ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт- 83

Н.В.Асташкина,В.В.Вечеславов

Численный расчет траекторий частиц на предельное время

НОВОСИБИРСК 1966

ВВЕДЕНИЕ

Жесткие допуски на магнитное поле в ускорителе с переменным градиентом заставляют искать различные пути стабилизации резонансных возмущений. В настоящей работе приводятся методика и результаты численного расчета траекторий в упрощенном поле ускорителя при наличии кубической (по полю) нелинейности. Эти расчеты являются продолжением попыток работы /I/ добиться стабилизации резонансов с помощью специально подобранной нелинейности. Результат настоящей работы, также как и работы /I/ отрицательный: новые "нелинейные" типы неустойчивости развиваются раньше, чем стабилизация становится сколько-нибудь эффективной. Несмотря на неудачу, дальнейшие поиски методов стабилизации должны быть по нашему мнению, продолжены, причем численный счет необходимо дополнить качественной теорией, которая позволила бы отличить принципиальную невозможность стабилизации от случайного неудачного выбора параметров.

§ I. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

АНАЛИЗ ВЫБОРА МЕТОДА СЧЕТА

Уравнения траекторий частиц в ускорителе выберем в виде:

$$\begin{cases} x'' \mp |n| x = \beta(z^2 - x^2) \pm \alpha(x^3 - 3xz^2) \\ z'' \pm |n| z = \beta z x \pm \alpha(z^3 - 3zx^2) \end{cases} \qquad (I)$$

Левая часть представляет линейное приближение в пренебрежении кривизной траектории и изменением продольной скорости частиц. Слева представлены нелинейные члены; стабилизирующие кубические (с коэффициентом α) и квадратичные (с коэффициентом β). Последняя нелинейность оказывает вредное влияние, однако, от нее обычно трудно избавиться.

Приведем эту систему II-порядка к системе уравнений I-порядка, положив $x = y_1;\ x' = y_2;\ z = y_3;\ z' = y_4;$

$$\begin{aligned} & y_1' = y_2 = f_1(x, y) \\ & y_2' = \pm |n| y_1 + \beta(y_3^2 - y_1^2) \mp \alpha(y_1^3 - 3y_1 y_3^2) = f_2(x, y) \\ & y_3' = y_4 = f_3(x, y) \\ & y_4' = \mp |n| y_3 - \beta y_1 y_3 \pm \alpha(y_3^3 - 3y_1^2 y_3) = f_4(x, y) \end{aligned} \qquad (2)$$

Начальные условия:

$$\vec{y}_0(y_{10};\ y_{20};\ y_{30};\ y_{40}) = 0 \qquad (3)$$

задаются, если решается задача с возмущением.

Для задачи без возмущения начальными условиями являются

$$y_{10} = y_{30} \neq 0; \qquad y_{20} = y_{40} = 0; \qquad (4)$$

Задание возмущения системе обеспечивается следующим образом: численный счет данной системы ведется по заданным участкам в ускорителе. Двум разным участкам соответствуют разные знаки при коэффициентах $|n|$ и α в системе (2). В процессе счета участки чередуются.

Счет ведется так, что решение системы (2) $\vec{y}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ в конце одного участка, получив возмущение $\vec{y}(y_1 + \delta y_1;\ y_2;\ y_3 + \delta y_3,\ y_4)$. Становится начальным условием для решения системы (2) на следующем участке.

Задание возмущения δy_1 и δy_3 соответствует сдвигу участков относительно друг другу без поворота. Возмущения δy_1 и δy_3 генерировались случайным образом на каждом участке.

