

К 26

2

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

95

В.И.Карпман

**Обтекание тел  
в диспергирующих средах**

г.Новосибирск 1967

## А н н о т а ц и я

Рассматривается стационарное двумерное обтекание тонкого тела в слабодиспергирующей среде. Основные уравнения, описывающие течение, можно свести к уравнению Кортевега-де Вриза. Установлен закон подобия. Исследовано решение в линейном приближении. Найдены решения уравнения Кортевега-де Вриза, описывающие течения при нулевых углах атаки и значениях параметра подобия  $\sigma$ , меньших некоторого критического числа  $\sigma_0$  ( $\sigma_0 \sim 3$ ). При  $\sigma \ll 1$  эти решения переходят в решения линеаризованных уравнений. Показано, что при  $\sigma < \sigma_0$  структура течения остается качественно аналогичной тому, что следует из линейного приближения. При  $\sigma > \sigma_0$  в течении появляются солитоны — уединённые стационарные волны. Число их растёт с увеличением  $\sigma$ .

TWO-DIMENSIONAL STEADY FLOW IN DISPERSIVE  
MEDIA.

By V.I. Karpman

Abstract

The steady two-dimensional flow around a thin body in dispersive media is considered.

Dispersive equation are supposed to be of the form  $\omega = c_0 k (1 \pm \delta^2 k^2 \dots)$  and the sizes of a body are much greater than dispersive length  $\delta$ .

Equations describing the flow are reduced to the Korteweg - de Vries equation. A solution of the Korteweg - de Vries equation is investigated for the case when the flow at infinity is parallel to the axe of a body and satisfies to the condition  $\sigma < \sigma_0$ , where  $\sigma$  is the similarity number and  $\sigma_0$  is some critical value ( $\sigma_0 \sim 3$ ). This solution approaches to the solution obtained in linear approximation if  $\sigma \ll 1$  and remains qualitatively similar to the last in all region of existence. ( $0 < \sigma < \sigma_0$ ). When  $\sigma > \sigma_0$ , the solution becomes irregular. Numerical computations show that if  $\sigma > \sigma_0$ , the stationary solitary waves (solitons) appear in the flow (they do not exist if  $\sigma < \sigma_0$ ).

## I. Введение

Обтекание тел в средах, где фазовая скорость волн не совпадает с их групповой скоростью, отличается большим своеобразием. Несмотря на внешние различия задач такого рода для разных диспергирующих сред (движение тела в плазме, на поверхности воды и т.д.) во всех этих случаях имеются некоторые общие закономерности, определяемые сочетанием нелинейных и дисперсионных эффектов.

Исследование качественных особенностей этих явлений естественно начать с тех задач, где нелинейные и дисперсионные члены в основных уравнениях достаточно малы. Настоящая работа посвящена изучению двумерного стационарного обтекания при этих условиях. По своим результатам и методам она примыкает к работам /1,2/.

Как и в /1/, будем предполагать, что дисперсионное уравнение можно представить в виде ряда по нечетным степеням  $k$

$$\omega = c_0 k (1 \pm \delta^2 k^2 + \dots) \quad (I.1)$$

где  $c_0$  — фазовая скорость при  $k \rightarrow 0$ , а  $\delta$  — так называемая "длина дисперсии", причем достаточно ограничиться только написанными членами. Для этого прежде всего необходимо, чтобы характерные размеры тела  $\lambda$  были велики по сравнению с длиной дисперсии. Некоторые дополнительные ограничения области применимости полученных результатов приведены в п.5 настоящей работы. Другим малым параметром у нас будет считаться величина  $\nu$ , характеризующая относительное отклонение от равновесного состояния среды (например,  $(n - n_0)/n_0$ , где  $n$  — плотность плазмы, или  $(h - h_0)/h$ , где  $h$  — высота жидкости в случае гравитационно-капиллярных поверхностных волн и т.п.).

Итак, ниже предполагается, что

$$\varepsilon = (\delta/\lambda)^2 \ll 1, \quad \nu \ll 1, \quad (I.2)$$

причем в дальнейшем мы будем удерживать в уравнениях нелинейные и дисперсионные члены лишь в наинизшем порядке по  $\varepsilon$ ,  $\nu$  (причем членами порядка  $\varepsilon \cdot \nu$  будем пренебрегать).

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

а) Двумерные движения плазмы поперек магнитного поля. Пусть магнитное поле направлено параллельно оси  $z$ , а скорости — параллельно плоскости  $XU$  и все величины зависят только от  $XU$ . Предполагается также, что  $H^2/8\pi \gg p$  и характерные длины превышают дебаевский радиус. Последнее допущение приводит к условию квазинейтральности:  $n_e \approx n_i = n$ . Исключая из уравнений

$$m_{i,e} \frac{d\vec{v}_{i,e}}{dt} = \pm e \vec{E} \pm \frac{e}{c} [\vec{v}_{i,e} \times \vec{H}], \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{E}$$

электрическое поле  $\vec{E}$  и используя условие квазинейтральности, получаем основные уравнения двумерного движения плазмы поперек магнитного поля  $\vec{H}$  в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{8\pi m n} \nabla H^2 \quad (I.3)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{H} \vec{v}) + \frac{m_e c}{e} \operatorname{rot} \frac{d\vec{v}_e}{dt} - \frac{m_i c}{e} \operatorname{rot} \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (I.4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{4\pi n e}{c} (v_x - v_{ex}), \quad \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{4\pi n e}{c} (v_y - v_{ey}) \quad (I.5)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n \vec{v} = 0, \quad (I.6)$$

где мы ввели "массовую" скорость плазмы

$$\vec{v} = (m_i \vec{v}_i + m_e \vec{v}_e) / m, \quad m = m_i + m_e$$

и пренебрегли членами порядка  $m_e/m_i$  по сравнению с единицей.

Два последних члена в (I.4) являются "дисперсионными" (они приводят к зависимости фазовой скорости линейных волн от  $k$ ). Если ими пренебречь, то уравнения (I.3) — (I.6) превращаются в уравнения магнитной гидродинамики, а из уравнений (I.4), (I.6) следует условие "вмороженности" магнитного поля  $n/n_0 = H/H_0$ , где  $n_0, H_0$  — невозмущенные значения плотности и поля (при  $X = -\infty$ ). Поскольку уравнения (I.3) — (I.6) написаны для движения плазмы поперек магнитного поля, то при отбрасывании дисперсионных членов они формально совпадают с уравнениями газодинамики с показателем

адиабаты  $\gamma = 2$ . При этом скорость распространения линейных возмущений  $c_A = (4\pi n_0 m)^{-1/2} H_0$ .

Если учитывать дисперсионные члены, то замороженность уже не имеет места, однако, если эти члены достаточно малы, то отклонения от замороженности тоже можно считать малыми (их нетрудно найти методом последовательных приближений). При этом легко убедиться, что последний член в (I.4) в  $v \epsilon^2 (m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше главных членов и мы будем считать, что им можно пренебречь. Пренебрегая также членами порядка  $v \epsilon$  и переходя к стационарному течению в системе отсчета, где обтекаемое тело покоится, получаем основные уравнения в виде

$$(\vec{V} \nabla) \vec{V}(x, y) = - (c_A^2 / 2H_0 H) \vec{\nabla} H^2 \quad (I.7)$$

$$\vec{\nabla} (H \vec{V}) = 2\delta^2 V_0 \Delta \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (I.8)$$

$$V \rightarrow V_0, \quad H \rightarrow H_0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad (I.9)$$

$$\delta^2 = \frac{c^2}{2\omega_{pe}^2}, \quad c_A = (4\pi n_0 m)^{1/2} H_0 \quad (I.10)$$

(величина  $\delta$  определена таким образом, чтобы она совпала с длиной дисперсии в линейном дисперсионном соотношении (I.1); при этом  $c_0 = c_A$ ).

Из уравнения (I.7), и условий (I.9) следует, что рассматриваемое течение является потенциальным, т.е.

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi + \vec{V}_0, \quad \varphi(-\infty) = 0 \quad (I.11)$$

При этом для  $\varphi$  с принятой степенью точности получается уравнение

$$\varphi_{yy} - (M^2 - 1) \varphi_{xx} - \frac{M}{c_A} (3\varphi_x \varphi_{xx} + 2\varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_x \varphi_{yy}) + 2\delta^2 M^2 \Delta \varphi_{xx} = 0 \quad (I.12)$$

где  $M = V_0/c_A$  - "число Маха". При выводе (I.12) были отброшены члены в  $v^2, \epsilon^2, v \epsilon$  раз большие, чем линейные. Отметим, что если в (I.12) положить  $\delta = 0$ , то получится известное уравнение для потенциала скорости стационарного течения сжимаемого газа с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ , с точностью до членов второго порядка включительно (ср. с уравнением (IO6.3) из /3/, где положено  $\varphi \rightarrow \varphi + V_0 x$ ).

