

Ф 1.7.

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 146

В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе

**Полный спектр тормозного излучения
ультрарелятивистских электронов**

г.Новосибирск 1967

1. В последние время процесс тормозного излучения фотона при электрон-электронных и электрон-позитронных столкновениях исследовано в опытах на точечных лучах e^-e^- и e^-e^+ . Особенность этого процесса представляет значительный интерес, поскольку он может быть использован для мониторинга состояния пучков, а также с точки зрения явления радиационных потерь. В работе авторов e^-e^- (см. также e^-e^+) получен спектр в угловом распределении излучения фотона, пригодное для всех энергий фотона.

В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе

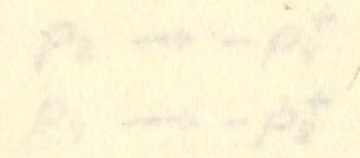
ПОЛНЫЙ СПЕКТР ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

В данной работе исследовано излучение фотона при столкновении ультрарелятивистских электронов и позитронов. Получены сечения тормозного излучения, пригодные для всех энергий фотона. Найдено, что в конце спектра сечение тормозного излучения при электрон-позитронном соударении заметно превышает соответствующее сечение для электрон-электронных соударений.

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено тормозное излучение при столкновении ультрарелятивистских электронов и позитронов, включая жесткий конец спектра. Получены сечения тормозного излучения, пригодные для всех энергий фотона. Найдено, что в конце спектра сечение тормозного излучения при электрон-позитронном соударении заметно превышает соответствующее сечение для электрон-электронных соударений.

2. Процесс тормозного излучения в электрон-электронных (электрон-позитронном) столкновениях описывается в e^-e^- приближении теорией возмущений 8 диаграмм (рис.1), где каждая диаграмма соответствует двум фейнмановским диаграммам с излучением фотона до и после соударения. В случае электрон-позитронных столкновений необходимо добавить еще две диаграммы.



*) Во всей работе рассматривается тормозное излучение в с.ц.н. начальных частиц, использованы обозначения рис.1.

THE TOTAL SPECTRUM OF BREMSSTRAHLUNG OF ULTRARELATIVISTIC
ELECTRONS

V.N. BAIER, V.S. FADIN, V.A. KHOZE

A b s t r a c t

The bremsstrahlung in collisions of high energy electrons and positrons has been considered including hard end of the spectrum. The cross-sections of bremsstrahlung have been calculated, which are fit for all energies of photons. It is found, that at end of the spectrum the cross-section of bremsstrahlung in electron-positron collisions appreciably exceed that in electron-electron collisions.

1. В последнее время процесс тормозного излучения фотона при электрон-электронных и электрон-позитронных столкновениях интенсивно исследуется в опытах на встречных пучках [5], [6]. Исследование этого процесса представляет значительный интерес, поскольку он может быть использован для мониторинга столкновения пучков, а также с точки зрения изучения радиационных поправок. В работе авторов [1] (см. также [4]) получены спектр и угловое распределение излученных фотонов, пригодные для всей области частот, кроме конца спектра^{х)}

$$E - \omega \gg m \quad (1)$$

тогда как в конце спектра энергия фотона

$$\omega_{\max} = E - m \frac{m}{E} \quad (2)$$

В данной статье рассмотрен жесткий конец спектра излученных фотонов и получены общие выражения, описывающие весь спектр тормозного излучения ультрарелятивистских электронов. Во всей работе мы будем систематически разлагать все величины по степеням m^2/E^2 и оставлять только старшие члены разложения. Как будет видно ниже, конец спектра излучения обладает интересной спецификой, в частности сечения тормозного излучения при электрон-электронных и электрон-позитронных столкновениях, совпадающие при выполнении условия (1), заметно различаются в конце спектра. Существенность отдачи и наличие интерференции приводят к значительному качественному отличию рассматриваемого случая от конца спектра тормозного излучения электрона в кулоновском поле.