Для того, чтобы среднее квадратичное возмущение $\sqrt{\overline{\delta y_1^2}} \cong \sqrt{\overline{\delta y_3^2}}$ на сумме участков не превосходило заданной величины, например,

$$\sqrt{\overline{\delta y_1^2}} \cong \sqrt{\overline{\delta y_3^2}} \cong 0{,}5 \cdot 10^{-2}$$

генерация случайных чисел ведется на участке 0 + 0,5 и полученные случайные числа умножаются на величину " K ", найденную из условия:

$$\sqrt{\overline{\delta y_1^2}} \cong \sqrt{\overline{\delta y_3^2}} = K \sqrt{\overline{x^2}}, \text{ где}$$

$$\overline{x^2} = \int_0^1 (x - 0{,}5)^2\, dx \cong 0{,}08$$

Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка типа (2) обычно используются шаговые методы численного счета уравнений. Применение таких методов требует анализа в каждом конкретном случае.

К нашей системе (2) приложен ряд требований, которые должны быть учтены при выборе метода счета:

I. Численный расчет траекторий частиц по системе (2) с начальными условиями (3) должен быть рассчитан на предельное время; это приводит к необходимости выбора метода, требующего как можно меньше обращений для численного счета правых частей уравнений (2).

2. Основным требованием к методу всегда остается требование большого порядка точности и устойчивости счета;

3. Метод должен способствовать легкой смене шага в процессе численного счета;

4. Погрешность счета должна быть невелика;

5. Метод должен занимать как можно меньший объем памяти ЭВМ.

Проведение сравнения ряда широко известных методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений позволило сделать ряд выводов.

Методы Рунге-Кутта (см. /2/)

Преимущества:

I. Не надо никаких разгонов.
2. Малый объем памяти ЭВМ.
3. Легкая смена шага без пересчетов.
4. Высокая устойчивость для не очень высоких порядков ($\leq 4 + 5$).

Погрешность шага 4-го порядка $\sim \frac{h^5 y^{(5)}}{120}$

Недостатки:

I. Несколько обращений к правой части уравнений на счете I шага (4 для 4-го порядка; 6 для 5-го порядка).
2. Необходимость принятия специальных мер для слежения за точностью и сменой шага.

Метод Адамса (см. /2/).

Преимущества:

I. Меньше, чем у Рунге число обращений к правой части;
2. Легкое слежение за точностью на шаге.

Погрешность метода $\sim \frac{25I}{720} h^5 \cdot max|y^{(5)}|$

Недостатки:

I. Большой объем памяти ЭВМ.
2. Сложная перестройка на измененный шаг.
3. Неустойчивость, для компенсации которой надо интерполировать, возможно не один раз.
4. Необходим предварительный разгон по другому методу.

Метод Адамса с привлечением производных высших порядков /3/ экономит память ЭВМ, но считается ненадежным и может быть использован лишь для очень простых правых частей.

Почти все методы численного счета имеют грубые оценки погрешности /4-6/, причем для устойчивых разностных схем эффективных оценок не имеется. Иногда можно получить независимую оценку, для чего решается система уравнений, дающая рекурентную оценку, но это требует большой затраты труда .../7/.

Единственным средством контроля явился счет с удвоенным шагом, который велся параллельно с основным и решалась контрольная задача, результат которой был известен заранее на основе физических данных.

При выборе метода счета исходили из расчета машинного времени, необходимого для счета I шага. Для этого наиболее эффективные разностные методы подсчитывались по "цене" машинного времени на I шаг непосредственно по формулам, которые были бы заложены в программу.

Наиболее пригодным для численного счета системы (2) оказался метод, предложенный Скрэтоном /8/. Он с помощью квадратурной формулы Радау получил для интегрирования дифференциального уравнения схему УI порядка точности, требующей только 3-х кратного вычисления правой части на текущем шаге интегрирования.

Для начала работы по схеме требуется проведение вычислений в 3-х предыдущих точках, что рациональнее всего провести по методу Рунге-Кутта, используя его схему IУ порядка точности.