б) Нелинейные ионнозвуковые волны в плазме без магнитного

поля ( $T_e \gg T_i$ ). Дисперсионное уравнение опять имеет вид (I.1), где

$$c_0 = (T/m_i)^{1/2}, \quad \delta^2 = \frac{\mathcal{D}^2}{2} = \frac{T}{8\pi e^2 n_0}, \quad T = T_e \quad (I.13)$$

т.е. длина дисперсии определяется дебаевским радиусом  $\mathcal{D}$ . Полагая, для простоты,  $T_i = 0$ , мы можем написать уравнения движения для ионов в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{e}{m_i} \nabla \Phi, \quad (I.14)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{v}) = 0, \quad (I.15)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi e [n_0 \exp(e\Phi/T) - n], \quad (I.16)$$

где  $\vec{v}$  - скорость,  $n$  - плотность ионов,  $n_0 = n(-\infty)$ . Для достаточно длинных волн левая часть (I.16) будет в  $\epsilon = (\mathcal{D}/\lambda)^2$  раз меньше каждого из слагаемых в правой части. Поэтому можно решать уравнение (I.16) относительно  $\Phi$  методом последовательных приближений. Ограничиваясь членами порядка  $\epsilon$ , получаем

$$\exp(e\Phi/T) \approx \frac{n}{n_0} + T / (4\pi e^2 n_0) \Delta n / n_0 \quad (I.17)$$

Пренебрегая членами порядка  $v^2 \epsilon$ , получаем

$$e \nabla \Phi = T \nabla [\exp(e\Phi/T)] \exp(-e\Phi/T) \approx \frac{T}{n} \nabla n + (I.18)$$

Подставляя это в (I.14), будем иметь  $+ \frac{T}{n_0} \mathcal{D}^2 \nabla \Delta n$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{c_0^2}{n} \nabla n - 2c_0^2 \delta^2 \nabla \Delta n / n_0. \quad (I.19)$$

где  $c_0$  и  $\delta$  определены в (I.13).

(I.19) и (I.15) представляют собой полную систему уравнений в рассматриваемом приближении. Последний член в (I.19) является дисперсионным. Если его опустить, то получатся уравнения гидродинамики с показателем адиабаты  $\gamma = 1$ , которые в линейном приближении описывают ионный звук без дисперсии.

Из уравнения (I.19) при условии  $n(-\infty) = c_0 n_0$  следует, что течение потенциально. Переходя к системе отсчета, где обтекаемое тело покоится и полагая  $\vec{v} = \vec{V}_0 + \nabla \Psi$ , получаем для плоского течения ( $\vec{v} = V_0 / c_0$ ):

$$\Psi_{yy} - (M^2 - 1) \Psi_{xx} - (M/c_0) [(3 - M^2) \Psi_x \Psi_{xx} + \Psi_x \Psi_{yy} + 2\Psi_y \Psi_{xy}] + 2M^2 \delta^2 \Delta \Psi_{xx} = 0 \quad (I.20)$$

(где мы опять ограничились лишь главными нелинейными и дисперсионными членами, имеющими порядок  $\nu^2$  и  $\epsilon$ , соответственно).

в) Рассмотрим, наконец, последний пример — гравитационные волны на поверхности жидкости. Глубина невозмущенной жидкости является здесь параметром длины, определяющим дисперсию. При  $\epsilon = (h_0/\lambda)^2 \ll 1$  дисперсионное уравнение опять имеет вид (I.1),

$$\text{где } \delta^2 = h_0^3/6, \quad c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad (\text{I.21})$$

Разлагая точные уравнения для поверхностных волн (см., напр., /4/) по степеням  $\nu = (h-h_0)/h$ ,  $\epsilon = (h/\lambda)^2$  и пренебрегая членами порядка  $\nu^3$ ,  $\epsilon^2$ ,  $\nu^2\epsilon$ , получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla (p_0/\rho + gh) = 0, \quad (\text{I.22})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h \vec{v}) + (h_0^3/3) \Delta \text{div} \vec{v} = 0. \quad (\text{I.23})$$

где  $p_0$  — давление на поверхности жидкости,  $\rho$  — плотность (жидкость несжимаемая),  $\vec{v}(x, y)$  — горизонтальная составляющая скорости (параллельная плоскости XY). В дальнейшем мы будем считать, что  $p_0 = \text{const}$ , так что  $\nabla p_0/\rho = 0$ . Последний член в (I.23) является дисперсионным; он приводит ко второму члену в (I.1). Если им пренебречь, то получаются уравнения мелкой воды, которые, как известно, эквивалентны двумерной гидродинамике с  $\gamma = 2/3, 4/5$ . При условии  $h(-\infty) = h_0$ , течение является потенциальным. Переходя к системе отсчета, где обтекаемое тело покоится, а жидкость на бесконечности имеет скорость  $V_0$  и полагая  $\vec{V} = \vec{V}_0 + \nabla \psi$ , получаем с той же точностью, как и в предыдущих случаях

$$\psi_{yy} - (M^2 - 1) \psi_{xx} - (M/c_0) (3\psi_x \psi_{xy} + 2\psi_y \psi_{xy} + \psi_x \psi_{yy}) + 2\delta^2 \Delta^2 \psi = 0 \quad (\text{I.24})$$

## 2. Основные уравнения

Итак, рассматривая задачу о стационарном двумерном обтекании тела в трех разных диспергирующих средах, мы получили в наименьшем приближении по нелинейности и дисперсии весьма сходные уравнения (I.12), (I.20), (I.24) для потенциала скоростей. Не трудно убедиться, что их можно с принятой степенью точности пред-



ставить в едином виде

$$\psi_{yy} - (M^2 - 1) \psi_{xx} - (M/c_0) \{ [2 + M^2 (\gamma - 1)] \psi_x \psi_{xy} + 2\psi_y \psi_{xy} \} + 2s M^4 \delta^2 \psi_{xxxx} = 0 \quad (2.1)$$

где  $M = V_0/c_0$  - число Маха,  $c_0$  - фазовая скорость волн в линейном приближении при  $k \rightarrow 0$ ,  $\delta$  - длина дисперсии,  $s = \pm 1$  соответственно тому, какой знак стоит в дисперсионном уравнении (1.1); а  $\gamma$  - "показатель адиабаты" соответствующей гидродинамики. При получении (2.1) из упомянутых уравнений (1.12), (1.20), (1.24) мы воспользовались тем, что в нелинейном и дисперсионном членах с принятой степенью точности можно заменить  $\psi_{yy}$  выражением, следующим из линеаризованного уравнения с  $\delta = 0$ ;  $\psi_{yy} \rightarrow (M^2 - 1) \psi_{xx}$ . Уравнение (2.1) при  $\delta = 0$  совпадает с точностью до нелинейных членов второго порядка включительно с уравнением для потенциала скорости при двумерном стационарном обтекании (см. /3/, уравнение (106,3)). В этой работе мы будем рассматривать только "сверхзвуковое" обтекание, когда  $M > 1$ . Для того, чтобы можно было пренебрегать нелинейными членами третьего и более высокого порядка малости, необходимо потребовать, чтобы обтекаемое тело было достаточно тонким, а именно

$$\ell / \delta \gg M \quad (2.2)$$

где  $\delta$  - эффективная толщина, а  $\ell$  - длина тела. Кроме того, длина дисперсии  $\delta$  также должна быть малой по сравнению с  $\delta$ . Малым должен быть и угол атаки  $\alpha$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (2.1) при граничном условии, состоящем в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на поверхности обтекаемого тела, т.е.

$$[(\psi_x + V_0)(\delta / \ell) f'_\pm(x/\ell) - \psi_y]_{y = \delta f_\pm(x/\ell)} = 0 \quad (2.3)$$

где  $y = \delta f_\pm(x/\ell)$  - уравнения верхней и нижней линий профиля тела, соответственно (рис.1).

Если бы дисперсии не было, т.е.  $\delta = 0$ , то, для достаточно тонкого тела, течения в областях  $y > 0$  и  $y < 0$  имели бы вид простых волн (с точностью до членов третьего порядка по  $\psi / \delta /$ ), т.е. было бы  $\psi_y = F_\pm(u)$ , где

$$u = \psi_x \quad (2.4)$$

а  $F_\pm(u)$  - некоторые функции, имеющие разный вид в верхней и ниж-

ней полуплоскостях. Эти функции удовлетворяют одной и той же системе уравнений

$$[(M^2-1) + au] \frac{\partial u}{\partial x} - [F'(u) - 2(M/c_0)F(u)] \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.5a)$$

$$F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.5b)$$

$$a = \frac{M}{c_0} [2 + M^2(\gamma-1)],$$

первое из которых следует из соотношения  $\psi_{yy} = F'(u) \partial u / \partial y$  и уравнения (2.1), где положено  $\delta = 0$ , а второе получается из  $\psi_{xy} = \psi_{yx}$  и (2.4). Чтобы эта система имела нетривиальные решения для  $\partial u / \partial x$  и  $\partial u / \partial y$ , её определитель должен равняться нулю, откуда получается следующее уравнение для  $F(u)$

$$F'^2 - 2(M/c_0)F'F - (au + M^2 - 1) = 0$$

Решение этого уравнения с точностью до членов второго порядка по  $u$ , включительно, имеет вид

$$F_{\pm}(u) = \pm \sqrt{M^2-1} u \mp u^2 M^2 (\gamma+1) / 4\sqrt{M^2-1} c_0, \quad (2.6)$$

где верхний знак берется для полуплоскости  $y > 0$ , а нижний - для  $y < 0$ . Подстановка (2.6) в (2.5b) приводит к уравнению

$$u_y \pm \sqrt{M^2-1} u_x \mp u u_x M^2 (\gamma+1) / 2\sqrt{M^2-1} c_0 = 0, \quad (2.7)$$

решение которого и описывает упомянутые простые волны.

