ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ. АН СССР

Е.Я.Коган, С.С.Моисеев, В.Н.Ораевский

Применение вариационного метода при исследовании диссипативных неустойчивостей в плазме

г.Новосибирск 1967

I Важнейшей проблемой физики плазмы является вопрос ее устойчивости. Решение задачи в этом направлении связано, обычно с исследованием системы уравнений, описывающих движение среды на собственные значения.

Однако понятно, что, если мы не интересуемся конкретными значениями собственных частот, то на вопрос: устойчива ли данная система в поле определенных возмущений? принципиально ответ может быть получен исследованием энергетического состояния плазмы.

Хорошо известно, что для систем, в которых отсутствует диссипация энергии и возмущения носят апериодический характер, существует вариационный принцип, дающий возможность определить собственные частоты и условия устойчивости.

В настоящей работе сделана попытка оценить устойчивость диссипативных систем (на примерах плазменных сред) с помощью более общего соотношения энергетического баланса волн и среды.

В последнее время появился ряд работ Пригожина и др. (см., например, /I/, /2/), в которых предлагается вариационный принцип, учитывающий диссипативные эффекты.

Существо этого принципа сводится к следующему: если P - производство энтропии в системе, то условие

$$\frac{\partial P}{\partial t} \leq 0 \quad , \; P > 0$$

есть условие устойчивости термодинамической системы при отсутствии механического движения.

Определим

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int\limits_V dv \sum_i j_i \frac{\partial X_i}{\partial t} \qquad (I)$$

где j_i - обобщенные термодинамические потоки, а X_i - соответствующие им силы (интеграл берется по всему объему, занятому системой).

Если теперь переопределить j_i и X_i так, чтобы они наряду с тепловыми процессами включали механические - j_i' и X_i' и составить аналогичное соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\limits_V dv \sum_i j_i' \frac{\partial X_i'}{\partial t} \quad \text{, то,} \qquad (2)$$

если может быть найдена такая функция , для которой выполняется (2), тогда знак этой функции определяет полностью эволюцию системы.

Такая функция может быть найдена, вообще говоря, не всегда (см./I/).

Мы также отметим, что определение потоков и обобщенных сил j_i' и X_i' неоднозначно и требуется лишь соответствие их друг другу.

Из (2) видно, что

$$\Phi = \int dt \int dv \sum_i j_i' \frac{\partial X_i'}{\partial t} \qquad (2)$$

Если интеграл по времени можно определить (это равносильно определению функции Φ), то решение вопроса устойчивости сводится к оценке знака интеграла по объему.

Иногда подинтегральное выражение можно представить в виде квадратичной формы, оценив далее условия положительной определенности ее, которые и будут условиями устойчивости системы. Таков, в общих чертах, путь исследования устойчивости, предлагаемый Пригожиным и др.

В предлагаемом здесь формализме рассмотрен ряд задач. При этом оказывается, что если ввести понятие мощности, как $\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$ (ξ - смещение), то некоторый оператор $\hat{\Gamma}$, такой, что

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \hat{F}\xi \qquad (3)$$

полностью описывает устойчивость системы, он совпадает с функцией Φ и противоположен по знаку.

Правую часть (3) можно интерпретировать как мощность, перекачивающуюся волной в систему, либо из системы в волну (в зависимости от знака $\hat{F}$).

Тогда полная мощность определится как $\int\limits_V \hat{F}\xi\, dV$, а знак интеграла даст ответ на вопрос устойчивости системы.

II Перейдем теперь к некоторым конкретным приложениям.

Рассмотрим, как преобразуется известное условие Сайдема в неидеальной магнитной гидродинамике (учтем конечную проводимость σ).

Воспользуемся системой уравнений одножидкостного гидродинамического приближения.