§ 2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА СЧЕТА

Система (2) $\vec{y}'_i = f_i(x, y)$

$i = 1,2,3,4$ $\qquad \vec{y} = \vec{y}(y_1, y_2, y_3, y_4)$

С начальными условиями (3) $\vec{y}_0 = 0$, где y_1 и y_3 - решения системы, решается по схеме Радау УI порядка точности, требующей только 3-х кратного вычисления правой части на текущем шаге интегрирования. В начальной точке, при изменении шага и смене участков дополнительно вычисляются y_{-1}, y_{-a}, y_{a-1} , где $a = 0{,}27639320$

I. Схема Радау для системы (2)

$$y_{a,j} = y_{o,j} + 0{,}27639320\, h y'_{o,j} + 0{,}06457768\, F_{o,j+1} - 0{,}03874353\, F_{-a,j+1} + {}$$
$$+ 0{,}01871643\, F_{a-1,j+1} - 0{,}00635398\, F_{-1,j+1} + O(h^6)$$

$$y_{1-a,j} = y_{o,j} + 0{,}72360680\, h y'_{o,j} + 0{,}29711983\, F_{a,j+1} - {}$$
$$- 0{,}12944272\, F_{o,j+1} + 0{,}10987164\, F_{-a,j+1} - 0{,}01574536\, F_{a-1,j+1} + O(h^6)$$

$$y_{j} = y_{o,j} + h y'_{o,j} + \frac{1}{12} F_{o,j+1} + 0{,}30150283\, F_{+a,j+1} + 0{,}11516383\, F_{1-a,j} + O(h^6)$$

$$h y'_{j} = h y'_{o,j} + \frac{1}{12}\left(F_{o,j+1} + 5 F_{a,j+1} + 5 F_{1-a,j+1} + F_{1,j}\right) + O(h^8)$$
$$j = (1,3); \quad F = h^2 f$$

Дополнительные вычисления y_{-1} , y_{-a} , y_{a-1} по схеме IУ порядка точности:

Схема Рунге-Кутта:

$$K_{1,j} = f_j(x_0; y_{10}; y_{30});$$
$$K_{2,j} = f_j\left(x_0 + \frac{h_R}{2}; y_{10} + \frac{h_R}{2} y_{20} + \frac{h_R^2}{8} K_{12}; y_{30} + \frac{h_R}{2} y_{40} + \frac{h_R^2}{8} K_{14}\right);$$
$$K_{3,j} = f_j\left(x_0 + h_R; y_{10} + h_R y_{20} + \frac{h_R^2}{2} K_{22}; y_{30} + h_R y_{40} + \frac{h_R^2}{2} K_{24}\right);$$
$$(j = 2,4)$$

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + h_R y_{20} + \dfrac{h_R^2}{6}(K_{12} + 2K_{22}); \\ y_3 = y_{30} + h_R y_{40} + \dfrac{h_R^2}{6}(K_{14} + 2K_{24}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_R y_2 = h y_{20} + \dfrac{h_R^2}{6}(K_{12} + 4K_{22} + K_{32}); \\ h_R y_4 = h y_{40} + \dfrac{h_R^2}{6}(K_{14} + 4K_{24} + K_{34}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h y_2 = \dfrac{h_R}{\lambda} y_2; \\ h y_4 = \dfrac{h_R}{\lambda} y_4; \end{cases} \qquad h_R = \lambda h$$

h – шаг счета по схеме Радау;
h_R – шаг счета по схеме Рунге-Кутта;
λ – принимает значения a , $1-2a$, a .

Для получения возмущений δy_1 и δy_3 проводится генерирование случайных чисел с помощью датчика на ЭВМ. Программа получения случайных чисел имеет вид:

$$\begin{array}{lllll} K & 034 & \langle\lambda\rangle & \langle\lambda\rangle & \langle\lambda\rangle \\ K+1 & 066 & \langle\lambda\rangle & \langle\lambda\rangle & \langle\lambda\rangle \end{array} \qquad (5)$$
$$\langle\lambda\rangle \sim \{\beta x_n\}$$

Задание трех производных чисел x_n ($n = 1,2,3$) и β обеспечит нам получение 3-х случайных чисел на программе (5).

§ 3. ИНСТРУКЦИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММОЙ

Обращение к программе < 056-0032 > . Программа состоит из 2-х частей.

