Аннотация.

Обзор посвящен исследованию слаботурбулентного состояния разреженной плазмы, когда можно представить как слабовзаимодействующий газ коллективных колебаний - "квазичастиц" на "фоне" усредненного распределения частиц плазмы. Описывая поведение разреженной плазмы с помощью кинетических уравнений Больцмана для функций распределения частиц и уравнений Максвелла для самосогласованных электрических и магнитных полей и используя теорию возмущений по малому отношению энергии взаимодействия коллективных колебаний между собой и "фоном" к их полной энергии, мы получаем в этом случае кинетические уравнения для числа "квазичастиц" $n_k = \frac{\varepsilon_k}{\omega_k}$ (ε_k - спектральная плотность энергии колебаний, ω_k - частота колебаний). Представление коллективных колебаний в виде отдельных "квантов" позволяет выразить в наиболее простом виде ряд свойств их нелинейного взаимодействия. Для описания взаимодействия колебаний с "фоном" используется квазилинейная теория /I,2/.

Применение полученных уравнений затем иллюстрируется на ряде конкретных примеров.

В качестве первой задачи исследована релаксация волнового пакета электронных плазменных колебаний в отсутствии магнитного поля. Оказывается,что основную роль в нелинейном перераспределении энергии по спектру волновых чисел здесь играют процессы рассеяния колебаний на ионах плазмы.

Рассматриваются также задачи отыскания установившегося спектра турбулентности в слегка неустойчивой плазме. Решение задачи иллюстрируется на двух примерах (токовая неустойчивость в плазме с магнитным полем /I9/ и "универсальная неустойчивость" неоднородной плазмы). Знание спектра возникающей турбулентности позволяет оценить коэффициент турбулентной диффузии плазмы поперек удерживающего ее магнитного поля.

I. ВВЕДЕНИЕ.

В данном обзоре сделана попытка описать поведение плазмы при наличии в ней такого большого числа возбужденных коллективных колебаний, когда применим статистический подход. Надежные методы описания такой плазмы удается развить для тех случаев, когда колебания слабо взаимодействуют между собой и с "фоном". В этом случае совокупность колебаний мы можем рассматривать как слабонеидеальный газ волн - "квазичастиц", имеющих "энергию" ω и импульс k. Обмен же энергией между квазичастицами и усредненным "фоном" распределения частиц, а также внутри газа квазичастиц можно учесть по теории возмущений, считая фазы амплитуд отдельных колебаний хаотическими.

В настоящее время существуют различные методы построения рядов такой теории возмущений. Наиболее хорошо разработанными являются методы квантовой теории поля в применении к квантовым статистическим системам. Однако в плазме, когда в основу кладется не гамильтониан, а уравнения Больцмана, более удобным методом описания взаимодействия слаботурбулентных пульсаций является асимптотическая теория возмущений, как это сделано в квазилинейной теории /I,2/. Здесь выделение "квазичастиц"-волн автоматически производится на основе классических кинетических уравнении для функции распределения частиц в плазме и уравнений Максвелла для самосогласованного поля.

Однако, квазилинейная теория рассматривает лишь взаимодействие волн с частицами, так что в дальнейшем понадобилось обобщение этой теории на случай взаимодействия колебаний между собой (некоторые оценки этих эффектов были сделаны уже в цитированной работе Драммонда и Пайнса, а также в работе /3/). Систематический учет этих явлений развит одновременно в двух группах работ. В работе /4/ использована для этой цели опять-таки асимптотическая теория возмущений в применении к гидродинамическим колебаниям (усовершенствован вывод, данный в /3/). Авторы статьи /5/ исходили из метода корреляционных цепочек, причем обрыв и замыкание уравнений для последних основаны на слабости взаимодействия, что фактически эквивалентно применению теории возмущений. Следует отметить, что в последнее время появилось еще несколько подходов к задаче /6-9/, при применении которых получаются аналогичные результаты.

Вышеупомянутые методы позволяют рассмотреть ряд задач в теории слаботурбулентной плазмы, таких как релаксация надтепловой флюктуации плазменных колебаний, установление стационарного спектра турбулентных пульсаций в результате развития слабой неустойчивости (весьма интересна для рассмотрения различного рода процессов турбулентного переноса) и т.п. Каковы характерные черты установления спектра турбулентности в слегка неустойчивой плазме? Исследование установления спектра должно включать в себя изучение трех процессов:

I) рост или затухание колебаний под влиянием "фона";

2) перераспределение энергии колебаний за счет их взаимодействия между собой;

3) обратное влияние возникающих колебаний на "фон".

Первый процесс для волн очень малой амплитуды изучается в линейной теории устойчивости.