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla(\vec{H}_1 \vec{\lambda} H_0) - \nabla p_1 + \vec{\lambda} H_0 (\nabla \vec{H}_1) + \rho_0 g \vec{\lambda}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0; \qquad \operatorname{div} \vec{H}_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = \vec{\lambda} H_0 (\nabla \vec{v}_1) + \nabla^2 \vec{H}_1 \frac{1}{\sigma}; \qquad \vec{\lambda} = (0,0,1) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 v_0) = 0$$

Можно показать (см., напр., /2/), что функция представляется для возмущений вида $\sim \exp \omega t$ следующим интегралом

$$\Phi = \frac{1}{4}\int (j_{1i}^{*} X_{1i} + j_{1i} X_{1i}^{*})\, dV \qquad (5)$$

(j_{1i}, X_{1i} – возмущенные величины обобщенных потоков и сил, $*$ – означает комплексное сопряжение).

ρ – плотность, v – массовая скорость

Подставляя в (5) выделенные обобщенные потоки и силы можно привести (5) к виду:

$$\Phi = -2\omega \int dv \left[\rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1^*) + (\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_1^*) \right] \tag{6}$$

Воспользовавшись, наконец, системой уравнений (4) из (6) получим:

$$\Phi = -\int \left\{ -[\vec{H}_0 \times \mathrm{rot}\,\vec{H}_1]\vec{v}_1 + \rho_1 \vec{g}\vec{v} + H_1^2 \right\} dV \tag{6I}$$

Положим для простоты пространственную зависимость возмущенных величин $\sim \exp(ik_y y + ik_z z)$. Тогда нетрудно получить следующее выражение для :

$$\Phi = \int v_1^2 \left[\frac{\omega k_z^2 H_0^2}{\left(\omega - \frac{k_y^2 c^2}{\sigma} - \frac{k_z^2 c^2}{\sigma}\right)^2} + \frac{\rho_0' g}{\omega} \right] dV \tag{7}$$

Подинтегральное выражение в (7) является вырожденной квадратичной формой по v_1 (с матрицей коэффициентов, состоящей из одного элемента). Условие неустойчивости ($\Phi < 0$) в этом случае примет вид:

$$\frac{\omega k_z^2 H_0^2}{\left(\omega - \frac{k_y^2 c^2}{\sigma} - \frac{k_z^2 c^2}{\sigma}\right)^2} + \frac{\rho_0' g}{\omega} < 0 \qquad \rho_0' \equiv \frac{d\rho_0}{dx} \tag{8}$$

Мы рассматриваем условие неустойчивости, т.к. положили вначале $\omega > 0$.

Из (8) следует, что при $\sigma \to \infty$ полученное условие переходит в классическое условие Сайдема.

Рассмотрим предельные случаи.

I) Большие σ .

Пренебрегая членами $\sim \frac{1}{\sigma^2}$, получим:

$$\omega < \frac{\rho_0' g \, \frac{c^2}{\sigma}(k_y^2 + k_z^2)}{\rho_0' g + k_z^2 H_{0z}^2} > 0 \tag{9}$$

Неравенство (9) показывает, что в этом случае критерий устойчивости не изменяется по сравнению с классическим $|\rho_0' g| < k_z^2 H_{0z}^2$, а учет конечной проводимости в первом приближении влияет на дисперсию.

2) Малые σ .

В пренебрежении свободными по $\frac{1}{\sigma}$ членами для ω имеем:

$$\omega^2 < -\frac{\rho_0' g \frac{c^2}{\sigma^2}(k_y^2+k_z^2)}{k_z^2 H_{0z}^2} > 0 \qquad (10)$$

т.е. в случае малой проводимости (сильный диссипативный фактор) вообще не существует аналога условия Сайдема, а вопрос устойчивости сводится к характеру магнитных поверхностей (знак $\rho_0' g$).

Характерно то, что полученное в неидеальной магнитной гидродинамике условие Сайдема (8) зависит от ω .

Это понятно, т.к. учет конечной проводимости, вообще говоря, приводит к изменению в распределении энергии по спектру частот.

Интерес представляет приложение описанного метода к анализу устойчивости в магнитных полях сложной геометрии.