Основой программы и блока обработки (БО) решений системе, получаемых на каждом шаге. Останов задачи по команде (017) в ячейке [0755] .

Начало работы программы:

1. Программа требует вызова ИС-2.
2. Необходим перевод в двоичную систему из десятичной записи двух массивов чисел:
   а) [7000 + 7055] – константы задачи
   б) [0424 + 0450] – константы в схеме Радау.
3. Начальные данные задачи засылаются:
   h (7000) $\Rightarrow$ [0100]
   x_0 (7001) $\Rightarrow$ [0101]
   y_{10} (7002) $\Rightarrow$ [0102]
   $h y_{20}$ (7003) $\Rightarrow$ [0103]
   y_{30} (7004) $\Rightarrow$ [0104]
   $h y_{40}$ (7005) $\Rightarrow$ [0105]
4. Необходимо очистить признак, засылаемый в ячейку [0030] после работы программы счета по схеме Рунге-Кутта. Нуль

в ячейке [0030] указывает, что программа будет работать с метода Рунге-Кутта; единица в ячейке [0030] соответствует работе программы по схеме Радау.

<u>Распределение памяти:</u>

[0030] – признак
[003I] – запоминание РА
[0032 + 0072] ; [0I34 + 02I3] – программа по схеме Р-К.
[0275 + 0423] – программа по схеме Радау, включающая константы формирования ячейки [0I35] ; [0424 + 0446] – константы [7000 + 7050] – константы; [0500 + 0527] – программа счета правых частей уставнений системы;
[0600 + 0776] – блок обработки решений (БО), включающий константы формирования ячеек [0600] , [0667] , ячейки для хранения нужных величин и произвольные числа для датчика случайных чисел.

Рабочие ячейки:

[0026], [0027], [0I06], [0I07], [0II0], [0III], [022I + 0274]; [0450+0455]; [7060], [I000 + I0I0],

Аргументы для счета правых частей уравнений системы (2) засылаются:

$y_1 \Rightarrow$ [022I] $n \Rightarrow$ [0574]
$y_3 \Rightarrow$ [0223] $\alpha \Rightarrow$ [0575]
$\beta \Rightarrow$ [0576]
$2\beta \Rightarrow$ [0577]

<u>Результаты</u> засылаются

$h \Rightarrow$ [0I00] [02I5] $\Leftarrow f_2$
$x \Rightarrow$ [0I0I] [02I7] $\Leftarrow f_4$
$y_1 \Rightarrow$ [0I02] $hy_2 \Rightarrow$ [0I03] [076I] $\Leftarrow \max|y_1|$
$y_3 \Rightarrow$ [0I04] $hy_4 \Rightarrow$ [0I04] [0762] $\Leftarrow \max|y_3|$

[7000 + 7045] – const задачи.

[7000] – h
I – x_0
2 – y_{10}
3 – y_{20}
4 – y_{30}
5 – y_{40}
6 – x предельное
7 – y_1 предельное
[70I0] – пр.
I –
2 – } числа "I"
3 – длина (φ_D) Ф – участка
4 – длина (φ_φ) ф – участка
5 – $\varphi = \varphi_D$ или φ_φ
6 – пф/м^2
7 – пф/м^2
[7020] – α_φ
I – α_D
2 – β_φ
3 – β_D
4 – $2\beta_\varphi$
5 – $2\beta_D$
[7026] – 0
7 }
[7030] – $(K_0 \Delta M)^{-2}$
I – 0
2 – 0
[7030] – 3 – I оборот = x участков h
4 – — " —
5 – 0
6
7 } – множители K_1 K_2
[7040] – K_3
I – 0
2 – h оборотов
3 – x участков
4 – α_φ
5 – α_D } новые

В начале работы программы после засылки начальных данных предусмотрен уход на БО результатов <056 – 0600 –> . Такой же уход после каждого шага счета программы. РА сохраняется в ячейке [003I]. Для продолжения счета уходят из БО в ячейку [0047], после смены начальных данных уход в ячейку [0040].