Рассмотрим теперь уравнение (2.1) с  $\delta \neq 0$ . Из-за дисперсионного члена величина  $\psi_y$  уже не будет функцией только от  $u = \psi_x$ . Вместо этого следует положить

$$\psi_y = F(u) + \varepsilon \Psi(x, y) \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon = (\delta/\beta)^2 \ll 1$ , а  $\Psi(x, y)$  - некоторая функция порядка единицы; при этом  $F(u)$ , как член нулевого порядка относительно  $\varepsilon$ , по-прежнему определяется формулой (2.6). Для определения  $\Psi$  подставляем (2.8) в (2.1), а также в соотношение  $\psi_{yx} = \psi_{xy}$ . Тогда получится система уравнений для  $u_x, u_y$ :

$$\begin{aligned} (M^2-1 + au) u_x - [F'_{\pm}(u) - 2(M/c_0)F_{\pm}(u)] u_y = \\ = 2\delta M^2 \delta^2 u_{xxx} \mp \varepsilon \sqrt{M^2-1} \Psi_x, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$F'_{\pm}(u) u_x - u_y = -\varepsilon \Psi_x, \quad (2.10)$$

которая отличается от (2.5) только неисчезающими правыми частями. Поскольку её определитель равен нулю, то она совместна не при любых правых частях. После подстановки (2.6) в (2.9) и элементарных выкладок получаем условие совместности в виде

$$\epsilon \Psi_x = \pm (2s M^4 \delta^2 / \sqrt{M^2 - 1}) U_{xxx} \quad (2.11)$$

(при получении (2.11) следует ограничиться членами наимизшего порядка по  $U$  и  $\epsilon$ ). Подставляя (2.11) в (2.10) получаем для  $U$  уравнение

$$U_y \pm \sqrt{M^2 - 1} U_x \pm \frac{(\gamma + 1) M^3}{2\sqrt{M^2 - 1} c} U U_x \mp \frac{s \delta^2 M^4}{\sqrt{M^2 - 1}} U_{xxx} = 0 \quad (2.12)$$

где знак при корне совпадает со знаком  $y$ . Что касается граничного условия для этого уравнения, то в качестве такового следует взять (2.3), где вместо  $\varphi_y$  подставлено (2.8), а  $F(U)$  и  $\Psi$  определяются выражениями (2.6) и (2.11), соответственно, т.е.

$$\left[ f'_\pm(x/e) (U + V_0) v/e \pm \sqrt{M^2 - 1} U \pm U^2 M^3 (\gamma + 1) / 4c \sqrt{M^2 - 1} \mp 2s M^4 \delta^2 / \sqrt{M^2 - 1} U_{xx} \right]_{y = \pm(x/e)} = 0 \quad (2.13)$$

Поскольку нас в дальнейшем будут интересовать лишь эффекты, обусловленные нелинейными членами в уравнениях, мы заменим (2.13) приближенным граничным условием

$$U = \mp V_0 v / \sqrt{M^2 - 1} e f'_\pm(x/e), \quad (y = \pm 0) \quad (2.14)$$

которое получится, если в (2.13) опустить члены второго и более высокого порядка малости относительно величины  $f'_\pm(x/e)$  являющейся малой для достаточно тонкого тела<sup>I)</sup>.

Перейдем теперь к новым (безразмерным), переменным

$$\xi = [\pm \sqrt{M^2 - 1} y - x] / e, \quad \tau = y (\gamma + 1) M^4 v / 2(M^2 - 1) e^2 \quad (2.15)$$

$$\eta = \mp U \sqrt{M^2 - 1} e / v M c.$$

Тогда основное уравнение (2.12) и граничное условие (2.14) принимают вид:

$$\eta_\tau + \eta \eta_\xi + M \eta_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.16)$$

I) Поправки к (2.14) можно получить, решая (2.13) последовательными приближениями и рассматривая (2.14) как первое приближение. При этом добавку к решению, связанную со вторым приближением в граничном условии достаточно вычислять уже в линейном приближении.

$$\eta(\tau=0, \xi) = \chi_{\pm}(\xi), \quad \chi_{\pm}(\xi) = \xi'_{\pm}(-\xi), \quad (2.17)$$

$$\eta(\tau, \xi = \infty) = 0, \quad (2.18)$$

$$\mu = \pm 2\sigma \delta^2 \sqrt{M^2 - 1} / \beta \ell (\gamma + 1) \quad (2.19)$$

Уравнение (2.16) совпадает с уравнением Кортевега-де Вриза, исследованию которого уже был посвящен ряд работ [5, 2, 6, 7, 1].

Одновременно мы получили следующий закон подобия: все течения, возникающие при обтекании подобных друг другу контуров (т.е. определяемых одинаковыми безразмерными функциями  $\xi_{\pm}(\xi)$ ) и с одинаковыми числами  $\mu$  - подобны.

Заметим еще, что параметр подобия  $\mu$  связан с величиной  $\sigma$ , введенной в работе [1] соотношением

$$\sigma = |\mu|^{-1/2} \quad (2.20)$$

Величина  $\sigma$  определяет "степень нелинейности" задачи: чем больше  $\sigma$ , тем больше нелинейные эффекты по сравнению с дисперсионными и наоборот.

### 3. Линейное приближение

Рассмотрим сначала решение уравнения (2.16) при условиях (2.17), (2.18) в линейном приближении. Отбрасывая нелинейный член в уравнении (2.16), получаем (см., напр., [2]):

$$\eta(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} (\beta \mu \tau)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\xi - \xi'}{(\beta \mu \tau)^{1/2}}\right) \chi(\xi') d\xi' \quad (3.1)$$

где  $\Phi(z) = \pi^{-1} \int_0^z \cos(u^2/3 + u z) du$  - функция Эйри, экспоненциально затухающая при  $z \rightarrow \infty$ .

При  $\mu \tau \rightarrow 0$  имеет место  $\pi^{-1/2} (\beta \mu \tau)^{1/2} \Phi(\xi / (\beta \mu \tau)^{1/2}) \rightarrow \delta(\xi)$  (3.1) переходит в известное соотношение для линейного приближения в обычной газодинамике (см. [3], § II6).

Наиболее интересным для нас является предельный случай достаточно больших  $\tau$ ,  $\xi$ . Для получения асимптотики удобно поступить следующим образом. Используя то, что  $\chi(\xi')$  исчезает при достаточно больших  $\xi'$ , разлагаем  $\Phi(z - z')$  в (3.1) в ряд по степеням  $z'$ .

Тогда

$$\eta = \pi^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m P_m}{m!} (3\mu\tau)^{-\frac{m+1}{2}} \Phi^{(m)}(z), \quad (3.2)$$

где

$$z = (3\mu\tau)^{-1/3} \xi, \quad P_m = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^m \chi(\xi) d\xi \quad (3.3)$$

Используя асимптотику функции Эйри, получаем для её производных при  $|z| \gg 1$

$$(-1)^m \Phi^{(m)}(z) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} z^{(2m-1)/4} \exp(-\frac{2}{3} z^{3/2}), & (z > 0) \\ (-1)^m |z|^{(2m-1)/4} \cos[\frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{2}(m-1/2)], & (z < 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.2) приводит к некоторому асимптотическому разложению для  $\eta(z, \tau)$ , которое, например, для  $z < 0$  имеет вид ( $|z| \gg 1$ ):

$$\eta \approx \pi^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m}{m!} (3\mu\tau)^{-(m+1)/3} z^{(2m-1)/4} \times \cos[\frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{2}(m-1/2)] \quad (3.5)$$

Этот ряд можно просуммировать, если ввести Фурье-компоненту  $\tilde{\chi}(k)$  функции  $\chi(\xi)$  и разложить её по степеням  $k$ :

$$\tilde{\chi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) \exp(-ik\xi) d\xi = \sum_{m=0}^{\infty} P_m (-ik)^m / m! \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), нетрудно убедиться, что при  $z < 0, |z| \gg 1$

$$\eta \approx |3\pi^2 \mu \tau z|^{-1/4} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\chi}(-|z| / 3\mu\tau)^{1/2} \right\} \times \exp i \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.7)$$

Аналогично, при  $z > 0$ , получаем

$$\eta \approx \frac{1}{2} (3\pi^2 \mu \tau z)^{-1/4} \tilde{\chi} \left[ i (z / 3\mu\tau)^{1/2} \right] \exp(-\frac{2}{3} z^{3/2}) \quad (3.8)$$

(Здесь предполагается, что Фурье-компонента  $\tilde{\chi}(k)$  может быть аналитически продолжена в комплексную плоскость, что заведомо имеет место, если  $\chi(\xi)$  отлична от нуля только в конечном интервале  $\xi$ ).