По мере роста амплитуды возмущений начинают включаться также и процессы 2),3). При этом не всегда существенен учет нелинейного взаимодействия колебаний. Действительно, под влиянием нарастающих из-за неустойчивости колебаний распределение частиц плазмы часто довольно быстро релаксирует к такому, которое уже перестает раскачивать имеющийся набор колебаний. И если при этом колебания не успели нарасти до таких амплитуд, при которых становится существенным их нелинейное взаимодействие, то процессы перераспределения энергии между различными модами можно не учитывать. В ряде же случаев нелинейные эффекты проявляются раньше, чем происходит релаксация распределения частиц. Тогда картину турбулентного движения можно представить себе следующим образом. В определенных областях фазового пространства (ω_k, k) имеется приток энергии за счет неустойчивости. В других - наоборот колебания затухают. Ясно, что энергия не может сосредотачиваться только в неустойчивых областях фазового пространства, так как при больших амплитудах нелинейное взаимодействие привело бы к слишком сильному оттоку энергии по спектру (ω_k, k) в области, где колебания не раскачиваются или вовсе затухают. Амплитуду установившегося колебания с данными (ω_k, k) в квазистационарном режиме находим по порядку величины сравнивая приток энергии в данную моду из-за неустойчивости с оттоком ее в другие моды из-за нелинейной передачи по спектру. Зная же амплитуду каждой моды спектра турбулентных пульсаций, мы можем из так называемых "квазилинейных" уравнений, учитывающих обратное влияние колебаний на "фон", проследить изменение этого фона и найти все коэффициенты переноса (такие как электропроводность, коэффициент диффузии частиц и др.).

2. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ.

В этой главе излагаются общий вывод и исследование кинетического уравнения для волн и частиц с точностью до членов второго порядка по энергии колебаний включительно. При этом мы будем следовать работе /I0/. Чтобы не загромождать изложение громоздкими обозначениями и деталями, мы ограничимся здесь рассмотрением только потенциальных колебаний ($E = -\mathrm{grad}\,\varphi$). Как показано в /II/, все результаты, изложенные ниже, справедливы и для произвольных непотенциальных колебаний .

2.I. Кинетическое уравнение для волн.

Основные уравнения для потенциальных колебаний имеют вид

$$E = -\mathrm{grad}\,\varphi\,, \quad \frac{dE}{dt} = -4\pi j \tag{I}$$

Вектор плотности тока поляризации j с учетом нелинейных по E членов может быть представлен в виде

$$j = j^{(1)}\{E\} + j^{(2)}\{E\} + j^{(3)}\{E\} + \cdots \tag{2}$$

где $j^{(n)}\{E\}$ является некоторым функционалом от электрического поля n-го порядка. В частности, $j^{(1)}$ определяется электропроводностью и имеет вид $j^{(1)}_\alpha(r,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \sigma_{\alpha\beta}(r-r_1, t-t_1) E_\beta(r_1,t_1)\,dr_1 dt_1$. Нелинейные токи поляризации, как будет видно ниже, имеют аналогичную структуру. Эти токи могут быть выражены через соответствующие добавки к функции распределения частиц плазмы. Для этого будем исходить из кинетического уравнения для функции распределения частиц, которое нам будет удобно писать в виде:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \left[\mathcal{H}_j^{\circ}, F_j\right] = -\left[\mathcal{H}_j^{int}, F\right], \qquad (3)$$

где $\mathcal{H}_j^{\circ}$ - гамильтониан плазмы при отсутствии колебаний; $\mathcal{H}_j^{int}$ - часть гамильтониана, описывающая взаимодействие частиц с полем волн:

$$\mathcal{H}_j^{\circ} = \frac{1}{2m_j}\left(p - \frac{e_j}{c} A^{\circ}\right)^2, \quad H = \mathrm{rot}\, A^{\circ}$$

$$\mathcal{H}_j^{int}(t) = \int \rho_j(r,t)\varphi(r,t)\,dr, \quad \rho_j(r,t) = e_j\,\delta(r - r_j(t)), \qquad (4)$$

где H - напряженность стационарного магнитного поля. Мы пренебрегаем столкновениями между частицами, поэтому в (3) будем опускать интеграл столкновений. Функции распределения частиц снабжаются индексами $j = e, i$ (e - электроны, i -ионы). В дальнейшем, если по j суммирования не производится, мы будем этот индекс опускать.

Переходя к лагранжевым переменным r°, p°, отвечающим движению частицы в стационарном магнитном поле, получим вместо (3)

$$F(r^{\circ}, p^{\circ}, t) = -\int_{-\infty}^{t}\left[\mathcal{H}^{int}(r^{\circ}, p^{\circ}, t'), F(r^{\circ}, p^{\circ}, t')\right]dt'. \qquad (5)$$

Отсюда находим выражение для добавки n-го порядка к функции распределения

$$f^{(n)}(r^{\circ}, p^{\circ}, t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left[\mathcal{H}^{int}(t_1), \ldots \left[\mathcal{H}^{int}(t_n), f^{\circ}\right]\ldots\right], \qquad (6)$$

где $f^{\circ} = f^{\circ}(r^{\circ}, p^{\circ})$ - невозмущенная функция распределения. С помощью формулы (6) можно получить ток поляризации n-го порядка $j^{(n)}$:

$$j^{(n)}(r,t) = (-1)^n \sum_j e_j n_j \int dr_1 \ldots dr_n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \Big\{ \int v_j(t)\,\delta(r - r_j(t))$$

$$\left[\rho_j(r_1, t_1) \ldots \left[\rho_j(r_n, t_n), f_i^{\circ}\right]\ldots\right] dr^{\circ} dp^{\circ} \Big\}\, \varphi(r_1, t_1) \ldots \varphi(r_n, t_n) \qquad (7)$$

(n_j - плотность частиц соответствующего сорта).