Описание программы

Программа счета дифференциальных уравнений I порядка по схеме Рунге-Кутта реализует схему Рунге-Кутта IУ порядка точности. При этом учитывается смена шага задачи " h " на шаг счета на схеме Рунге-Кутта " h_k ". В программе формируется и очищается ячейка [0I35], которая включает обращение к блоку счета правых частей уравнений. По окончанию вычислений необходимых для счета по схеме Радау, засылается признак "I" в ячейку [0030] и дальнейший счет ведется по схеме Радау.

Схема Радау УI порядка точности непосредственно программируется. Программа включает обращение к счету правых частей уравнений по команде <0I6 ↓ 050I 0500>, РА сохраняется и после каждого шага счета уход на БО по команде <056-0600->.

В программе счета правых частей уравнений программируются правые части уравнений системы (2): f_2 и f_4.

Обращение к программе <0I6 ↓ 050I 0500>

Блок обработки результатов (БО) начинается в ячейке [0600]. Вначале блок содержит проверку решений " y_1 " и " y_3 ", а также длину счета " x " на предельные значения. Если нет конца счета, то предусматривается выбор $\max|y_1|$ и $\max|y_3|$ на каждом шаге, причем $\max$ значение после каждого оборота, равного заданному числу участков, фиксируются и засылаются на печать. Программа меняет участки последовательно один за другим по мере счета, засылая нужные в ячейки [0574], [0575], [0576], [0577].

Чтобы решить задачу на проверку поведения решений системы (линейной $\alpha = 0$ или нелинейной $\alpha \neq 0$) в зависимости от возмущения, БО включает в конце каждого участка обращение к датчику случайных чисел (5) (0673 ÷ 0676).

Датчик использует рабочие ячейки [0773], [0774], [0775] с занесенными в них начальными произвольными числами, которые изменяются в процессе неоднократного обращения к датчику. При трех обращениях к датчику в конце участка, получаем три случайных числа в ячейках [0773], [0774], [0775]. Умножаем их на множители, стоящие в ячейках [7037], [7040], [704I] и добавляем к значениям y_1, y_3, n

$$y_{1н} = y_1 + \delta y_1^{(1)} \qquad n + \delta n^{(1)} = n_н$$

$$y_{3н} = y_3 + \delta y_3^{(1)}$$

Таким образом система получает возмущение $\delta y_i^{(1)}$. Беря новые значения $y_{1н}, y_{3н}$, в качестве начальных условий, продолжаем счет сначала по схеме Р-К, далее по схеме Радау. Датчик выдает новые и новые случайные числа, пока счет ведется на одном обороте. В конце каждого участка старые значения возмущений вычитаются и добавляются новые. На каждом следующем обороте полученные значения случайных чисел повторяются. Это осуществляется засылкой прежних заданных значений, сохраненных в ячейках [0770], [077I], [0772] в рабочие ячейки [0773], [0774], [0775]. Счетчик числа оборотов в "шагах". Заданное число оборотов в ячейке [7042] сравнивается со счетчиком и при их совпадении управление передается в ячейку [500I], где пересылаются необходимые для выдачи значения x, y_1, hy_2, y_3, hy_4 и дальше на печать. Печать в десятичной системе выдает значение случайных чисел, $\max|y_1|$, $\max|y_3|$ на каждом обороте, значения x, y_1, y_3, hy_2, hy_4. Кроме этого на каждом обороте подсчитываются квадратичные ошибки

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(\delta y_{1i})^2}{m}; \qquad \frac{\sum_{i=1}^{m}(\delta y_{3i})^2}{m}; \qquad \frac{\sum_{i=1}^{m}(\delta n_i)^2}{m}$$

где m - число участков в I обороте. Ошибки засылаются в ячейки [I006], [I007], [I0I0] и выдаются на печать. После выдачи на печать очищаются ячейки для хранения $\max|y_1|$ и $\max|y_3|$, восстанавливается ячейка [7034] и очищается РА. По окончании счета (x предельное) или при достижении y_1 и y_3 предельных значений управление передается в ячейку [0727] на печать результатов.