Из (3.7), (3.8) видно, что функция  $\eta(\tau, z)$  при фиксированном  $\tau$  представляет собой волновой пакет, который расплывается с увеличением  $\tau$ . Ширина этого пакета определяется величиной интервала  $\Delta k$ , где функция  $\tilde{\chi}(k)$  существенно отлична от нуля и, в силу (3.6) обратна ширине функции  $\chi(\xi)$ . Таким образом,  $\Delta k \sim 1$ ,

а эффективная ширина пакета порядка  $|\xi \mu \tau|^{1/2}$ .<sup>2)</sup> Длины волн в пакете с изменением  $\tau$  возрастают как  $(\xi \mu \tau)^{1/2}$ .

Критерий точности линейного приближения имеет вид

$$s^2 = 2a / (\xi \mu \kappa^2) \ll 1 \quad (3.9)$$

где  $\kappa(\tau, \xi)$  и  $a(\tau, \xi)$  — "локальные" волновое число и амплитуда волнового пакета (3.7). Величина  $s^2$ , смысл которой подробно обсуждался в работе /I/ (ср. формулу (5.12) из /I/ и (3.9)) равна по порядку величины отношению нелинейного члена в уравнении Кортевега-де Вриза к дисперсионному. Из (3.7) следует, что

$$a \sim |\xi \mu \tau \xi|^{-1/4} |\tilde{\chi}(\kappa)|, \quad \kappa = |\xi / (\xi \mu \tau)|^{1/2} \quad (3.10)$$

Подстановка этих выражений в (3.9) дает

$$s^2 \sim |\mu \tau \xi^{-5}|^{1/4} \tilde{\chi}(|\xi / (\xi \mu \tau)|^{1/2}) \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь "движение" точки с постоянной фазой колебаний, например, гребня волны в пакете. Уравнение движения этой точки согласно (3.7) имеет вид  $\xi = \text{const}$  или  $\xi = \text{const} (\mu \tau)^{1/2}$ . Подставляя это в (3.11), получаем зависимость величины  $s^2$  от "времени"  $\tau$  для точки с фиксированной фазой:

$$s^2(\tau) \sim \mu^{-1} (\mu \tau)^{1/2} |\tilde{\chi}(\kappa)| \quad (3.12)$$

$$\kappa = \text{const} (\mu \tau)^{-1/2} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в (3.6), а последнее в (3.12), получаем следующее асимптотическое выражение для  $s(\tau)$  при  $|\tau| \gg 1$ :

$$s^2(\tau) \sim P_2 \mu^{-1} (\mu \tau)^{(1-2)/2} \quad (3.14)$$

где  $P_2$  — первый отличный от нуля момент функции  $\chi(\xi)$ , т.е.

$P_n = 0$  ( $n < 2$ ),  $P_2 \neq 0$ . В частности, если

$$P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(0, \xi) d\xi \neq 0 \quad (3.15)$$

то  $s \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , т.е. нелинейные эффекты станут существенными при достаточно больших  $\tau$ , каким бы ни было малым начальное значение  $\eta$ . Исходя из результатов по численному интегрированию уравнения Кортевега-де Вриза /I/ можно предположить, что эти нели-

<sup>2)</sup> Отсюда следует, что для того, чтобы выражение (3.7) описывало достаточно большую часть пакета, необходимо, чтобы значения  $\kappa \sim 1$  лежали в области применимости (3.7). Это дает  $(\mu \tau)^{1/2} \gg 1$ . Таким образом, приведенная асимптотика представляет интерес при достаточно больших  $\mu \tau$ .

нейные эффекты должны проявиться в образовании при достаточно больших  $\tau$  солитонов - уединенных стационарных волн, даже если параметр подобия  $\sigma$  (2.20) меньше своего критического значения  $\sigma_c$ , введенного в /I/ (в последнем случае, кроме солитонов должна образоваться еще и существенная "несолитонная" часть, которая на солитоны не распадается). Следует, однако, иметь в виду, что при очень малых значениях  $\sigma$  нелинейные эффекты наступают при столь больших  $\tau$ , когда волновой пакет представляющий решение уже достаточно расплывется, так что наиболее существенную часть процесса можно рассматривать в линейном приближении.

В применении к обтеканию тонкого тела соотношение (3.15) имеет место в том случае, когда "угол атаки" отличен от нуля, в чем легко убедиться подставив (2.17) в (3.15). В этом случае, по-видимому, среди волн, образующихся за обтекаемым телом всегда будут волны с неубывающей амплитудой, имеющие вид уединенных волн ("солитонов"). Однако при очень малых углах атаки солитоны должны образовываться достаточно далеко за обтекаемым телом и будут иметь очень малую амплитуду. (Общая картина течения при наличии солитонов и без них рассматривается в п.5).

Если  $P_0 = 0$ , а  $P_1 \neq 0$  (этот случай отвечает нулевому углу атаки), то из (3.14) следует, что при  $\tau \gg 1$  величина  $s^2 \sim \mu^{-1} P_1 = \text{const}$ . Таким образом, в этом случае величина  $s^2$  и вместе с ней нелинейные эффекты, будут малыми при всех  $\tau$ , если они были малыми при  $\tau \leq 1$ . Солитоны в таких случаях не появляются, в соответствии с результатами работы /I/. Это и подавно имеет место при  $P_0 = P_1 = 0$ .

#### 4. Квазилинейные решения уравнения Кортевега-де Вриза и обтекание с нулевым углом атаки

Рассмотрим обтекание длинного тела с нулевым углом атаки. Согласно (2.17), (3.3) в этом случае

$$P_0 = 0, \quad P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \chi_{\pm}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\pm}(\xi) d\xi, \quad (4.1)$$

где  $f_{\pm}(\xi)$  - уравнение верхней или нижней части обтекаемого контура.

Из результатов работы /I/ следует, что в этом случае качественный вид решения уравнения Кортевега-де Вриза при больших  $\tau$  должен быть близким к автомодельному решению, имеющему вид

$$\eta_0(\xi, \tau) = \mu (\lambda \mu \tau)^{-2/3} \psi_0 \{ (\lambda \mu \tau)^{-1/3} \xi \} \quad (4.2)$$

Функция  $\psi_0(z)$  была подробно изучена в работе /2/, она удовлетворяет уравнению

$$\psi_0'''(z) - z \psi_0' + \psi_0 \psi_0' - 2\psi_0 = 0 \quad (4.3)$$

Исходя из этого, будем искать решение уравнения Кортевега-де Вриза в виде

$$\eta(\xi, \tau) = F(z, 1/\xi) = \xi^n \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) \xi^{-m} = \quad (4.4)$$

$$= \mu (\lambda \mu \tau)^{n/3} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(z) (\lambda \mu \tau)^{-m/3} \quad (4.5)$$

где  $z = (\lambda \mu \tau)^{-1/3} \xi$ , и  $n, \psi_m(z) = z^{n-m} f_m(z)$  — неизвестные величины.

Подставляя (4.5) в (2.16) и требуя, чтобы все члены этого ряда удовлетворяли граничному условию (2.18) (т.е. исчезали бы при  $z \rightarrow \infty$ ), получим, что  $n = -2$ , а  $\psi_k(z)$  должны удовлетворять уравнениям

$$\psi_k''' - z \psi_k' - (k+2) \psi_k + \sum_{p=0}^k \psi_p \psi_{k-p}' = 0 \quad (4.6)$$

и условиям на бесконечности

$$\psi_k(\infty) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Эта система рекуррентных уравнений определяет любую из функций  $\psi_k(z)$  через первые  $k-1$  функций.

При  $k=0$  из (4.6) получается в точности уравнение (4.3), т.е. первый член разложения (4.5) представляет собой автомодельное решение (поскольку  $n = -2$ ). Остальные члены (4.5) должны дополнять автомодельное решение таким образом, чтобы вся сумма представляла собой полное решение уравнения Кортевега-де Вриза. При  $\tau \rightarrow \infty$  и ограниченных  $z$ , все члены ряда (4.5) с  $k > 0$  убывают быстрее первого, так что вся сумма асимптотически приближается к автомодельному решению.

Интересно отметить, что система (4.6) имеет следующее частное решение

$$\psi_k = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{d^k \psi_0(z)}{dz^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Решение (4.8) имеет очень простой смысл.