Используя свойства скобок Пуассона, выражение в фигурных скобках (7) можно преобразовать к виду:

$$\int dr^{\circ} dp^{\circ} \left[\ldots\left[v(t)\,\delta(r - r(t)), \rho(r_1, t_1)\right], \ldots\right], \rho(r_n, t)\Big] f^{\circ}(r^{\circ}, p^{\circ})\, dr^{\circ} dp^{\circ} \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и переходя к фурье-представлениям $j^{(n)}(r,t)$ и $\varphi(r,t)$, получим:

$$4\pi j^{(n)}(k,\omega) = \frac{\omega k}{k^2} \sum_{k_1, \ldots k_n} (2\pi)^{-n+1} \int d\omega_1 \ldots d\omega_n\, \mu_{k_1 \ldots k_n}(\omega_1, \ldots \omega_n) \cdot \delta\Big(\omega - \sum_{s=1}^{n} \omega_s\Big) \cdot$$

$$\delta\Big(k, \sum_{s=1}^{n} k_s\Big)\, \varphi(k_1, \omega_1) \ldots \varphi(k_n, \omega_n), \qquad (9)$$

где

$$\mu_{k_1 \ldots k_n}(\omega_1, \ldots \omega_n) = \frac{1}{n!} S \cdot \int dr_1 \ldots dr_n \int_{-\infty}^{0} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\, \psi(r_1, t_1; \ldots r_n, t_n) \cdot$$

$$\exp\Big[i \sum_{s=1}^{n} (k_s r_s - \omega_s t)\Big], \qquad (10)$$

$$\psi(r_1 - r, t_1 - t; \ldots r_n - r, t_n - t) = (-1)^n 4\pi \sum_j n_j \int dr^{\circ} dp^{\circ} \cdot$$

$$f_j^{\circ}(r^{\circ}, p^{\circ}) \left[\ldots\left[\rho_j(r,t), \rho_j(r_1, t_1)\right] \rho_j(r_2, t_2) \ldots\right] \rho_j(r_n, t_n)\Big], \qquad (11)$$

$$\delta\Big(\vec{k}, \sum_s k_s\Big) = \begin{cases} 1 & k = \sum_s k_s \\ 0 & k \neq \sum_s k_s \end{cases}$$

где символом S обозначена сумма по всем возможным перестановкам пар (k_s, ω_s) $s = 1, \ldots n$. В дальнейшем мы будем называть величину $\mu_{k_1,\dots k_n}(\omega_1,\dots\omega_n)$ откликом n -го порядка.

Переходя в уравнении (I) к фурье-компонентам, получаем динамическое уравнение для волн, в котором мы теперь ограничимся нелинейными членами до третьего порядка по φ включительно:

$$k\omega\varepsilon_k(\omega)\varphi(k,\omega)=4\pi j^{(2)}(k,\omega)+4\pi j^{(3)}(k,\omega), \qquad (I2)$$

где $j^{(2)}$ и $j^{(3)}$ определяются формулой (9), а $\varepsilon_k(\omega)$ - диэлектрическая проницаемость плазмы для продольных колебаний:

$$\varepsilon_k(\omega)=1-\frac{\mu_k(\omega)}{k^2} \qquad (I3)$$

Удержанные нами члены (до φ^3 включительно) дадут основной вклад в нелинейное взаимодействие волн. Будем решать уравнение (I2) последовательными приближениями, приняв в качестве первого приближения решение линеаризованного уравнения:

$$\varepsilon_k(\omega)\varphi(k,\omega)=0 \qquad (I4)$$

Если дисперсионное уравнение $\varepsilon_k(\omega)=0$ имеет вещественные решения ω_k, то решение уравнения (I4) имеет вид $\varphi^{(1)}(k,\omega)=2\pi\varphi_k\delta(\omega-\omega_k)$. При наличии поглощения или неустойчивости ω_k является комплексным. В этом случае решение уравнения (I4) можно представить в виде:

$$\varphi^{(1)}(k,\omega)=\varphi_k\cdot\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\omega_k-\omega-i\delta}-\frac{1}{\omega_k-\omega+i\delta}\right), \qquad (I5)$$

где δ является символом, указывающим правило обхода полюсов при

интегрировании выражения в (I5) по ω : в первом члене в скобках полюс обходится сверху, во втором - снизу, независимо от того, какой знак имеет $\operatorname{Im}\omega_k$ [3]. Решение уравнения (I4), зависящее от времени, можно представить в виде $\varphi^{(1)}(k,t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(1)}(k,\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$, что с учетом правил обхода полюсов в $\varphi^{(1)}(k,\omega)$, приводит к $\varphi^{(1)}(k,t)=\varphi_k e^{-i\omega_k t}$ при всех t.

Используя (I5), получаем для второго и третьего приближений выражения вида :

$$\varphi^{(2)}(k,\omega)=\sum_{k_1,k_2}\frac{\delta(k,k_1+k_2)}{2\pi k^2\varepsilon_k(\omega)}\cdot\int\mu_{k_1k_2}(\omega_1,\omega_2)\varphi^{(1)}(k_1,\omega_1)\varphi^{(1)}(k_2,\omega_2)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_2, \qquad (I6)$$

$$\varphi^{(3)}(k,\omega)=\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{\delta(k_1,k_1+k_2+k_3)}{(2\pi)^2k^2\varepsilon_k(\omega)}\int\left[\frac{2\mu_{k_1,k-k_1}(\omega_1,\omega-\omega_1)\mu_{k_2,k_3}(\omega_2,\omega_3)}{(k-k_1)^2\varepsilon_{k-k_1}(\omega-\omega_1)}+\right. \qquad (I7)$$

$$\left.+\mu_{k_1,k_2,k_3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\right]\varphi^{(1)}(k_1,\omega_1)\varphi^{(1)}(k_2,\omega_2)\varphi^{(1)}(k_3,\omega_3)\delta(\omega-\omega_1-\omega_2-\omega_3)\,d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3$$

