ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 119

В.Н.Байер, В.М.Катков

Квантовые эффекты в магнито-тормозном излучении

г.Новосибирск 1967

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Препринт

В.Н.Байер, В.М.Катков

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МАГНИТО-ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Новосибирск
1967

А Н Н О Т А Ц И Я

Предложен операторный метод рассмотрения квантовых эффектов при движении заряженных частиц в магнитном поле. С помощью этого метода рассмотрены квантовые явления в магнито-тормозном излучении.

Исследование квантовых эффектов при излучении заряженных частиц в магнитном поле представляет большой интерес как в силу важности учета этих эффектов в приложениях (например при движении частиц в ускорителях), так и с общетеоретической точки зрения.

Рассмотрение этих эффектов проводится обычно с использованием точных решений соответствующих волновых уравнений (Дирака, Клейна-Гордона) в постоянном и однородном магнитном поле. Такой подход является весьма сложным и громоздким технически и позволяет получить результаты только в однородном и постоянном магнитном поле. Когда для изучения некоторых явлений понадобилось рассмотреть квантовые эффекты в неоднородном поле, это привело к резкому усложнению вычислений даже в слабо неоднородном поле (полный обзор этих работ см. в [1]). В то же время даже при использовании точных решений волновых уравнений для получения результата в итоге берутся квазиклассические асимптотики найденных функций, так что в этом смысле все полученные результаты являются приближенными. Как будет видно ниже, это обстоятельство не является случайным.

В данной работе предлагается операторный метод рассмотрения квантовых эффектов при движении заряженных частиц в магнитном поле. Этот метод пригоден для рассмотрения любых квантовых явлений в магнито-тормозном излучении, а также для исследования любых других процессов с участием заряженных частиц и фотонов в магнитном поле (рождение пары фотоном, однофотонная аннигиляция пары и т.д.). Метод достаточно прост технически и позволяет единым образом получить результаты для частиц с произвольным спином при движении в произвольном неоднородном магнитном поле.

В основе метода лежит то обстоятельство, что квантовые эффекты при движении ультрарелятивистских частиц в магнитном поле бывают двух типов. Первый из них связан с квантовым характером самого движения частиц в магнитном поле. Возникающая при этом некоммутативность динамических переменных частицы имеет порядок

$\hbar\omega_0/E$ (где $\omega_0 = \frac{v_t}{R}$, R - мгновенный радиус кривизны, E - энергия частицы; в дальнейшем используется система единиц $\hbar$ = c = I). Отсюда следует, что с ростом энергии движение частицы в магнитном поле становится все более "классическим".

Второй связан с отдачей частицы при излучении и имеет порядок $\hbar\omega/E$ (ω - частота излученного фотона).

Квантовые эффекты в магнито-тормозном излучении удобно характеризовать параметром

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{P_t}{m} = |\dot{\vec{v}}|\frac{\gamma^2}{m} \qquad \text{(I)}$$

здесь P_t - импульс, перпендикулярный направлению магнитного поля, $\gamma = E/m$, $H_0 = \frac{m^2}{e} = 4{,}41 \cdot 10^{13}$ э, H - магнитное поле. При $\chi \ll 1$ отдача (а значит и величина квантовых эффектов) мала, в этом случае $\omega \sim \omega_0\gamma^3$. В существенно квантовой области $\chi \gtrsim 1$, $\omega \sim E$. Отсюда следует, что при любых χ квантовые эффекты первого типа ничтожно малы по сравнению с эффектами излучения. Поэтому мы будем пренебрегать некоммутативность операторов динамических переменных частицы и учитывать только некоммутацию их с полем излученного фотона. Кроме того мы будем систематически разлагать все величины по степеням $1/\gamma$ и оставлять старшие члены разложения.

Выражения для интенсивности излучения dI и вероятности процесса dW имеют в низшем порядке теории возмущений вид

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^2}\langle i|\int dt_1\int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)}M^*(t_2)M(t_1)|i\rangle \qquad (2)$$

$$dW = \frac{dI}{\omega}$$

где

$$eM(t) = \Psi_f^+(\vec{\mathcal{P}}(t))\left\{(je), e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right\}\Psi_i(\vec{\mathcal{P}}(t)) \qquad (3)$$

здесь $j_\mu(t)$, $\vec{r}(t)$ - соответственно операторы тока и координаты частицы, e_μ - вектор поляризации фотона, скобки $\{\ ,\ \}$ означают симметризованное произведение операторов; $\Psi(\vec{\mathcal{P}}(t))$ - волновая функция частицы с данным спином в произвольном электромагнитном поле в операторной форме, $\mathcal{H} = \sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2}$, $\vec{\mathcal{P}}(t)$ операторы энергии и импульса во внешнем поле, индексы f и i относятся к спиновым характеристикам частицы.