Чтобы выяснить его, подставим (4.8) в (4.5) (где  $n = -2$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \eta(\xi, \tau) &= \mu(3\mu\tau)^{-2/3} \sum_{k=0}^{\infty} (3\mu\tau)^{-k/3} (\lambda^k / k!) \psi_0^{(k)}((3\mu\tau)^{-1/3} \xi) \\ &= \mu(3\mu\tau)^{-2/3} \psi_0 \left[ (3\mu\tau)^{-1/3} (\xi + \lambda) \right] \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили опять автомодельное решение, но сдвинутое на величину  $\lambda$  вдоль оси  $\xi$ . Существование такого решения вполне естественно, так как уравнение Кортевега-де Вриза (2.16) инвариантно относительно трансляций  $\xi \rightarrow \xi + \lambda$ . Приведенный пример показывает, что (4.5) имеет характер "мультипольного разложения". Перейдем теперь к исследованию асимптотического поведения решений системы (4.6). Благодаря условиям (4.7), при больших положительных  $\xi$  можно пренебречь нелинейными членами и систему (4.6) можно заменить следующей

$$\psi_k''' - \xi \psi_k' - (k+2)\psi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Общие решения уравнений (4.9) получены в Приложении. Здесь мы будем рассматривать лишь такие решения, которые удовлетворяют условиям (4.7) и экспоненциально исчезают при  $\xi \rightarrow \infty$ . Как показано в Приложении, они имеют вид

$$\psi_k^{(k)}(\xi) = A_k d^{k+1} \Phi(\xi) / d\xi^{k+1} \quad (4.10)$$

где  $\Phi(\xi)$  — функция Эйри,  $A_k$  — произвольные постоянные. Таким образом, асимптотика функций  $\psi_k(\xi)$  при больших положительных  $\xi$  имеет вид

$$\psi_k(\xi) \approx \frac{(-1)^k A_k}{2} \xi^{k/2 + 1/4} e^{-\frac{2}{3} \xi^{3/2}}, \quad (\xi \gg 1) \quad (4.11)$$

В области больших отрицательных  $\xi$  функции (4.10) быстро осциллируют, а их амплитуда растет как  $\xi^{k/2 + 1/4}$ , так что, вообще говоря, необходимо учитывать в уравнениях (4.6) и нелинейные члены. Однако, здесь можно рассуждать так же как и в /2/ (п.3), где исследовалось уравнение (4.3) для функции  $\psi_0(\xi)$ , определяющее автомодельное решение. А именно, если постоянные  $A_k$  достаточно малы, то нелинейные члены в (4.7) начнут играть роль тогда, когда функции  $\psi_k(\xi)$  уже будут определяться осциллирующей асимптотикой. Тогда, используя метод индукции и результаты работы /3/ (п.3), нетрудно

убедиться, что при достаточно малых  $A_k$  и  $z \rightarrow \infty$ , главный член в асимптотике  $\Psi_k(z)$  имеет вид

$$\Psi_k^{(0)}(z) = |z|^{k/2 + 1/4} \left[ \alpha_k \cos \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + \beta_k \sin \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (-z \gg 1) \quad (4.12)$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — постоянные, определяемые начальными условиями (постоянные слагаемые в фазах добавлены из соображений удобства).

Сравним теперь рассматриваемые решения с решением линеаризованного уравнения (3.1). Здесь прежде всего необходимо отметить, что предельный переход нелинейного решения (4.5) к (3.1) имеет место только для тех начальных условий, которые удовлетворяют соотношению (4.1), в чем можно убедиться, сравнивая (3.2) и (4.5) (где, как мы видели выше, следует положить  $\eta = -2$ ). Это обстоятельство тесно связано с результатом, полученным в п.3, который состоит в том, что если  $P_0 \neq 0$ , то линеаризованное решение становится несправедливым при достаточно больших  $\tau$ , каким бы малым не было начальное возмущение  $\chi(z)$ .

Если теперь считать  $P_0 = 0$  и сравнить (3.2), куда подставлены асимптотические выражения (3.4), с разложением (4.5) и (4.11), (4.12), то мы получим, что при достаточно малых значениях параметра нелинейности  $\sigma$ , определенного в (2.20), или, соответственно, больших  $\mu$ , коэффициенты  $A_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  имеют вид

$$A_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi} \mu} \frac{P_{k+1}}{(k+1)!} + \bar{O}(\mu^{-1}), \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (4.13)$$

$$\alpha_{2m} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi} \mu} \frac{P_{2m+1}}{(2m+1)!} + \bar{O}(\mu^{-1}), \quad \alpha_{2m+1} = O(\mu^{-1}) \quad (4.14)$$

$$\beta_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi} \mu} \frac{P_{2m+2}}{(2m+2)!} + \bar{O}(\mu^{-1}), \quad \beta_{2m} = O(\mu^{-1})$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Выражение (4.12) определяет главный член в асимптотике  $\Psi_k(z)$  при больших отрицательных  $z$ . Следующие члены можно найти методом итераций. Ограничившись одной итерацией, получим

$$\psi_k(z) \approx \psi_k^{(0)}(z) + z^{\frac{k-1}{2}} \left[ a_k \sin \frac{\gamma}{3} |z|^{3/2} + b_k \cos \frac{\gamma}{3} |z|^{3/2} + c_k \right], \quad (4.15)$$

где  $\psi_k^{(0)}(z)$  определено в (4.12), и

$$a_k = -\frac{1}{16} \sum_{p=0}^k (\alpha_{k-p} \alpha_p - \beta_{k-p} \beta_p), \quad (4.16)$$

$$b_k = \frac{1}{8} \sum_{p=0}^k \alpha_{k-p} \beta_p$$

$$c_k = -\frac{1}{11} \sum_{p=0}^k (\alpha_{k-p} \alpha_p + \beta_{k-p} \beta_p)$$

При  $k=0$  выражения (4.15), (4.16) совпадают с формулами, определяющими асимптотику автомодельного решения, полученными в /2/ (в формуле (3.10) этой работы имеется опечатка: отсутствует неосциллирующий член, пропорциональный  $z^{-1/2}$ ).

Если теперь подставить (4.15) и (4.16) в формулу (4.5) (где  $\eta = -2$ ), то после простых выкладок получается следующее асимптотическое выражение для решения вида (4.5) в области больших отрицательных  $z$ :

$$\begin{aligned} \eta = \left( \frac{k}{3\mu\tau} \right)^{1/2} \left\{ \psi_1(k) \cos \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ \left. + \psi_2(k) \sin \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} + \frac{1}{12\mu^2\tau k} \left\{ \frac{1}{2} \psi_1(k) \times \right. \\ \times \psi_2(k) \cos \frac{\gamma}{3} |z|^{3/2} - \frac{1}{4} [\psi_1^2(k) - \psi_2^2(k)] \times \\ \times \sin \frac{\gamma}{3} |z|^{3/2} - \frac{1}{3} [\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)] \left. \right\} \quad (4.17) \end{aligned}$$

где

$$k = |z| / 3\mu\tau |^{1/2}, \quad z = (3\mu\tau)^{-1/3} \xi \quad (4.18)$$

$$\psi_1(k) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n k^n, \quad \psi_2(k) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n k^n \quad (4.19)$$

В предельном случае  $\sigma \ll 1$  или  $\mu \gg 1$  коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  определяются формулами (4.14) и функции  $\psi_1, \psi_2$  переходят, согласно

(3.6), в

$$\psi_1 \rightarrow (\sqrt{\pi} k)^{-1} \text{Im } \tilde{\chi}(k), \quad \psi_2 \rightarrow (\sqrt{\pi} k)^{-1} \text{Re } \tilde{\chi}(k) \quad (4.20)$$

где  $\tilde{\chi}(k)$  — Фурье — образ начального возмущения  $\chi(\xi)$ . При  $\sigma \geq 1$  соотношения (4.20) уже не имеют места и явное выражение функции  $\psi_1, \psi_2$  через начальные возмущения получить не удастся. Тем не менее, формула (4.17) полезна и в этом случае, так как она содержит важную информацию относительно общих качественных характеристик решения. Из нее следует, что решение при  $\xi < 0, |\xi| \gg 1$  имеет вид синусоидальных волн, фаза которых зависит от  $\xi, \tau$  как  $|\xi|^{3/2}$ , а амплитудные множители "главной гармоники"  $\psi_1, \psi_2$  зависят от  $\xi, \tau$  только через "локальное" волновое число  $k$ , определяемое формулой (4.18)<sup>3)</sup>. Хотя функции  $\psi_1, \psi_2$  при  $\sigma \geq 1$  отличаются от тех, которые получаются в линейном приближении, общая зависимость фаз и амплитуд от  $\xi, \tau$  такая же как и в линеаризованном решении. В связи с этим, мы будем называть решения вида (4.5) квазилинейными решениями уравнения Кортевега-де Вриза<sup>4)</sup>. Нелинейные эффекты в этих решениях состоят в появлении кратных гармоник и некоторого среднего возмущения, которые малы при  $|\xi| \gg 1$  и выражаются через амплитуды  $\psi_1, \psi_2$ .