Теперь перейдем к статистическому описанию ансамбля волн, предполагая их фазы случайными. Вычислим $\frac{d}{dt}\langle|\varphi(k,t)|^2\rangle$, ограничиваясь членами до четвертого порядка по φ_k. Черта означает усреднение по фазам начальных амплитуд φ_k, фигурирующих в первом приближении (I5). Представляя $\varphi(k,t)$ в виде интеграла Фурье, получаем:

$$\frac{d}{dt}\langle|\varphi(k,t)|^2\rangle=(2\pi)^{-2}\operatorname{Im}\int(\omega-\omega')\langle\varphi(k,\omega)\varphi^*(k,\omega')\rangle e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega\, d\omega'= \qquad (I8)$$

$$=2\gamma_k|\varphi_k|^2+(2\pi)^{-2}\int(\omega-\omega')\langle 2\varphi^{(1)}(k,\omega)\varphi^{(3)}(k,\omega')+$$

$$+\varphi^{(2)}(k,\omega)\varphi^{(2)*}(k,\omega')\rangle e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega\, d\omega'$$

где $\gamma_k=\operatorname{Im}\omega_k$ - линейный инкремент или декремент волны.

В членах четвертого порядка по φ мы пренебрежем мнимой частью ω_k, рии, которые оказываются весьма полезными при исследовании нелинейных членов в кинетическом уравнении для волн (22).

Рассмотрим сначала свойства откликов второго порядка. Из (II) нетрудно получить (пользуясь свойствами скобок Пуассона):

$$\psi(r_1,t_1;r_2,t_2) = -\psi(-r_1,-t_1;r_2-r_1,t_2-t_1) \qquad (23)$$

$$\psi(r_1,t_1,r_2,t_2)+\psi(r_2-r_1,t_2-t_1;-r_1,-t_1)+ \\ +\psi(-r_2,-t_2;r_1-r_2,t_1-t_2)=0 \qquad (24)$$

Из (23),(24) непосредственно еще нельзя получить каких-либо соотношений для величины $\mu_{k_1k_2}$, определенной формулой (I0), так как интегрирование в ней по t производится по полуоси от $-\infty$ до 0. Однако, если мы введем полную компоненту фурье-функции

$$\nu_{k_1k_2}(\omega',\omega'')=\int dr_1 dr_2\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\,\psi(r_1,t_1;r_2,t_2)\exp i\left(k_1r_1+k_2r_2-\omega't_1-\omega''t_2\right), \qquad (25)$$

то для нее из (23),(24) следует:

$$\nu_{k_1k_2}(\omega',\omega'')=-\nu_{-k_1-k_2,k_2}(-\omega'-\omega'',\omega''), \qquad (26)$$

$$\nu_{k_1k_2}(\omega',\omega'')+\nu_{k_2,-k_1-k_2}(\omega'',-\omega'-\omega'')+\nu_{-k_1-k_2,k_1}(-\omega'-\omega'',\omega')=0 \qquad (27)$$

Интересующий нас отклик $\mu_{k_1k_2}$ связан с $\nu_{k_1k_2}$ соотношением [5]

$$\mu_{k_1k_2}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\omega' d\omega''}{\omega_1+\omega_2-\omega'-\omega''+i\varepsilon}\left[\frac{\nu_{k_1k_2}(\omega',\omega'')}{\omega_2-\omega''+i\varepsilon}+\frac{\nu_{k_2k_1}(\omega'',\omega')}{\omega_1-\omega'+i\varepsilon}\right] \qquad (28)$$

Для уяснения смысла соотношения (28) рассмотрим подробнее структуру величин $\nu_{k_1k_2}(\omega',\omega'')$. Подставляя $\psi^{(2)}$ из (II) в (25), получаем после интегрирования по r', r'':

$$\nu_{k_1k_2}(\omega_1,\omega_2)=\sum_j 4\pi e_j^3 n_j\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\int dr^0 dp^0 f(r^0,p^0)\cdot \qquad (29)$$

$$\cdot\left[\left[\delta(r^0),\exp i\{k_1r(t_1)-\omega_1t_1\}\right],\exp i\{k_2r(t_2)-\omega_2t_2\}\right]$$

В скобках Пуассона подразумевается дифференцирование по лагранжевым переменным r^0, p^0.

При этом вместо $r(t)$ надо подставить

$$r(t)=r^0+\int^t v(t')dt'=r^0+\frac{[v(t)-v^0,h]}{\Omega_H}+(v^0h)t \qquad (30)$$

где Ω_H – ларморовская частота (соответствующих частиц), h – единичный вектор, направленный вдоль H. После интегрирования по t_1,t_2 вместо экспонент в (29) появятся δ-функции вида $\delta(\omega_1-k_{1z}v_z-n\Omega_H)$ и $\delta(\omega_2-k_{2z}v_z-n_2\Omega_H)$. Существенно при этом, что в δ-функции входят ω и k с одним и тем же индексом. На эти δ-функции действуют некоторые дифференциальные операторы по p^0. В случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует, величины $\nu_{k_1k_2}$ принимают особенно простой вид. В этом случае $r(t)=r^0+vt$ и из (29) следует:

$$\nu_{k_1k_2}(\omega_1,\omega_2)=\sum_j\frac{e_j}{m_j}\omega_{0j}^2\int dv\,\delta(\omega_1-k_1v)k\frac{\partial}{\partial v}\left\{\delta(\omega_2-k_2v)k_2\frac{\partial f}{\partial v}\right\}. \qquad (31)$$

(При получении (3I) в угловых скобках в (29) произведена циклическая перестановка); $\omega_{0j}^2=4\pi n_je^2/m_j$.