В соответствии со сказанным выше в выражении для M следует учитывать только коммутаторы поля фотона ($e^{-i\vec{k}\vec{r}}$) с импульсом $\vec{\mathcal{P}}$. Воспользовавшись соотношением

$$\vec{\mathcal{P}}e^{-i\vec{k}\vec{r}} = e^{-i\vec{k}\vec{r}}(\vec{\mathcal{P}} - \vec{k}) \qquad (4)$$

можно в $M(t_1)$ вынести $e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ налево, а в $M^*(t_2)$ соответственно $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}$ направо. После этого необходимо рассмотреть возникшую комбинацию $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$. Некоммутативность входящих сюда операторов $\vec{r}(t_2)$ и $\vec{r}(t_1)$ является существенной, так что нельзя ограничиться разложением по низшим коммутаторам. Центральным пунктом работы является распутывание указанной комбинации. При этом крайне важно, что в существенной области можно провести разложение всех величин по степеням $|\dot{\vec{v}}|\tau \sim 1/\gamma$ $(\tau = t_2 - t_1)$. Для простоты рассматриваются поля удовлетворяющие критерию $|\dot{\vec{H}}|\tau/|\vec{H}| \ll 1$ (поле мало меняется на характерной длине излучения), если вводить показатель неоднородности n, то это условие имеет вид $n/\gamma \ll 1$. Во всех интересных случаях поля удовлетворяют этому критерию. С учетом этого обстоятельства, задача сводится к интегральному уравнению, решая которое получаем:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)} = e^{i\omega\tau}\exp\left\{i\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\omega}\left[-\omega\tau + \vec{k}(\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1))\right]\right\} \qquad (5)$$

Можно показать, что с нашей точностью комбинация $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ может быть вынесена к обкладкам. Тогда все операторы в (2), стоящие в обкладках начального состояния, можно заменить на их классические значения.

Последующий расчет проводится как в классической задаче магнито-тормозного излучения (см.напр., [2]). Проводя в (2) интегрирование по относительному времени $\tau = t_2 - t_1$ и азимутальному углу вылета фотона, получаем спектральное и угловое распределение интенсивности излученных фотонов в единицу времени

$$\frac{dI}{dt} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{3\pi^2}\frac{E^3}{|\dot{\vec{v}}|}\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^4}\mu\left\{\mu(1+\alpha+\delta\alpha^2)\left[K_{1/3}^2(\eta) + K_{2/3}^2(\eta)\right] - \frac{(1+\alpha)}{\gamma^2}K_{1/3}^2(\eta)\right\}d\alpha\, d(\sin\vartheta) \qquad (6)$$

где $\alpha = \frac{\omega}{E-\omega}$, $\mu = 1 - \vec{v}^2\cos^2\vartheta$, $\eta = \frac{\alpha E}{3|\dot{\vec{v}}|}\mu^{3/2} = \frac{\alpha}{3\chi}(\gamma^2\mu)^{3/2}$, ϑ - угол между импульсом фотона и плоскостью орбиты, $\delta = 0$ и $\delta = \frac{1}{2}$ для скалярных и спинорных частиц. Это выражение зависит от кинематических характеристик частицы $\vec{v}(t)$, $\dot{\vec{v}}(t)$ в данном поле, в однородном поле оно переходит в известное выражение [1]. Интегрирование (6) производится известным образом; результат его можно представить в виде ряда по χ при $\chi \ll 1$ и ряда по обратным степеням χ при $\chi \gg 1$. Очевидно, что во всех выражениях характеристики неоднородности магнитного поля содержатся только в χ , этот вопрос вызвал недавно дискуссию (для первого члена разложения при $\chi \ll 1$ см. [1]).

Заметим, что подобный метод рассмотрения, однако с разложением коммутаторов до первого члена по $\hbar\omega/E$ применялся в ряде конкретных задач в [3-5].