Оказывается, что квазилинейные решения существуют только при  $\sigma < \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — некоторое критическое значение числа. Это вытекает из того, что все функции  $\psi_k(\xi)$  определяются уравнениями (4.6) через  $\psi_0(\xi)$ , входящую в автомодельное решение. Последнее же, как следует из результатов работы /2/, существует не при всех  $\sigma$ . А именно, как было показано в /2/, функция  $\psi_0(\xi)$ , имеющая при больших положительных  $\xi$  вид (4.11) (где  $k=0$ ), не будет иметь особенностей на вещественной оси лишь при  $A_0 < 3,6$ . Если теперь воспользоваться для грубой оценки формулой (4.13), то получится, что  $P_1/\mu < 7$ , где  $P_1$ , согласно (4.1) равно площади обтекаемого контура (в безразмерных единицах). Если характерные

3) Фаза выражается через "локальное" волновое число так же, как и в плоской волне, удовлетворяющей линеаризованному уравнению Кортевега-де Вриза:

$$\frac{3}{2} \xi^{3/2} = k\xi - \omega\tau \quad (\omega = -\mu k^3)$$

4) Как и в линейном приближении, асимптотические выражения (4.17)–(4.19) описывают достаточно большую часть волнового пакета при  $\mu\tau \gg 1$  (см. примечание 3).

длину  $l$  и толщину  $b$  контура в (2.15) выбрать таким образом, чтобы  $P_1 = 1$ , то согласно (2.20), для критического  $\sigma$  получится

$$\sigma_c \sim 3 \quad (4.21)$$

При  $\sigma > \sigma_c$  автомодельное и, соответственно, квазилинейные решения уравнения Кортевега-де Вриза уже не существуют. Этот результат согласуется с численными решениями уравнения Кортевега-де Вриза, которые показывают, что при достаточно больших  $\sigma$  (превышающих критическое значение) в головной части профиля решения возникает солитон (а при очень больших  $\sigma$  - несколько солитонов), которые не описываются квазилинейным решением. При  $\sigma < 3$  солитонов обнаружено не было. В качестве иллюстрации мы приводим рис. 2-3, где изображены численные решения уравнения Кортевега-де Вриза (полученные Ю.А.Березиным) при начальном условии вида

$$\eta(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \exp(-\xi^2) \quad (4.22)$$

(качественно близком к (2.17) при нулевом угле атаки) и фиксированных достаточно больших  $\tau$ . На рис. 2 приводится вид решения  $\eta(\xi, \tau)$ , в зависимости от  $\xi$  при  $\sigma = 2$ , а на рис. 3 - при  $\sigma = 6$ . С увеличением  $\tau$  эти кривые изменяются таким образом, что все гребни волн, кроме головной, движутся влево, максимумы же головных волн - вправо (при  $\sigma = 2$  значительно медленнее, чем при  $\sigma = 6$ ). Разница между решениями при  $\sigma = 2$  и  $\sigma = 6$  состоит прежде всего в том, что головная волна при  $\sigma = 6$  имеет тенденцию к отрыву от остальной части профиля (при  $\tau \rightarrow \infty$ ) и по мере этого процесса, её амплитуда  $\eta_0$  перестает изменяться. Скорость движения максимума головной волны, определенная "экспериментально", приближается к скорости солитона  $V$  той же амплитуды  $\eta_0$  (как известно,  $V = \eta_0/3$ ), а профиль волны довольно точно совпадает с профилем солитона. Для наглядности на рис. 3 изображен профиль солитона  $\eta = \eta_0 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ (\eta_0/12\mu)^{1/2} (\xi - \xi_0) \right\}$  с той же амплитудой  $\eta_0$ , что и у головной волны, наложенной на последнюю. Небольшое расхождение между ними имеет место практически только в задней части профиля (солитону отвечает пунктирная кривая); оно сокращается с увеличением  $\tau$ . Все это дает основание считать, что при  $\sigma = 6$  из волнового пакета, представляющего решение, выделяется солитон.

Что касается решения при  $\sigma = 2$ , то здесь не была обнаружена тенденция к установлению стационарной формы у головной волны. Амплитуды всех волн здесь медленно убывают и весь пакет расплывается.

При достаточно больших  $\sigma$  число солитонов превышает единицу. Например, как показывает численное решение, при  $\sigma = 40$  образуется не менее двух солитонов.

## 5. Заключение

В качестве заключения мы рассмотрим общий вид различных характеристик течения при обтекании тела с нулевым углом атаки. Из результатов п.4 вытекает, что структура потока будет различной при малых и больших  $\xi = (\varepsilon \mu \tau)^{-1/3} \xi$ . Рассмотрим эти области подробнее. При этом мы будем предполагать, что  $\mu > 0$  (переход к отрицательным  $\mu$  осуществляется заменой  $\eta \rightarrow -\eta$ ,  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $\tau \rightarrow \tau$ ).

а)  $\xi < 0$ ,  $|\xi| \gg 1$  (согласно формулам (2.15) — это область, находящаяся внутри угла Маха и не слишком близко примыкающая к линиям Маха). Если  $\sigma < \sigma_0$  (см. (4.21)), то течение описывается квазилинейным решением уравнения Кортевега-де Вриза. В рассматриваемой области это решение дается формулами (4.17)–(4.19). Если пренебречь кратными гармониками, то линии равной фазы определяются уравнением  $\xi = \text{const}$  или, в координатах  $x, y$ ,

$$x = \pm \sqrt{M^2 - 1} y \pm c \left( \frac{3\delta^2 M^2}{c^2 \sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} y^{1/3} \quad (5.1)$$

где  $c = -\xi$  (знаки  $\pm$  берутся для верхней и нижней полуплоскостей). На рис.4 кривые этого семейства обозначены цифрой II, а линии Маха — цифрой I. Касательные к линиям (5.1) имеют угловой коэффициент, асимптотически приближающийся при  $y \rightarrow \infty$  к  $(M^2 - 1)^{-1/2}$ ; значение параметра  $c$  возрастает в направлении от линии Маха ( $\xi = 0$ ) к оси  $x$  ( $\xi = \infty$ ).

Уравнение линий постоянного волнового числа  $k = \text{const}$  имеет в координатах  $x, y$  вид  $y = \text{const} x$ , причем  $k$  возрастает от линии Маха к оси  $x$  (где  $k = \infty$ ). Таким образом, коротковолновая область находится вдали от линии Маха, в то время как около последних волны, исходящие от обтекаемого тела, являются длинными.

б) Перейдем теперь к области длинных волн. Качественное представление о ней можно получить, рассматривая точки с фиксированным  $\xi \leq 1$  и достаточно большими  $\tau : (\varepsilon \mu \tau)^{1/3} \gg 1$ . Тогда в формуле (4.5) можно ограничиться первым исчезающим членом, который представляет собой автомодельное решение (4.2). Поведение функции

$\Psi_0(z)$  качественно аналогично  $\Phi'(z)$ , где  $\Phi(z)$  — функция Эйри (см. рис. 3 из работы /2/, при этом надо иметь в виду, что на этом рисунке изображена функция  $\Psi_0(-z^{1/2})$ ).

Обозначим через  $z_0$  значение  $z$ , при котором  $\Psi_0(z)$  имеет крайне правый максимум (будем называть его в дальнейшем первым). Из упомянутого рис. 3 работы /2/ видно, что  $z_0 > 0$ . При уменьшении параметра подобия  $\sigma$  (2.20), функция  $\Psi_0(z)$  стремится к соответствующему решению линеаризованного уравнения, т.е. к  $-\Phi'(z)$ , последняя же имеет первый экстремум при  $z=0$ . Таким образом, при уменьшении  $\sigma$ ,  $z_0 \rightarrow 0$ . Как показывают численные расчеты (см. рис. 3 из /2/),  $z_0$  все еще очень мало даже при  $\sigma \rightarrow \sigma \sim 3$ , когда перестают существовать квазилинейные течения. Уравнение линии первого максимума  $(3\mu z)^{-1/2} z = z_0$  в координатах  $x, y$  имеет вид (5.1), где  $C$  является отрицательной величиной, малой по модулю:  $C = -z_0$ . Эта кривая изображена на рис. 5 под номером III; она выходит за пределы угла Маха, а её наклон при  $y \rightarrow \infty$  уменьшается, приближаясь к наклону линии Маха.

в) При достаточно больших  $\sigma$ , превышающих  $\sigma_0$ , в профилях решения  $\eta(z, \tau)$  появляются солитоны. Вершины последних "движутся" вдоль линий  $z = \eta_0 \tau / 3 + \text{const}$ , где  $\eta_0$  — амплитуда солитона. В координатах  $x, y$ , уравнения этих линий имеют вид

$$x = \pm y \sqrt{M^2 - 1} [1 - \eta_0 (\sigma + 1) M^2 / 6 (M^2 - 1)^{3/2} e] + \text{const}$$

т.е. представляют собой прямые, лежащие вне угла Маха (рис. 4, IV). Их угловой коэффициент увеличивается с амплитудой  $\eta_0$ ; эти амплитуды не должны меняться после того, как солитон сформировался.