В программе предусмотрены изменения на повторный счет задачи, при новых значениях λ_{φ} и λ_{φ_0}. Задача решается повторно, если в счетчике [I002] отсутствует признак окончания счета "I".

Блок обработки содержит свободные ячейки в местах, позволяющих уйти к вставным блокам, видоизменяющим программу обработки результатов в 4-х случаях:

I. Задача линейная с возмущением $\alpha = 0$; $\beta = 0$ — контроль задачи
2. Счет с удвоенным шагом с возмущением

3. Линейная, с возмущением $\lambda = 0$, датчик
4. Нелинейная, с возмущением $\lambda \neq 0$; датчик.

§ 4 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Программа считала 4 типа задач:

I. Линейная задача без возмущения:
$\lambda = 0$ и датчик отключен.

Данная задача позволила определить правильность численного счета системы уравнений (2) по сохраняющейся в процессе счета величине, выписанной непосредственно для данной системы, исходя из физических соображений.

2. Линейная задача, с возмущением.
3. Нелинейная задача ($\lambda \neq 0$), без возмущения.
4. Нелинейная задача, с возмущением.

2; 3; и 4; типы задач позволили нам получить данные, свидетельствующие о характере устойчивости или неустойчивости частицы в магнитном поле ускорителя, движение которой описывается системой уравнений (2).

Данные результаты нагляднее представить в графическом виде.

Задачи с возмущением решались при следующих начальных данных:

$$h = \pi/10; \quad x_0 = \pi/2; \quad y_{10} = y_{20} = y_{30} = y_{40} = 0$$

$\varphi_{D} = \varphi_{\varphi} = 3{,}14158$ (длина участка)

$$\frac{n_{\varphi}}{M^2} = 0{,}193; \quad \frac{n_{D}}{M^2} = -0{,}193; \quad \beta = 0; \quad 0 \leq \lambda \leq 0{,}3$$

y_1 предельное = $y_{3\,\text{пред.}} = 0{,}5$; $x_{\text{пред.}}$ = любое значение; I оборот = I08 секторов = I080 h.
множители $K_1 = K_2 = 0{,}003$; $K_3 = 0$.

На рис. I представлена зависимость "x" от заданного $\lambda \neq 0$. Стрелка указывает, что при данном "x" решения y_1 и y_3 еще не достигли предельных значений. Точка в конце прямой указывает на достижение y_1 и y_3 предельных значений при данном "x". Примеры устойчивой и неустойчивой траектории изображены на рис. 2. На графиках представлены амплитуды колебаний y_1 и y_3 для двух значений λ. Критическое значение λ, при котором начинается

слабая неустойчивость соответствует $\lambda_{кр} \simeq 0{,}12$. Оценка границы стохастичности к величине того же порядка, но несколько больше $\lambda_{\alpha} \sim 0{,}4$. Отсюда можно заключить, что мы имеем дело со слабой стохастичностью на подходе к неустойчивой области. Вопрос о том, насколько эта неустойчивость может быть ослаблена за счет более разумного выбора параметров остается неясным и требует дальнейших вычислений.