2. Процесс тормозного излучения в электрон-электронном (электрон-позитронном) столкновении описывается в e^e приближении теории возмущений 8 диаграммами (рис.1), где каждая диаграмма соответствует двум фейнмановским диаграммам с излучением фотона до и после соударения. В случае электрон-позитронных столкновений необходимо провести замену:

$$\begin{aligned} p_2 &\rightarrow -p_4^+ \\ p_4 &\rightarrow -p_2^+ \end{aligned} \quad (3)$$

х) Во всей работе рассматривается тормозное излучение в с.ц.и. начальных частиц, использованы обозначения статьи [1].

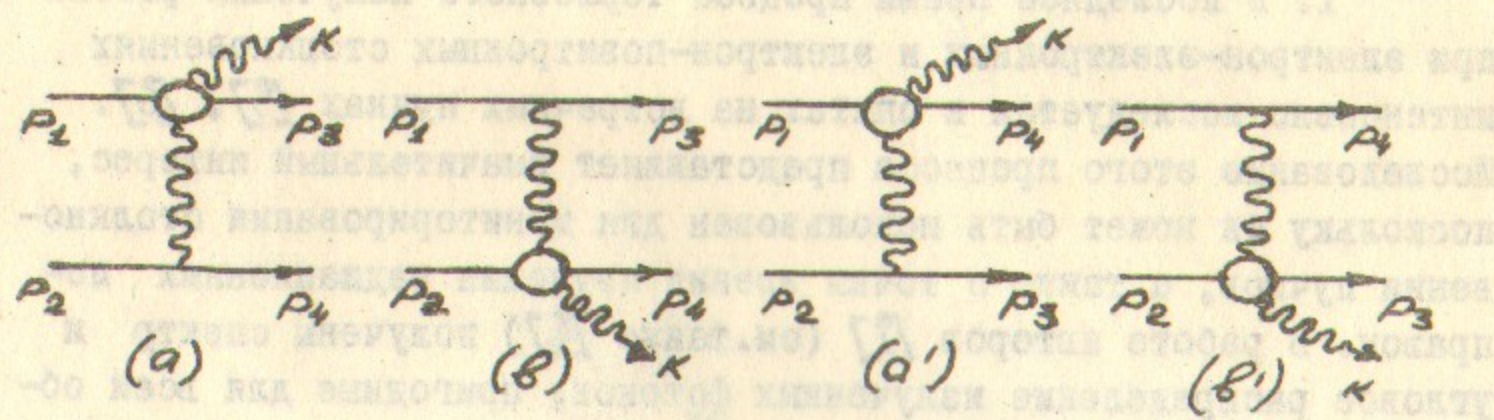


Рис. I.

В работе [1] было показано, что при выполнении условия (2) с точностью до членов порядка m^2/E^2 , необходимо рассматривать только вклады квадратов матричных элементов диаграмм a, b, a', b' для электрон-электронных столкновений, диаграмм a, b для электрон-позитронных столкновений. С указанной точностью всеми интерференционными членами можно пренебречь. Для диаграмм рассеяния обоих процессов это обстоятельство связано с тем, что 1) существенный вклад дают только малые углы рассеяния; 2) все частицы являются ультррелятивистскими и излучают в узкие конуса с углом $\sim \frac{m}{E}$, в результате интерференция между диаграммами, связанная с перекрытием конусов, оказывается $\sim m^2/E^2$. По этой же причине не дает вклада интерференция прямых и обменных диаграмм в случае электрон-электронных соударений. Вклад аннигиляционной диаграммы и интерференции аннигиляционных диаграмм и диаграмм рассеяния для электрон-позитронных соударений выпадает из-за большой величины передачи импульса ($\sim E^2$) на аннигиляционной диаграмме.