В заключение отметим, что предложенный подход применим, вообще говоря, для рассмотрения квантовых эффектов при движении частиц в любом внешнем поле.

QUANTUM EFFECTS IN MAGNETIC BREMSSTRAHLUNG

V.N. Baier, V.M. Katkov
(Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, U.S.S.R.).

A B S T R A C T

An operator method is presented for investigation of quantum phenomena in charged particle motion in a magnetic field.

The quantum effects in magnetic bremsstrahlung have been considered by means of this method.

The investigation of quantum effects in charged particle radiation in a magnetic field is very interesting due to significance of taking the effects into account in applications, for example, in particle motion in accelerators as well as from theoretical view point.

Consideration of the above effects is usually undertaken using an exact solution of corresponding wave equations (Dirac, Klein-Gordon) in a constant homogeneous magnetic field. Such an approach is extremely complicated and technically cumbersome enabling one to obtain the results only in homogeneous constant magnetic field. Consideration of quantum effects in the inhomogeneous field for the study of some phenomena led to sharp complication of calculations even in weakly inhomogeneous field (for the full review of these papers, see [I]). However, even when exact solutions of the wave equation are used for obtaining a result, one takes a quasiclassical asymptotic representation of the found functions so that all the results obtained in this sense are approximate. As it will be shown later this fact is not accidental.

In this paper an operator mathod of quantum effects investigation is presented for charged particles moving in a magnetic field. This method is designed for the treatment of any quantum

phenomena in magnetic bremsstrahlung as well as for the study of any other processes in which charged particles and photons in a magnetic field take part (production of pair by photon, one photon annihilation of pair, etc.). The reported method is rather simple from technical standpoint permitting one to explicitly obtain the results for particles with arbitrary spin and when the motion takes place in the arbitrary inhomogeneous field.

The method is based on the fact that quantum effects in the motion of ultrarelativistic particles in a magnetic field can be of two types. The first type is connected with the quantum character of particle motion in itself in the magnetic field. The noncommutativity of particle variables arising in this case is to be $\frac{\hbar\omega_0}{E}$ (where $\omega_0 = \frac{v_t}{R}$, R is the instantaneous radius of curvature, E - particle energy; we use a system of units $\hbar = c = 1$). Hence it follows that with increasing energy, particle motion in a magnetic field becomes more and more "classical".

The second type is connected with particle recoil in radiation and is of the order of $\hbar\omega/E$ (ω - radiated photon frequency).

The quantum effects in magnetic bremsstrahlung may be conveniently characterized by the parameter

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{p_t}{m} = |\dot{\vec{v}}|\frac{\gamma^2}{m} \qquad \text{(I)}$$

Here p_t is momentum orthogonal to magnetic field direction, $\gamma = E/m$, $H_0 = \frac{m^2}{e} = 4{,}4I.IO^{I3}$ e (for electrons), H - magnetic field. For $\chi \ll 1$ reccil (that is quantum effects magnitude) is small, then $\omega \sim \omega_0\gamma^3$. In essentially quantum region $\chi \gtrsim 1$, $\omega \sim E$. Hence it follows that at any χ quantum effects of the Ist type are negligible as compared with radiation effects. Therefore we shall neglect noncommutativity of operators of dynamic particle variables taking into account only their noncommutativity with the field of radiated photon. Moreover, we shall regularly expand all the values in powers $1/\gamma$ keeping only highest order terms.

The expression for the radiation intensity dI and the probability of the process dW in lower order of perturbation theory have the form:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi}\frac{d^3k}{(2\pi)^2}\langle i|\int dt_1\int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)} M^*(t_2)M(t_1)|i\rangle$$

$$dW = \frac{dI}{\omega} \qquad (2)$$

where

$$eM(t) = \psi_f^+(\vec{\mathcal{P}}(t))\{(je), e^{-i\vec{k}\vec{r}}\}\psi_i(\vec{\mathcal{P}}(t)) \qquad (3)$$

Here $j_\mu(t)$, $\vec{r}(t)$ – are current and particle coordinate operators, respectively, e_μ – photon polarization vector, the braces $\{,\}$ mean symmetrized operator products $\psi(\vec{\mathcal{P}}(t))$ the wave function of particle with the given spin in arbitrary magnetic field in operator form, $\mathcal{H}=\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2+m^2}$, $\vec{\mathcal{P}}(t)$-energy and momentum operators in the external field, indices f and i are related to spin characteristics of particles.