Формально вопрос сводится к построению потенциала Φ . Магнитное поле выберем с периодической кривизной:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0}(1+\gamma\cos bz)\,; \quad \left\langle\frac{1}{R}\right\rangle = \frac{1}{R_0}$$

z - координата вдоль среднего направления поля. Тогда, используя уравнение (6^I), нетрудно показать, что

$$\Phi = \int\limits_V \Big[\frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\,\vec{H})^2 - \rho_0'\frac{v_T^2}{R_0}v_1^2 - 2\gamma\rho_0'\frac{v_T^2}{R_0}\left(v_1^2\cos\frac{b}{2}z\right)^2 + \gamma\rho_0'\frac{v_T^2}{R_0}v^2\Big]\,dV. \qquad (11)$$

Подинтегральное выражение (II) представляет квадратичную форму и вопрос о знаке Φ сводится к вопросу об условиях положительной определенности ее.

Известно, что квадратичная форма $\sum a_{ik}x_i x_k$ положительно определена, если главные миноры матрицы коэффициентов a_{ik} положительны.

Это приводит к соотношениям, нетривиальными из которых являются:

$$\frac{1}{6}\frac{\rho_0'}{R_0}v_T^2(\gamma-1)>0$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{\rho_0'}{R_0}\right)^2 v_T^4\gamma(\gamma-1)>0 \qquad (12)$$

v_T – тепловая скорость частиц.

Без "гофров" устойчивой является конфигурация $\frac{\rho_0'}{R_0}<0$; неравенства (12) определяют амплитуду периодической части кривизны поля, не нарушающую устойчивости в среднем – $\gamma<1$; этот результат может быть получен решением задачи на собственные значения (см./3/). Отметим, что при этом требуется определение собственных значений уравнения Матье (для полей периодической кривизны).

Более сложная геометрия поля сильно усложняет эту задачу. В то же время вариационный подход достаточно прост и пригоден без значительных изменений к рассмотрению полей произвольной геометрии.

Покажем теперь, что этот результат может быть получен из соображений энергетического баланса без привлечения формализма Пригожина и др.

Действительно, используя уравнения (4) и записывая закон Ома в виде $\vec{j}=\sigma\vec{E}$, при условии $\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$ можно получить выражение для функции "мощности"

$$P(\xi)=-\left(\frac{k_z}{k_y}\right)^2\frac{\sigma H_0^2}{c^2}\frac{\partial\xi}{\partial t}-Mn_0'g\xi, \qquad Mn_0'\equiv\rho_0'$$

здесь возмущения взяты в виде $\sim\exp(i\omega t+ik_yy+ik_zz)$ Рассмотрим $\int P(\xi)\,dV$, который можно интерпретировать как полную мощность, перекачиваемую из системы в возмущение или наоборот (в зависимости от его знака).

В магнитном поле периодической кривизны правая часть выражения для $\int\limits_V P(\xi)\,dV$ примет вид:

$$\int\limits_V P(\xi)dV=\omega^2\int\Big[\frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{\sigma H_0^2}{c^2}\xi^2+\frac{\rho_0'\bar{g}}{\omega}\xi^2+\frac{2\gamma\rho_0'\bar{g}}{\omega}\left(\xi\cos\frac{\theta}{2}\xi\right)^2 \qquad (13)$$
$$-\gamma\frac{\rho_0'\bar{g}}{\omega}\xi^2\Big]\,dV.$$

$$\bar{g}\equiv\frac{v_T^2}{R_0}.$$

Причем, $F(\xi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$.

Оценивая правую часть (I3) на знаковую определенность, легко получить соотношение:

$$\frac{g k_0}{\omega \omega_s}(\gamma - 1) > 0 \quad , \qquad \omega_s \equiv \left(\frac{k_z}{k_y}\right)^2 \frac{6 H_0^2}{c}; \ k_0 \equiv \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial x}.$$

откуда сразу следует полученный выше результат.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + i\omega_i \frac{\partial \xi}{\partial t} - g k_0 \xi = 0 \tag{I4}$$

(ω_i - дрейфовая ионная частота, $\omega_i \equiv k_y k_0 \frac{c T_0}{e H_0}$ [4]).