В конце спектра положение существенно меняется. При энергии фотона

$$\omega = \frac{2E(E-m)}{2E-m} \quad (3)$$

одна из конечных частиц, излучив жесткий фотон, может остановиться. В самом конце спектра при $\omega = \omega_{\max}$ (2) обе конечные частицы летят по одной прямой в направлении обратном направлению импульса фотона. Вследствие этого отбор членов, дающих вклад с указанной точностью ($\sim m^2/E^2$), становится иным. Правда, интерференция вкладов диаграмм, на которых излучают разные начальные частицы ($(a, b), (a', b), (a, b'), (a', b')$) для электрон-

-электронных соударений и ($(a, b), (a, b'), (b, b')$ для электрон-позитронных соударений) не дает вклада по той же совокупности причин. Интерференция вкладов диаграмм (a', b') для электрон-позитронных соударений точно равна 0 [3]. Ничего не вносит также квадрат вклада аннигиляционной диаграммы, на которой излучают конечные частицы, вследствие большой величины передачи импульса. Однако квадрат вклада аннигиляционной диаграммы, на которой излучают начальные частицы отнюдь не мал из-за того, что в конце спектра передача импульса становится порядка m^2 (см. [7]), не исчезают также интерференционные вклады диаграмм, на которых излучает одна и та же начальная частица ($a, a'), (b, b')$ для электрон-электронных и ($a, a'), (b, a')$ для электрон-позитронных соударений). Более точные оценки порядка отброшенных членов с помощью неравенства Шварца даны в разделе 7.

3. Найдем теперь вклад квадрата матричного элемента диаграммы a , который одинаков для обеих рассматриваемых процессов. Точное выражение для вклада диаграммы a получено в [2] (формула (4)), а в случае выполнения условия (1) приближенное выражение с точностью до членов $\sim m^2/E^2$ приведено в [1] (формула (1)).

Мы выпишем теперь члены, дающие вклад в спектр излучаемых фотонов с точностью до членов $\sim m^2/E^2$, пригодное для всех энергий фотона, включая и конец спектра.

$$d\sigma_s = \frac{z_0^2 \alpha}{\pi v^3} \int \frac{dx_1 dx_2 dx_3 d\Delta^2}{\Delta^4 \sqrt{S}} \left\{ -\frac{2v^2}{x_3^2} + \frac{1}{x_1 x_3} \left[4v^2 \left(1 - \frac{x_2}{v}\right) + \Delta^2 v^2 \left[\left(1 - \frac{x_2}{v}\right)^2 + 1 \right] - \frac{2v^2}{x_1^2} \left(1 - \frac{x_2}{v}\right)^2 - \frac{x_1}{x_3} - \frac{x_3}{x_1} - \Delta^2 \left(\frac{v}{x_1} - \frac{x_3}{2x_1} \right) \right] \right\} \quad (4)$$

где

$$v = -(p_1 p_2), \quad x_i = -(k p_i), \quad \Delta = p_2 - p_4$$

$$x = x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$S = - [Q_i x_i^2 - 2P_i x_i + R_i] \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

причем Q_3, P_3, R_3 совпадают с Q, P, R работы [1] соответственно (формула (5)), а Q_1, P_1, R_1 равны величинам Q, P, R работы [2] (формулы (33), (34)) соответственно, если каждую из

и обращается в точке конца спектра в 0 как $\sqrt{\xi}$. Заметим, что величина $\sqrt{\xi}$ пропорциональна импульсу конечной частицы в с.ц.и. конечных частиц.

Вклад диаграммы \mathcal{B} в спектр, естественно, равен вкладу диаграммы \mathcal{A} , он соответствует излучению вдоль частицы \mathcal{L} . Обменные диаграммы дают в спектр такие же вклады, как и прямые, но в силу тождественности частиц полный вклад следует разделить на 2, так, что полный вклад в спектр квадратов матричных элементов диаграмм есть $2d\sigma_s$.