После подстановки (3I) в (28) и выполнения интегрирования по ω', ω'' получится выражение такого же типа, как и в (3I), но вместо $\delta(\omega - kv)$ там будут стоять $(\omega - kv + i\varepsilon)^{-1}$.

После всего сказанного ясно, что полувычеты в величинах μ и ε, входящих в (22), обусловлены резонансами колебаний с частицами, обладающими скоростями

$$v = \frac{\omega_{k_1}}{k_1}, \quad \frac{\omega_{k_2}}{k_2}, \quad \frac{\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2}}{|k_1 \pm k_2|} \qquad (H=0) \tag{32}$$

$$v = \frac{\omega_{k_1} - n_1\Omega_H}{k_{1z}}, \quad \frac{\omega_{k_2} - n_2\Omega_H}{k_{2z}}, \quad \frac{\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} - m\Omega_H}{k_{1z} \pm k_{2z}} \tag{33}$$

Первые два случая в (32),(33) отвечают резонансам собственных колебаний (с частотами ω_{k_1}, ω_{k_2}) с частицами плазмы, последний – резонансу вынужденных колебаний (с частотами $\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2}$) с частицами. Ясно, что нелинейные члены, связанные с резонансном собственных колебаний с частицами, значително меньше линейного члена $2\gamma_k n_k$, который содержит такие же полувычеты, и поэтому ими можно пренебречь. Таким образом, мы можем пренебрегать в нелинейных членах вкладами от полувычетов, обусловленных собственными колебаниями, т.е. полюса, не связанные с комбинационными частотами, интегрируются в смысле главных значений.

Запишем теперь спектральное разложение для величины $\mu_{k_1, k-k_1}$

$$\mu_{k_1, k-k_1}(\omega_{k_1}, \omega_k - \omega_{k_1}) = \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int \frac{d\omega' d\omega''}{\omega_k - \omega' - \omega''} \left[\frac{\nu_{k_1, k-k_1}(\omega', \omega'')}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega'' + i\varepsilon} + \frac{\nu_{k-k_1, k_1}(\omega'', \omega')}{\omega_{k_1} - \omega'} \right] \tag{34}$$

В формуле (34) мы удержали мнимые добавки лишь в том знаменателе,

где стоит комбинационная частота $\omega_k - \omega_{k_1}$; остальные полюса интегрируются в смысле главного значения. Преобразуя ν_{k-k_1, k_1} в (34) с помощью формулы (26), а $\nu_{k_1, k-k_1}$ с помощью (27), и производя затем замену переменных интегрирования, получаем

$$\mu_{k_1, k-k_1}(\omega_{k_1}, \omega_k - \omega_{k_1}) = \lambda^*_{k, -k_1}(\omega_k, -\omega_{k_1}), \tag{35}$$

где величина $\lambda_{k_1, k_2}(\omega_1, \omega_2)$ определяется следующим соотношением:

$$\lambda_{k_1, k_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int \frac{d\omega' d\omega''}{\omega_1 + \omega_2 - \omega' - \omega'' - i\varepsilon} \left[\frac{\nu_{k_1, k_2}(\omega', \omega'')}{\omega_2 - \omega'' - i\varepsilon} + \frac{\nu_{k_2, k_1}(\omega'', \omega')}{\omega_1 - \omega' - i\varepsilon} \right] \tag{36}$$

(она отличается от $\mu_{k_1, k_2}(\omega_1, \omega_2)$ лишь знаками мнимых добавок).

Соотношение (35) оказывается весьма полезным при исследовании интеграла столкновений в кинетическом уравнении для волн.

Перейдем теперь к откликам третьего порядка $\mu_{k_1 k_2 k_3}$. Введем компоненты фурье

$$\nu_{k_1, k_2, k_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 dt_3 \int dr_1 dr_2 dr_3 \cdot \exp i(k_1 r_1 + k_2 r_2 + k_3 r_3 - \omega_1 t_1 - \omega_2 t_2 - \omega_3 t_3)\, \psi^{(3)}(r_1 - r, t_1 - t; r_2 - r, t_2 - t; r_3 - r, t_3 - t), \tag{37}$$

где $\psi^{(3)}$ определено формулой (II). Нетрудно убедиться, что

$$\mu_{k, k_1, -k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}) = -\frac{1}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\omega' d\omega'' d\omega'''}{\omega_k - \omega' - \omega'' - \omega''' + i\varepsilon} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\nu_{k_1, k, -k_1}(\omega', \omega'', \omega''')}{(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega'' - \omega''' + i\varepsilon)(-\omega_{k_1} - \omega''' + i\varepsilon)} + \frac{\nu_{k_1, -k_1, k}(\omega', \omega''', \omega'')}{(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega'' - \omega''' + i\varepsilon)(\omega_k - \omega'' + i\varepsilon)} + \right. \tag{38}$$

$$\left. + \frac{\nu_{-k_1, k, k_1}(\omega''', \omega'', \omega')}{(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega' - \omega'' + i\varepsilon)(\omega_{k_1} - \omega' + i\varepsilon)} + \frac{\nu_{-k_1, k_1, k}(\omega''', \omega', \omega'')}{(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega' - \omega'' + i\varepsilon)(\omega_k - \omega'' + i\varepsilon)} \right\}.$$

Соотношение (38) написано для той величины, которая содержится в интеграле столкновений для волн. Заметим далее, что в (38) мы опустили два расходящихся члена, содержащих $\nu_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}$ и $\nu_{\kappa,-\kappa_1,\kappa_1}$ (в соответствии с замечанием, сделанным после формулы (20), см. также раздел 2.3).