According to the above mentioned in the expression for M one should take into account photon field ($e^{-i\vec{k}\vec{r}}$) commutators with momentum $\vec{\mathcal{P}}$. On making use of the relation

$$\vec{\mathcal{P}}e^{-i\vec{k}\vec{r}} = e^{-i\vec{k}\vec{r}}(\vec{\mathcal{P}}-\vec{k}) \qquad (4)$$

$e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ can be taken out to the left in $M(t_1)$, and $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}$ to the right in $M^*(t_2)$. After doing this one shall consider the combination $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$. The noncommutativity of the operators involved $\vec{r}(t_2)$, $\vec{r}(t_1)$ is essential so that one cannot restrict oneself by the expansion in lowest commutators. The main point of the method is disentangling of this combination. It is very important that in the essential region it were possible to expand all values in powers $|\dot{\vec{v}}|\tau \sim \frac{1}{\gamma}$ $(\tau = t_2 - t_1)$. For simplicity of treatment we consider the field satisfying the condition $|\dot{\vec{H}}|\tau/|\vec{H}| \ll 1$ (field changes insignificantly along the characteristic radiation length), if one introduces the index of inhomogenity n, then this condition has the form $\frac{n}{\gamma} \ll 1$. In all the cases of interest the fields satisfy the above condition. In view of this fact, the problem reduces to an integral equation on solving which one obtains:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)} = e^{i\omega\tau}\exp\left\{i\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\omega}\left[-\omega\tau+\vec{k}(\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1))\right]\right\} \qquad (5)$$

It may be shown that for our accuracy the combination $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ commutes with all the operators in brackets in (2). Then all the operators in (2) which are in the brackets of the initial state can be replaced by their classical values.

The subsequent calculations were performed as those for the classical description of magnetic bremsstrahlung (see, for example, [2]). By carrying out integration in (2) over relative time $\tau = t_2 - t_1$ and the azimuthal angle of photon emission we obtain spectral and angular distributions of radiated photon intensities per unit time

$$\frac{dI}{dt} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{1}{3\pi^2}\frac{E^3}{|\dot{\vec{v}}|}\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^4}\mu\left\{\mu(1+\alpha+\delta\alpha^2)\left[K^2_{1/3}(\eta)+K^2_{2/3}(\eta)\right]-\frac{(1+\alpha)}{\gamma^2}K^2_{1/3}(\eta)\right\}d\alpha\, d\sin\vartheta \qquad (6)$$

where $\alpha = \frac{\omega}{E-\omega}$, $\mu = 1-\vec{v}^2\cos^2\vartheta$, $\eta = \frac{\alpha E}{3|\dot{\vec{v}}|}\mu^{3/2} = \frac{\alpha(\gamma^2\mu)^{3/2}}{3\chi}$, ϑ - angle between the photon momentum and orbit's plane, $\delta = 0$ and $\delta = \frac{1}{2}$ for scalar and spinor particles. This expression depends on kinematic particle characteristics $\vec{v}(t)$, $\dot{\vec{v}}(t)$ in the given field, while in homogeneous field it comes to a known expression [I] . Integration of (6) is performed in a well known way; its results can be represented as a series in χ for $\chi \ll 1$ and a series in the inverse powers of χ for $\chi \gg 1$. Evidently all the expressions contain characteristics of magnetic field inhomogenity only in χ. This question caused recently a discussion (for the Ist expansion term for $\chi \ll 1$, see [I]).

It should be noted that the above method of treatment with expansion of the commutators up to the Ist term in $\hbar\omega/E$ has been applied for a series of specific problems in [3-5] .

In conclusion we note that the presented approach can be generally applied to consideration of quantum effects in particle motion in any arbitrary external field.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. "Синхротронное излучение" под редакцией А.А.Соколова, И.М.Тернова, Москва, 1966.
2. J.Schwinger. Phys.Rev. 75, 1912, 1949.
3. J.Schwinger. Proc.Nat.Acad.Sci. 40, 132, 1954.
4. V.N.Baier, V.M.Katkov. Phys.Lett. 24A, 327, 1967.
5. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ, 52, 1422, 1967.