4. Перейдем к рассмотрению интерференционных членов для случая электрон-электронных соударений. Мы уже отмечали, что в точке конца обе конечные частицы движутся в одну сторону с одинаковыми импульсами. Поэтому прямая и обменная диаграммы при излучении данной частицы дают одинаковые вклады и интерференция между ними существенна. Отсюда же следует, что в точке конца спектра в силу принципа Паули конечные электроны не могут находиться в одинаковых спиновых состояниях. Итак, мы должны рассмотреть интерференцию вкладов диаграмм $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$; вклады обеих интерференционных членов в спектр одинаковы, а полный вклад, как уже отмечалось, следует разделить на 2. Таким образом достаточно найти вклад интерференции диаграмм $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$. Выпишем теперь члены, дающие вклад в спектр

$$d\sigma_{ei} = -\frac{z_0^2 \alpha}{\pi v^3} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4}{\sqrt{S' \Delta^2 \Delta'^2}} \left\{ -\frac{v}{\alpha_1} + \frac{v\alpha}{\alpha_3} + \frac{v\alpha}{\alpha_4} - \frac{\Delta^2 \alpha^2}{2\alpha_1 \alpha_3} - \frac{\Delta'^2 \alpha^2}{2\alpha_1 \alpha_4} \right\} \quad (13)$$

где $\Delta' = p_2 - p_3, \Delta'^2 = -\Delta^2 + 2(\rho + \alpha_1)$

Проводя интегрирование в соответствующей последовательности (см. предыдущий раздел), получаем вклад интерференции в спектр при электрон-электронном соударении

$$d\sigma_{ei} = z_0^2 \alpha \frac{d\xi}{\xi} \left\{ -\frac{L}{\rho} \ln(1+2\rho) + \sqrt{3} \left[\frac{L^2}{\rho} + \frac{\rho}{\rho^2} \left(\frac{L^2}{4} - \frac{(1+\frac{E}{\rho})L\sqrt{\lambda\rho}}{2(\sqrt{2\lambda}-1)} + 2\sqrt{2\lambda} \frac{E}{\rho} \ln(\sqrt{2\lambda}-1) \right) \right] + 2\sqrt{2}g_1 - 2g_2 \right\} \quad (15)$$

здесь

$$g_1 = \frac{1}{\rho^{3/2}} \left[-2 \ln(\sqrt{2\lambda}-1) + \frac{L_1 \sqrt{2\rho}}{\sqrt{2\lambda}-1} - \ln z^{1/2} \operatorname{arctg} z^{1/2} + \ln z^{3/2} \operatorname{arctg} z^{3/2} + \int_{z^{3/2}}^{z^{1/2}} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} dy \right]$$

$$g_2 = \frac{1}{\rho} \left[2F(z) - F(z(1+2\rho)) - F\left(\frac{z}{1+2\rho}\right) + \frac{\ln^2(1+2\rho)}{2} \right] \quad (16)$$

где

$$z = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \quad L_1 = -\ln z, \quad F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy \quad (17)$$

Входящий в g_1 интеграл не берется в элементарных функциях, однако он может быть представлен в виде быстро сходящегося ряда, удобного для проведения расчетов

$$\int \frac{\operatorname{arctg} y}{y} dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (18)$$

При $\rho \ll 1$ имеем

$$g_1 = \frac{5}{8} \sqrt{\rho} + \dots, \quad g_2 = 2\sqrt{2}\rho + \dots \quad (19)$$

при $1 \ll \rho \ll \nu$

$$g_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\ln 2\rho + 2}{\rho^2} + \dots, \quad g_2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\ln^2 2\rho}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) + \dots \quad (20)$$

Весь интерференционный вклад при $\rho \ll 1$ имеет вид

$$d\sigma_{ei} = -4z_0^2 \alpha \frac{d\xi}{\xi} \sqrt{3}, \quad \xi \ll 1 \quad (21)$$

Полный спектр тормозного излучения при электрон-электронном столкновении есть

$$d\sigma_e = 2d\sigma_s + d\sigma_{ei} \quad (22)$$

и дается формулами (10), (15). При $\rho \ll 1$ спектр тормозного излучения дается формулами (12), (21).

Полное дифференциальное по углам и частотам сечение получается при подстановке найденных величин в формулу (22).