Получим теперь некоторые соотношения для величин $\psi^{(3)}$, $\nu^{(3)}$. Используя свойства скобок Пуассона, формулу (II) при $n = 3$ можно переписать в виде:

$$\psi(t_1-t;t_2-t;t_3-t)=4\pi\sum_j n_j\int d r^\circ dp^\circ\left[\rho_j(t),\rho_j(t_1)\right]\left[\rho_j(t_2),\left[\rho_j(t_3),f_j(r^\circ,p^\circ)\right]\right] \quad (39)$$

(пространственные аргументы, для краткости, не выписываются).

Совершая циклическую перестановку $\rho_j(t_2),\rho_j(t_3),f_j$ в правой части (39), получаем:

$$\psi(t_1-t;t_2-t;t_3-t)-\psi(t_1-t;t_3-t;t_2-t)=4\pi\sum_j n_j\int dr^\circ dp^\circ\left[\rho_j(t),\rho_j(t_1)\right]\cdot \left[\left[\rho_j(t_2),\rho_j(t_3)\right],f_j(r^\circ,p^\circ)\right] \quad (40)$$

Из (39),(40) следуют соотношения

$$\nu(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=-\nu(-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\omega_2,\omega_3) \quad (41)$$

$$\nu(\omega_1,\omega_2,\omega_3)-\nu(\omega_1,\omega_3,\omega_2)=\nu(\omega_3,\omega_1,-\omega_1-\omega_2-\omega_3)-\nu(\omega_3,-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\omega_1). \quad (42)$$

Если теперь разложить величину $\mu_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}(\omega_\kappa,\omega_{\kappa_1},-\omega_{\kappa_1})$ на две части

$$\mu_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}(\omega_\kappa,\omega_{\kappa_1},-\omega_{\kappa_1})=\mu^-_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}+\mu^+_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1} \quad (43)$$

$$\mu^\mp_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}(\omega_\kappa,\omega_{\kappa_1},-\omega_{\kappa_1})=-\frac{1}{(2\pi i)^3\cdot 6}\int\frac{d\omega' d\omega'' d\omega'''}{(\omega_\kappa-\omega'-\omega''-\omega'''+i\varepsilon)(\omega_\kappa\mp\omega_{\kappa_1}-\omega''-\omega'''+i\varepsilon)}\cdot \quad (44)$$
$$\cdot\left\{\frac{\nu_{\kappa_1,\kappa,-\kappa_1}(\omega',\omega'',\omega''')}{\mp\omega_{\kappa_1}-\omega'''+i\varepsilon}+\frac{\nu_{\kappa_1,-\kappa_1,\kappa}(\omega',\omega''',\omega'')}{\omega_\kappa-\omega''+i\varepsilon}\right\}$$

(так что главный вклад в μ^- дают резонансы частиц с вынужденным колебанием частоты $\omega_\kappa-\omega_{\kappa_1}$, а в μ^+ - резонансы с частотой $\omega_\kappa+\omega_{\kappa_1}$) то из (41),(42) вытекают следующие соотношения симметрии (при условии, что интегрирование всех полюсов, не содержащих комбинационных частот, производится в смысле главного значения)

$$\operatorname{Im}\mu^-_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}(\omega_\kappa,\omega_{\kappa_1},-\omega_{\kappa_1})=-\operatorname{Im}\mu^-_{\kappa_1,\kappa,-\kappa}(\omega_{\kappa_1},\omega_\kappa,-\omega_\kappa) \quad (45)$$

$$\operatorname{Im}\mu^+_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}(\omega_\kappa,\omega_{\kappa_1},-\omega_{\kappa_1})=\operatorname{Im}\mu^+_{\kappa_1,\kappa,-\kappa}(\omega_{\kappa_1},\omega_\kappa,-\omega_\kappa) \quad (46)$$

При получении (45),(46) использовалось то обстоятельство, что вещественные части величин ν в формулах (44), не вносят никакого вклада в $\operatorname{Im}\mu_{\kappa,\kappa_1,-\kappa_1}$ (иными словами эти величины определяются только вкладами от полувычетов в спектральных разложениях (44)). Доказательство этого утверждения изложено в Приложении I.