Наконец, уточним область применимости всех наших асимптотических выражений.

Соответствующее условие проще всего получить из уравнения (5.1), потребовав чтобы второй член в правой части был значительно меньше первого. Тогда, принимая во внимание, что  $C = -z_0$ , получим

$$|x - \sqrt{M^2 - 1} y| \ll \sqrt{M^2 - 1} |y| \quad (5.2)$$

5) Условие (5.2) отражает ограниченную область применимости основного уравнения (2.16).

Кроме того, условие  $\mu \tau \gg 1$  (см. примечание 4) означает, что

$$\gamma/c \gg (\epsilon/\delta)^2 M^4 (M^2 - 1)^{-1/2} \quad (5.3)$$

В заключение автор выражает благодарность Ю.А.Березину за численные расчеты и А.В.Гуревичу, Л.П.Питаевскому, Р.З.Сагдееву за полезные обсуждения работы.



## П р и л о ж е н и е

### Решение уравнений (4.9)

Дифференцируя (4.5), получаем  $\psi'_k(z) = \psi_{k+1}(z)$ ; отсюда следует, что  $\psi_k(z) = f^{(k+1)}(z)$ , где  $f(z)$  удовлетворяет уравнению

$$f'' - z f = a \quad (\text{A.1})$$

$a$  - произвольная постоянная. Общее решение уравнения (A.1) есть сумма общего решения однородного уравнения, т.е. уравнения Эйри, и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения, как нетрудно проверить, есть

$$f(z) = -a \phi(z) \int_{z_0}^z d\zeta \phi^{-2}(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \phi(\eta) d\eta \quad (\text{A.2})$$

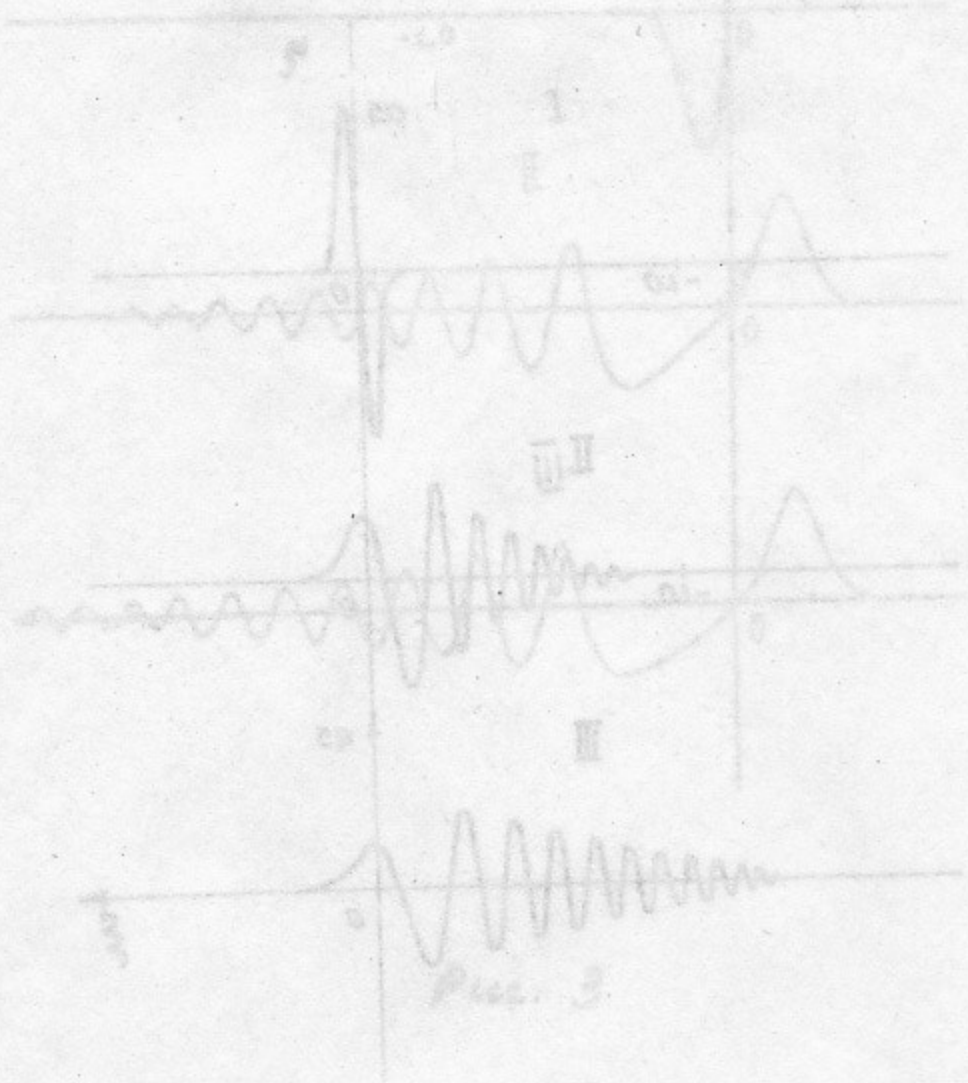
При  $z \gg 1$  из (A.2) следует:  $f(z) \approx -a/z$ , при  $z \rightarrow -\infty$  функция  $f(z)$  быстро осциллирует, как и  $\phi(z)$ . Нетрудно убедиться, что если  $a \neq 0$ , то решение (4.5) будет иметь при  $z \rightarrow \infty$  асимптотику, существенно отличающуюся от линейной (которая определяется (3.1)) даже в случае малых значений параметра подобия  $\sigma$ , когда должен иметь место предельный переход к линейному приближению. Поэтому представляется естественным положить  $a = 0$ . Тогда единственное затухающее при  $z \rightarrow \infty$  решение уравнения (A.1) есть функция Эйри  $\phi(z)$ , а соответствующие решения уравнения (4.9) имеют вид (4.10).

Подписи к рисункам

Рис.2. Профиль решения уравнения Кортевега-де Вриза при  $\sigma = 2$ ,  
и различных  $\tau$  : I -  $\tau = 0$ , II -  $\tau = 0,1$ ; III -  $\tau = 0,2$

Рис.3. Профиль решения уравнения Кортевега-де Вриза при  $\sigma = 6$ ;  
I -  $\tau = 0$ , II -  $\tau = 0,8$ ; III -  $\tau = 1,2$

Рис.4. Общий вид линий равной фазы в различных областях  
течения.