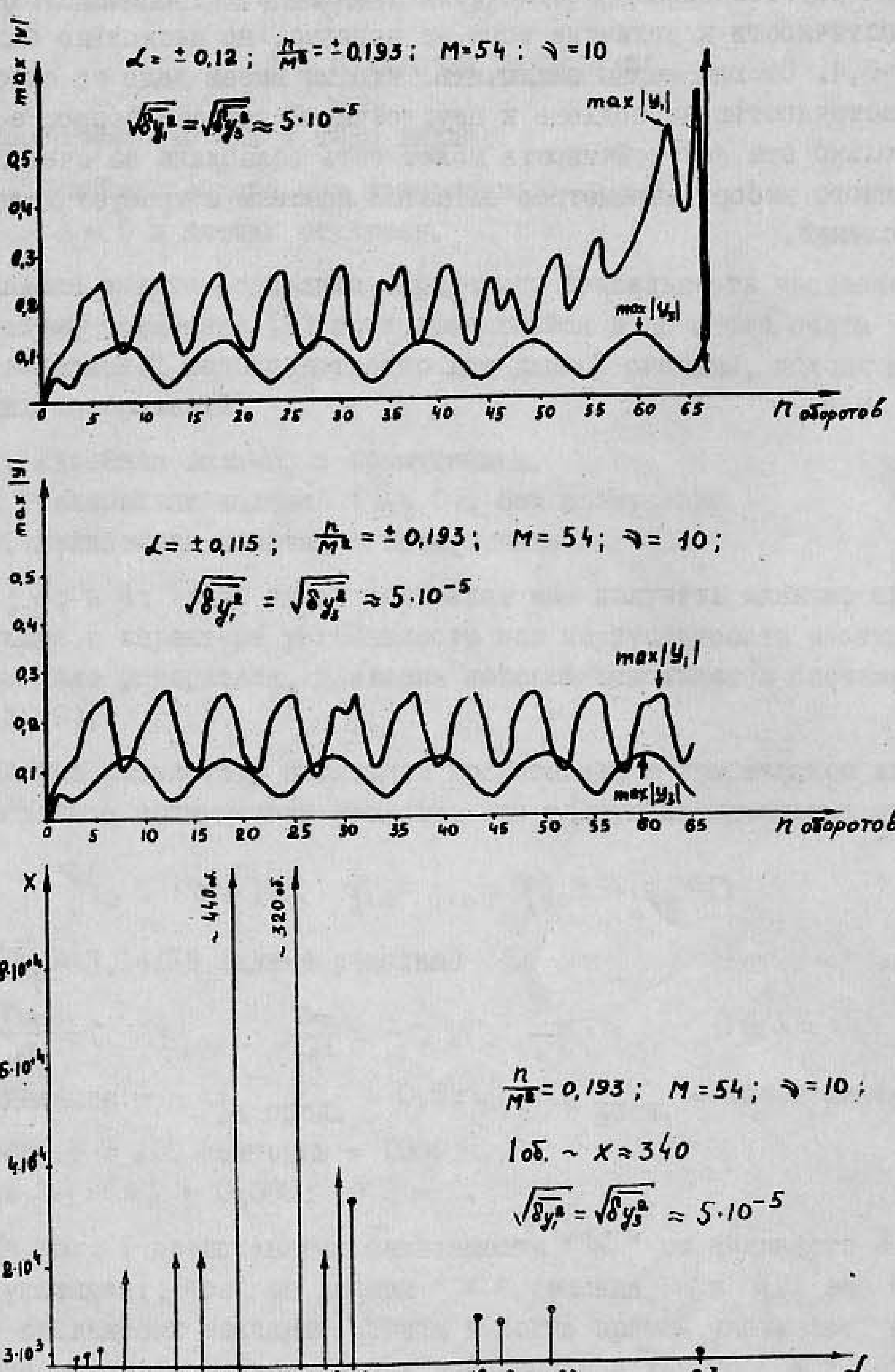

Рис. 1

Литература

I. М. Хайн. Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону на 20–25 Бэв с сильной фокусировкой, 1953 г.

2. Березин и Жидков. Методы вычисления, I.

3. Милн В.Э. Численный анализ, II3.

4. Тихонов, Горбунов. Об оценках погрешности метода типа Рунге-Кутта, Ж. вычислительной математики и математической физики, 1963, т. 3, № I, 195–197.

5. Шура-Бура. Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладная математика и механика, 1952, 16,5, 575–588.

6. Лозинский. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, I изв. вузов, серия математики, 5, 52, 1958.

7. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений, № 87.

8. „The numerical solution of second-order diff. equations not containing the first derivative explicity", Comput. J", 1964, 6, 4, 368-370

Ответственный за выпуск Ф.М.Израйлев
Тираж 200 экз. 0,7 печ.л. Бесплатно
12 ноября 1966г.

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной физики СО АН СССР.