Наконец, заметим, что кроме (35),(45),(46) имеют место еще следующие очевидные соотношения

$$\mu_{\kappa_1,\kappa_2}(\omega_1,\omega_2)=\mu^*_{-\kappa_1,-\kappa_2}(-\omega_1,-\omega_2),\qquad \lambda_{\kappa_1,\kappa_2}(\omega_1,\omega_2)=\lambda^*_{-\kappa_1,-\kappa_2}(-\omega_1,-\omega_2)$$

$$\mu_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\mu^*_{-\kappa_1,-\kappa_2,-\kappa_3}(-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3),\qquad \varepsilon_\kappa(\omega)=\varepsilon^*_\kappa(-\omega) \quad (47)$$

Используя полученные соотношения симметрии для откликов μ_{κ_1,κ_2}, $\mu_{\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3}$ можно установить некоторые полезные свойства различных членов интеграла столкновений $I\{n\}$ в кинетическом уравнении для волн. Разделим этот интеграл на две части

$$I\{n\}=R\{n\}+S\{n\}, \quad (48)$$

где $R\{n\}$ содержит все члены с $\delta(\omega_\kappa-\omega_{\kappa_1}-\omega_{\kappa_2})$ и описывает взаимодействие волн, для которых выполнены "распадные" условия

$$k = k_1 + k_2\,, \quad \omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} \tag{49}$$

Используя (35),(47), нетрудно получить следующее выражение для

$$R\{n\} = 4\pi \sum_{k_1,k_2} \Big\{ |V_{k,k_1,k_2}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}) \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) \tag{50}$$

$$+ 2|V_{k_2,k_1,k}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} + n_k n_{k_2} - n_k n_{k_1}) \delta(\omega_{k_2} - \omega_k - \omega_{k_1}) \Big\} \delta(k_2 k_1 + k_2),$$

где

$$V_{k,k_1,k_2} = \frac{8\pi \mu_{k_1,k_2}(\omega_{k_1}, \omega_{k_2})}{[\varepsilon'(\omega_{k_1}) \varepsilon'(\omega_{k_2}) \varepsilon'(\omega_{k_3})]^{1/2} k k_1 k_2} \tag{51}$$

В (50) уже подразумевается суммирование только по положительным частотам: $\omega_k > 0$, $\omega_{k_1} > 0$, $\omega_{k_2} > 0$.

Эта часть кинетического уравнения для волн, являющаяся единственной в случае "прозрачной среды" (то-есть когда резонансным взаимодействием частиц с волнами можно пренебречь) была получена ранее из уравнений гидродинамики плазмы в /3,4/. Заметим далее, что (50) совпадает с правой частью кинетического уравнения для фононов в твердом теле, если в нем положить $\hbar \to 0$[6].

Второй член в (48) - $S\{n\}$ определяется резонансным взаимодействием вынужденных колебаний с частицами. Этот эффект можно интерпретировать также как вынужденное комбинационное рассеяние волн в плазме.

Представим теперь $S\{n\}$ в виде $S\{n\} = \sum_{k'} (S_{kk'} + S'_{kk'}) n_k n_{k_1}$,

$$S_{kk_1} = \frac{8\pi}{k^2 k_1^2 \varepsilon'_k(\omega_k) \varepsilon'_{k_1}(\omega_{k_1})} P \frac{8\mu_{k_1,k-k_1}(\omega_{k_1}, \omega_k - \omega_{k_1}) \mu_{-k_1,k}(-\omega_{k_1}, \omega_k)}{(k-k_1)^2 \varepsilon_{k-k_1}(\omega_k - \omega_{k_1})} + \tag{52}$$

$$+ \begin{cases} 6\mu^-_{k,k_1,-k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}), & \omega_{k_1} > 0, \\ 6\mu^+_{k,k_1,-k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}), & \omega_{k_1} < 0, \end{cases} \quad \omega_k > 0.$$

$$S'_{kk'} = \frac{48\pi}{k^2 k_1^2 \varepsilon'_k(\omega_k) \varepsilon'_{k_1}(\omega_{k_1})} \cdot \begin{cases} \mu^+_{k,k_1,-k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}) & \omega_{k_1} > 0 \\ \mu^-_{k,k_1,-k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}) & \omega_{k_1} < 0 \end{cases} \quad \omega_k > 0$$

где $\mu^{\pm}_{k,k_1,-k_1}$ определены в (44). Используя соотношения (35),(45),(46), (47), нетрудно проверить, что

$$S_{kk'} = -S_{k'k} \tag{53}$$

$$S_{kk'} = S'_{k'k} \tag{54}$$

В большинстве конкретных случаев вкладом от резонансного взаимодействия комбинационных волн с частотой $|\omega_k| + |\omega_{k_1}|$ с частицами можно пренебречь по сравнению с соответствующим вкладом от членов с $|\omega_k| - |\omega_{k_1}|$. Это означает, что $S'_{kk'} \ll S_{kk'}$, так что все ядро интеграла $S\{n\}$ можно считать антисимметрическим. Соответственно, в этом случае его можно представить в явно антисимметрической форме

$$S_{kk_1} = \frac{8\pi}{k^2 k_1^2 \varepsilon'_k(\omega_k) \varepsilon'_{k_1}(\omega_{k_1})} \operatorname{Im} \Big\{ P \frac{8\lambda^*_{k,-k_1}(\omega_k, -\omega_{k_1}) \mu_{-k_1,k}(-\omega_{k_1}, \omega_k)}{(k-k_1)^2 \varepsilon_{k-k_1}(\omega_k - \omega_{k_1})} + \tag{55}$$

$$+ 3\big[\mu_{k,k_1,-k_1}(\omega_k, \omega_{k_1}, -\omega_{k_1}) - \mu_{k_1,k,-k}(\omega_{k_1}, \omega_k, -\omega_k)\big]\Big\},$$

где λ_{k_1,k_2} определено в (36).

В заключение этого раздела отметим, что форма кинетического уравнения для волн, где "интеграл столкновений" выражен через отклики μ_{k,k_2}, $\mu_{k_1 k_2 k_3}$, представляемые в виде спектральных разложений весьма удобна для конкретных приложений, так как эти величины сравнительно просто вычисляются (как это было видно из вывода (31)).