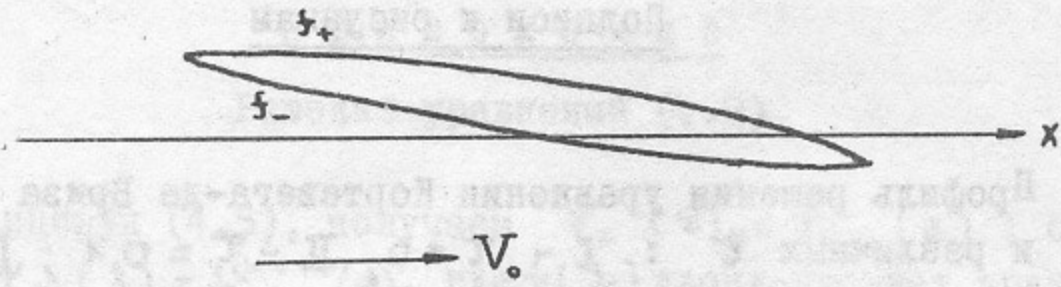


Рис. 4

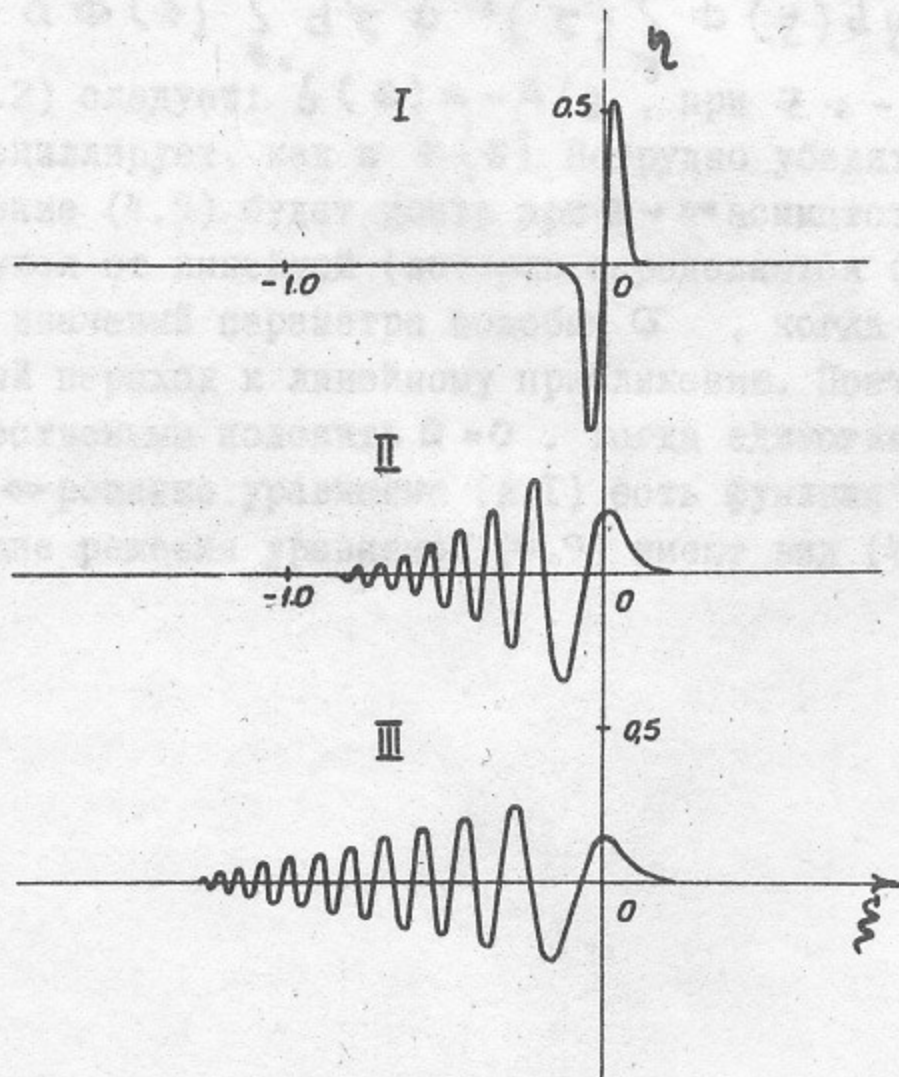


Рис. 2.

Литература

1. И. С. Голубев, В. И. Ларин, *Изв. АН СССР*, 1957, 1966.  
2. И. С. Голубев, В. И. Ларин, *Изв. АН СССР*, 1957, 1966.  
3. И. С. Голубев, В. И. Ларин, *Некоторые свойства спектров*, 1964.  
4. И. С. Голубев, *Вопросы теории дифференциальных уравнений*, 1975.  
5. C. S. Gokhale, G. K. Murthy, *Journal of Math. Sci.*  
6. G. W. Whitaker, *Proc. Roy. Soc. A*, 1937, 1957.  
7. G. W. Whitaker, *Proc. Roy. Soc. A*, 1957, 1967.

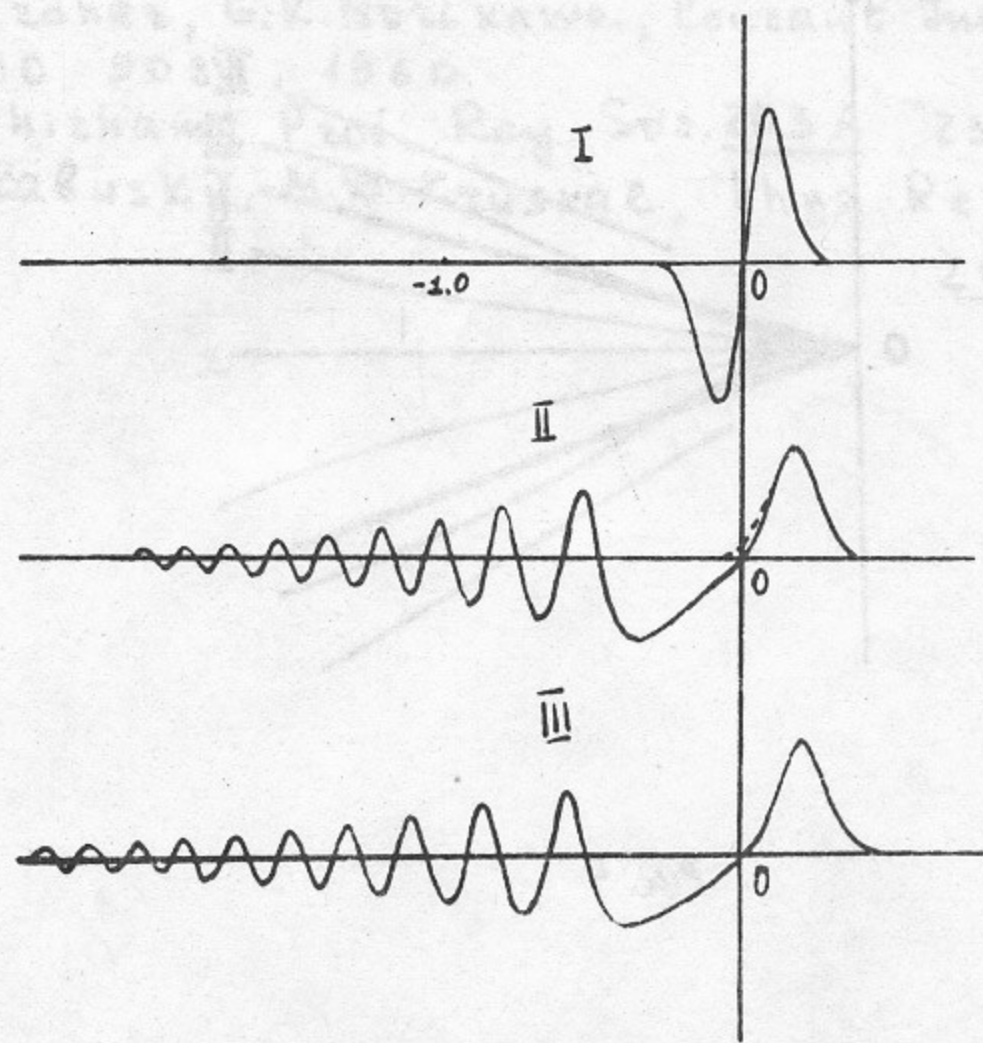


Рис. 3

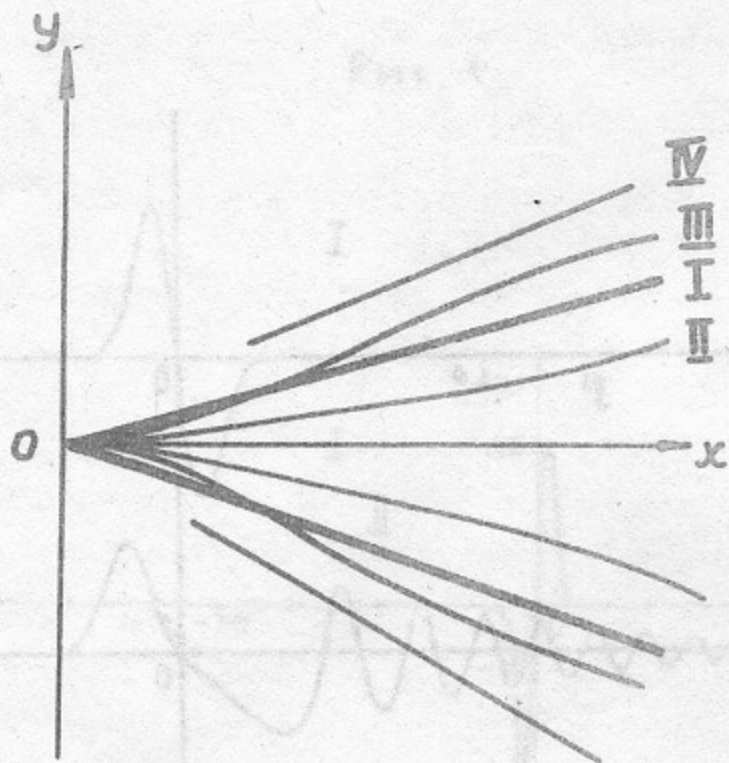


Рис. 4

## Л и т е р а т у р а

1. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 51, 1557, 1966.
2. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 46, 1880, 1964.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1964.
4. Дж.Дж.Стокер. Волны на воде. Изд-во ин.лит., 1959.
5. C. S. Gardner, G. K. Morikawa, Constant Inst. of Math. Sc. Rep. NYO 9082, 1960.
6. G. W. Whitham, Proc. Roy. Soc. 283 A, 238, 1965.
7. W. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15,  
240, 1965.

Содержание

1. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 51, 1957, 1964.
2. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
3. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
4. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
5. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
6. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
7. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
8. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
9. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.
10. В.А. Боровик, В.Н. Карпов. УДТ, 44, 1960, 1964.

**Ответственный за выпуск Моисеев С.С.**

---

Подписано к печати 2.01.1967 г., заказ № 95,  
1,4 печ.л., тираж 200 экз., оесплатно

---

Отпечатано на роталпринте в ИЯФ СО АН СССР