6. Перейдем теперь к случаю тормозного излучения при электрон-позитронном соударении. В этом случае в сечение входят квадраты вкладов диаграмм рассеяния (такие же, как и в случае электрон-электронного рассеяния), квадрат вклада аннигиляционной диаграммы, на которой излучает начальная частица, и интерференционные члены между указанными диаграммами. Квадрат вклада аннигиляционной диаграммы найден в [3] (формула (25,2)), с учетом принятого нами ультрарелятивистского приближения он имеет вид

$$d\sigma_a = \frac{2z_0^2 \alpha}{\lambda} \frac{d\xi}{\xi} \left(1 - \frac{\eta}{3}\right) \sqrt{\eta} \left[\ln(2E) - \frac{1}{2} \right] \quad (27)$$

Отметим, что из сохранения зарядовой четности пара частиц на этой диаграмме в самом конце спектра рождается в триплетном состоянии.

Выпишем теперь интерференционные члены, дающие вклад в спектр

$$d\sigma_{pi} = \frac{z_0^2 \alpha}{2\pi v^3} \frac{1}{\lambda} \int \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\Delta^2}{\Delta^2 \sqrt{S'}} \left\{ \alpha_1 + v - \Delta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_1} \left[\alpha_3 (2\lambda - 1) - \alpha (v - \alpha) - \frac{\lambda \alpha_3^2}{v} + \frac{\Delta^2}{2} (2\alpha - \alpha_3 - \Delta^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_2} \left[-2v^2 - v\alpha_4 - \alpha_4^2 + \frac{\Delta^2}{2} (8v - 3\alpha_3 - 2\Delta^2) \right] + \frac{v}{\alpha_3} \left(-v - \alpha_1 + \frac{3\Delta^2}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta^2}{2\alpha_2 \alpha_3} \left[-\alpha^2 + \Delta^2 \left(v - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} \left[2v^3 - 3v^2 \Delta^2 + \frac{\Delta^4}{2} \left(3v - \frac{\Delta^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (28)$$

Интегрирование этого выражения производится так же, как и в случае электрон-электронных соударений. В итоге получаем

$$d\sigma_{pi} = \frac{z_0^2 \alpha}{\lambda} \frac{d\xi}{\xi} \left\{ \frac{L}{8} \left[5 + \eta + 2 \ln(2\lambda) - \frac{1+\eta}{\sqrt{\eta}} L \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\eta}}{2} + F\left(\frac{1+\sqrt{\eta}}{2}\right) - F\left(\frac{1-\sqrt{\eta}}{2}\right) \right\} \quad (29)$$

где величина L определяется формулой (II), а функция Спенса $F(x)$ — формулой (I7). При $\rho \ll 1$ имеем

$$d\sigma_{pi} = 0 + z_0^2 \alpha \frac{d\xi}{\xi} O(\xi^{3/2}, \xi^{1/2}) \quad (30)$$

Полное выражение, пригодное для всего спектра тормозного излучения при электрон-позитронном соударении есть

$$d\sigma_p = z d\sigma_s + d\sigma_a + z d\sigma_{pi} \quad (31)$$

и дается формулами (10), (27), (29). Вблизи конца спектра в (31) надо соответственно подставить (12), (27).

7. Сделаем несколько замечаний относительно методики отбора старших членов с помощью неравенства Шварца. Для проведения отбора необходимо выделить старшие члены в точных квадратах матричных элементов диаграмм рассеяния. Проведенный строгий анализ показывает, что таким старшим членом с точностью до логарифмического фактора в дифференциальном по углу и частоте фотона сечении является как и в [1]

$$z_0^2 \alpha \frac{d\xi d\xi_1}{\xi^2 \nu} \quad (32)$$

Оказывается, что оценка по неравенству Шварца для интерференции диаграмм рассеяния для обоих процессов не зависит от частоты фотона и имеет тот же вид, что формула (20) в работе [1], аналогично показывается исчезновение вкладов интерференции диаграмм (a', b') , (a, b') , (a', b) для случая электрон-электронных соударений. Для оценки вкладов интерференции диаграммы b' (излучение конечными частицами) и диаграмм a, b , для электрон-позитронных соударений воспользуемся формулой (35,2) работы [3]. Старший член в дифференциальном сечении излучения конечными частицами имеет вид