Уравнение (I4) описывает, как известно, желобковые колебания с учетом конечного ларморовского радиуса ионов. Легко видеть, что это уравнение не описывает диссипацию (сохраняется полная аналогия с уравнением осциллятора с собственной частотой $\sqrt{g k_0}$ в магнитном поле с "ларморовской" частотой ω_i).

Предположим, что частоты волн, описываемых (I4) - комплексны

$$\omega = \omega' + i\gamma$$

и введем оператор:

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega' + \frac{\partial}{\partial t}$$

Тем самым мы сразу же отделим от фона часть, ответственную за его устойчивость. Тогда (I4) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\omega'^2 + \omega_i \omega' + g k_0)\xi - i(2\omega' + \omega_i)\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Умножая это выражение на $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, проинтегрируем по объему:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dV = \int \Big[(\omega'^2 + \omega_i \omega' + g k_0)\xi^2 \gamma - \\ - i(2\omega' + \omega_i)\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2\Big] dV. \tag{I5}$$

Левая часть уравнения (I5) есть изменение энергии в системе и представляет собой величину существенно действительную. Условие действительности правой части:

$$2\omega' + \omega_i = 0 \quad , \text{т.е. } \omega' = -\frac{\omega_i}{2}$$

Подставляя в (I5), получим:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 dv = \int \gamma \left(\frac{\omega_i^2}{4} + g k_0\right) \xi^2 dV \tag{16}$$

Так как левая часть (16) есть изменение энергии возмущения за счет перекачки в среду, то условие устойчивости возмущения ($\gamma > 0$)

$$\frac{\omega_i^2}{4} + g k_0 > 0. \tag{17}$$

В качестве следующего примера рассмотрим устойчивость дрейфово-диссипативной моды /5/.

Она описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \omega_s \frac{\partial \xi}{\partial t} - i \omega_s \omega_e \xi = 0 \tag{18}$$

ω_e – электронная дрейфовая частота, $\omega_e = k_y k_0 \frac{c T_0}{e H}$.

Преобразование, аналогичное проведенному для уравнения (14), дает:

$$\int P(\xi) dV = \int dV \left[-i \left(2\omega' \gamma^2 + \omega_s \omega_e \gamma - \omega_s \omega' \gamma \right) \xi^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\omega'^2 \gamma - \omega_s \gamma^2 \right) \xi^2 \right]. \tag{19}$$

Из равенства нулю мнимой части подинтегрального выражения имеем:

$$\omega' = \frac{\omega_s \omega_e}{\omega_s - 2\gamma}$$

Если $\gamma \ll \omega_s$, то условие устойчивости принимает вид:

$$\omega_e^2 - \omega_s \gamma > 0 \tag{20}$$

На границе устойчивости $\gamma \simeq \frac{\omega_e^2}{\omega_s}$. Требование $\gamma \ll \omega_s$ приводит к условию

$$\omega_e \ll \omega_s ,$$

что противоречит (20). Тем самым показана абсолютная неустойчивость решений уравнения (18).

Литература

I. P. Glansdorf, I. Prigogine Physica, 30, 351, 1964

2. I. Prigogine Physica, 31, 719, 1965

3. H. Furth, J. Killen, M. Rosenbluth, B. Coppi Plasma Physics and controlled Nuclear Fusion Research Vol. 1, p. 103, Vienna 1966

4. M.N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker Nuclear Fusion supplement Part 1, p. 143, 1962

5. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. "Теория устойчивости неоднородной плазмы". "Атомная энергия", т.I5,вып.6,стр.45I, I963.

Ответственный за выпуск С.М.ЗАСЛАВСКИЙ
Подписано к печати 2.X-1967 г.
Усл. 0,5 печ.листа, тираж 250 экз. БЕСПЛАТНО
Заказ № 166

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР