Волков Т.Ф., Сборник "Проблемы управляемого термоядерного синтеза".
8. Веденов А.А., Рудаков Л.Ч. ДАН СССР, 159, 739 (1964).
9. H Suhl. Phys chem. solids, 1, 209 (1957)
10. Н.Бломберген "Нелинейная оптика"Мир", 1966.
11. А.И.Ахиезер, В.Г.Барьяхтар, С.В.Пелетминский "Спиновые волны", Наука, 1967.
12. Вакс В.Г., Ларкин, Пикин С.А. ЖЭТФ, 53, 1089 (1967).
13. Моносов. Я.А. ЖЭТФ, 51, 222 (1966).

Ответственный за выпуск В.Е.Захаров

Подписано к печати 12.УП-68 г.

Усл. 4,5 печ.л., тираж 300 экз.

Заказ № 227. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.