$$d\sigma \sim \frac{z_0^2 \alpha}{\nu} \frac{d\xi d\xi_1}{\xi^2} \quad (33)$$

так что его порядок есть $1/\nu$. Но тогда вклад интерференции указанных диаграмм не превышает

$$\frac{1}{\nu} \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \sim \frac{1}{\nu} \quad (34)$$

и, следовательно, отбрасывается как величина порядка $\frac{1}{\nu}$ (а не $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, как полагали авторы статьи [4]).

8. Проведем обсуждение полученных результатов. Отметим, прежде всего, что в конце спектра квадрат вклада аннигиляционной диаграммы (формула (27)) содержит "большой" логарифм $\ln(2\nu)$, в то время как все остальные вклады в сечение обоих процессов его не содержат. Поэтому в конце спектра сечение тормозного излучения в электрон-позитронном соударении заметно превышает сечение тормозного излучения при электрон-электронном соударении^{x)}. Это обстоятельство связано с тем, что интегрирование по углам вылета фотона на диаграмме (a') в случае электрон-позитронных соударений проводится при постоянной передаче, т.е. вклад дает вся область изменения углов вылета фотона. В то же время для диаграмм рассеяния при $\rho \sim 1$ передача растет с ростом α_1 (в пределе область интегрирования вырождается в прямую $\Delta^2 = \alpha_1$). Это связано с тем, что при $\rho \sim 1$ обе конечные частицы летят в одну сторону, противоположную направлению вылета фотона, с ростом α_1 (отклонением направления вылета фотона от \vec{p}_1) увеличивается угол между векторами \vec{p}_2 и \vec{p}_4 , что приводит к росту Δ^2 .

Эти соображения указывают также, что угловое распределение фотонов в обоих случаях имеет пики в направлении движения начальных частиц при любой энергии фотонов, включая конец спектра, но в конце спектра угловое распределение тормозных фотонов в случае электрон-позитронных соударений заметно шире, чем в случае электрон-электронных соударений.

Форма концов спектра для конкретной энергии $E = 2000$ приведена на рис.3. Здесь нанесены: I) сечение тормозного излучения, вычисленное в работе [1] (I)

$$d\sigma_c = 4z_0^2 \alpha \frac{d\xi}{\xi} (1-\xi) \left[\frac{1}{1-\xi} + 1-\xi - \frac{2}{3} \right] \left(2 \ln \frac{4E^2(1-\xi)}{\xi} - 1 \right) \quad (35)$$

x) На особенность конца спектра излучения начальной частицей при аннигиляции указано в работе [7].

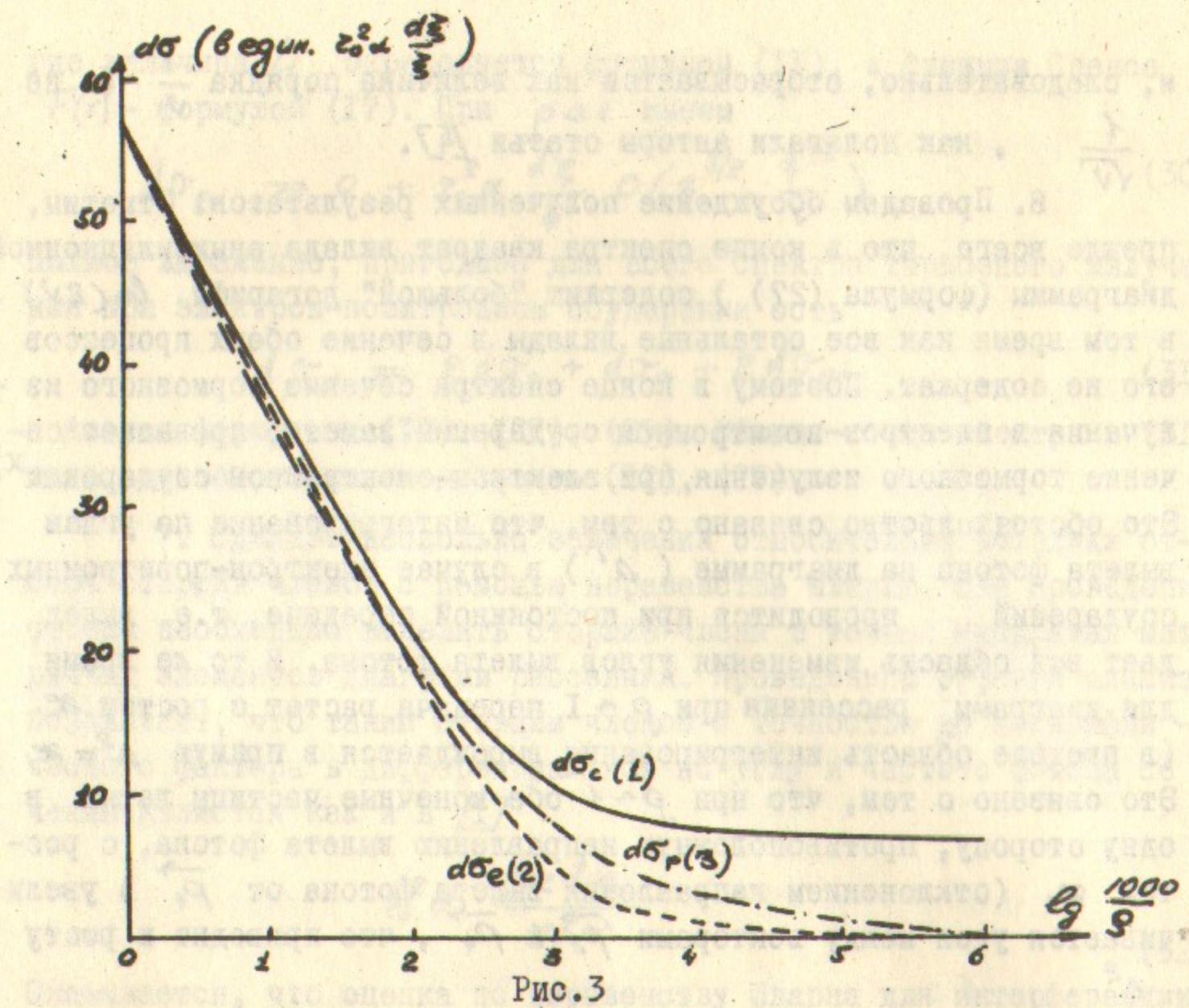


Рис. 3

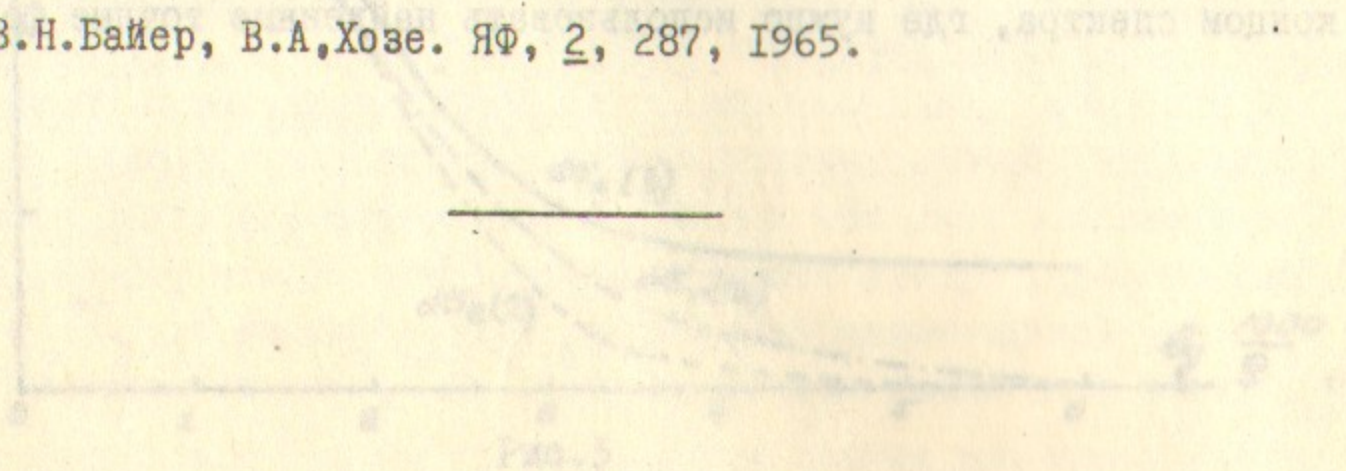
2) сечение тормозного излучения (22) (2) $d\sigma_e$, 3) сечение тормозного излучения (31) (3) $d\sigma_p$. Первое из этих сечений имеет одну и ту же форму для электрон-электронных и электрон-позитронных соударений в с.ц.и. и л.с. и для тормозного излучения на кулоновском поле (с точностью до релятивистского пересчета энергии в аргументе логарифма). Этот факт связан с тем, что основной вклад дают малые передачи Δ^2 и малые углы рассеяния. В конце спектра положение существенно меняется. Во-первых вследствие отдачи появляется кинематическое отличие тормозного излучения при столкновении электронов и при рассеянии на кулоновском поле (для граничной частоты $E - \omega = \frac{1}{E}$ в первом случае и $E - \omega = 1$ во втором), во-вторых становится существенной интерференция и излучение при аннигиляции (для электрон-позитронных соударений). Поэтому $d\sigma_s$ (10) не совпадает с ультрарелятивистским пределом формулы для сечения тормозного излучения на кулоновском поле, кроме того $d\sigma_e$ (22) и $d\sigma_p$ (31) содержит дополнительные слагаемые. На рис. 3 видно, что в соответствии со сделанными выше утверждениями в конце спектра сечение тормозного излучения при

электрон-позитронном соударении при этой энергии в несколько раз превышает сечение при электрон-электронном соударении. Отметим, что последняя особенность усилена тем, что во втором случае $d\sigma_{ei}$ (15) меняет вблизи конца спектра знак и становится отрицательным.

Отметим в заключение, что отличие сечений (22), (31) от приближенной формулы (35) по существу становится заметным лишь при $\rho \ll E$, т.е. $E - \omega \ll 1$. Эта область частот вносит весьма малый вклад в интегральное по частоте сечение, поскольку нами показано, что в конце спектра нет локальных возрастаний сечения. Поэтому аппроксимация всего спектра формулами типа (35) является достаточно хорошей, если только не интересоваться специально концом спектра, где нужно использовать найденные точные формулы.

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе. ЖЭТФ, 51, 1137, 1966.
2. В.Н.Байер, В.М.Галицкий. ЖЭТФ, 49, 661, 1965.
3. В.Н.Байер, В.А.Хозе. ЖЭТФ, 48, 946, 1965.
4. G.Altarelli, F.Buchella. Nuovo Cimento, 34, 1337, 1964.
5. Н.И.Голубничий, Е.А.Кушниренко, А.П.Онучин, В.А.Сидоров. Ядерная физика (в печати).
6. C. Bernardini, G. Corasa, G. Di Giugno, J. Haissinski, P. Marin, R. Querzoli, B. Touschek. Nuovo Cimento, 34, 1473, 1964.
7. В.Н.Байер, В.А.Хозе. ЯФ, 2, 287, 1965.



Ответственный за выпуск КАТКОВ В.М.

Подписано к печати 15.УП-1967г.

Усл. 0,8 печ.листов, тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № I46

Отпечатано на роталпринте в ИЯФ СО АН СССР