2.3. Суммирование расходящихся членов. Связь с квазилинейной теорией.

Рассмотрим общее выражение для функции распределения $F(r^\circ, p^\circ; t)$, получающееся при суммировании ряда теории возмущений. Подставляя в (6) $\mathcal{H}^{int}$ из (4) и суммируя по всем n, получим:

$$F(r^\circ,p^\circ;t)=f^\circ+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k_1,\dots,k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{s=1}^{n}d\omega_s d\omega'_s \exp it\sum_{s=1}^{n}(\omega_s-\omega'_s)\,\cdot$$

$$\cdot\frac{[\rho(k_1,\omega_1),\dots[\rho(k_m,\omega_m),f^\circ]\dots]\,\varphi(k_1,\omega'_1)\dots\varphi(k_n,\omega'_n)}{\left[\sum_{s=1}^{n}(\omega_s-\omega'_s)-i\delta\right]\left[\sum_{s=2}^{n}(\omega_s-\omega'_s)-i\delta\right]\dots(\omega_n-\omega'_n-i\delta)}, \qquad (56)$$

где $\varphi(k,\omega)$, $\rho(k,\omega)$ – фурье-компоненты потенциала и микроплотности заряда (4):

$$\rho(k,\omega)=e\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\exp i[k r(t)-\omega t] \qquad (57)$$

($r(t)$ определяется формулой (30); скобки Пуассона берутся по отношению к лагранжевым переменным). В это выражение необходимо подставить $\varphi(k,\omega)$, выраженные через амплитуды φ_k собственных колебаний из динамического уравнения типа (12). При этом наиболее простыми в (56) будут члены, получающиеся при замене всех $\varphi(k,\omega)$ на $\varphi_k\,\delta(\omega-\omega_k)$ (первое приближение теории возмущений для потенциала). Обозначая сумму всех таких членов через F_1 и усредняя по фазам всех φ_k, получим

$$\langle F_1(r^\circ,p^\circ;t)\rangle=f^\circ+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^m\sum_{k_1,\dots,k_m}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{s=1}^{m}d\omega_s \exp it\sum_{s=1}^{m}(\omega_s-\omega_{k_s})\,\cdot$$

$$\cdot\frac{[\rho(k_1,\omega_1)\dots[\rho(k_m,\omega_m),f_o]\dots]\,\langle\varphi_{k_1}\dots\varphi_{k_m}\rangle}{\left[\sum_{s=1}^{m}(\omega_s-\omega_{k_s})-i\delta\right]\left[\sum_{s=2}^{m}(\omega_s-\omega_{k_s})-i\delta\right]\dots(\omega_m-\omega_{k_m}-i\delta)} \qquad (58)$$

Чтобы слагаемое в сумме (58) было отличным от нуля, необходимо, чтобы каждому φ_k соответствовало φ_k^*. Выделим теперь в (58) такую подпоследовательность, где сопряженные пары (k, ω_k) и $(-k, -\omega_k)$ стоят рядом. Обозначая сумму таких членов через $f(t)$ можем написать

$$f(t)=f^\circ+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2n}\sum_{k_1,\dots,k_n}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\dots d\omega_{2n}\exp\left\{it\sum_{s=1}^{2n}\omega_s\right\}\cdot$$

$$\frac{[\rho(k_1,\omega_1)[\rho(-k_1,\omega_2)\dots[\rho(k_n,\omega_{2n-1})[\rho(-k_n,\omega_{2n}),f^\circ]\dots]}{\left(\sum_{s=1}^{2n}\omega_{2s}-i\delta\right)\left(\sum_{s=2}^{2n}\omega_s+\omega_{k_1}-i\delta\right)\dots\left(\omega_{2n}+\omega_{k_n}-i\delta\right)}\,|\varphi_{k_1}|^2\dots|\varphi_{k_n}|^2 \qquad (59)$$

Нетрудно видеть, что подинтегральное выражение здесь является расходящимся. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим подробно простейший случай плазмы без магнитного поля. В этом случае из (57) следует

$$\rho(k,\omega)=2\pi e\,\delta(kv-\omega)\,e^{ikr_0}, \qquad (60)$$

так что знаменатели в (59) типа $\sum_{s=1}^{2n}\omega_s$, $\sum_{s=3}^{2n}\omega_s$ и т.д. обратятся в нуль! Очевидно, эти расходимости являются проявлением вековых эффектов.

Дифференцируя (59) по t и учитывая (60), легко получить для $f(t)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_k\frac{i}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega\,d\omega'}{(\omega'+\omega_k-i\delta)}\left[\rho(k,\omega)[\rho(-k,\omega'),f]\right]|\varphi_k|^2 \qquad (61)$$

Подставляя (60) в (61) и выполняя дифференцирование в скобках Пуассона получаем известное уравнение квазилинейной теории /I,2/

где

$$\eta_{kk'}(v) = \frac{e^3}{2m^3} \cdot \frac{1}{\omega_k - kv + i\delta} k' \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\omega_k - \omega_{k'} + (k-k')v + i\delta} \cdot$$

$$\left[k \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{-\omega_{k'} - k'v + i\delta} k' \frac{\partial}{\partial v} + k' \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\omega_k - kv + i\delta} k \frac{\partial}{\partial v} \right] f(v)$$

Выражения для ξ, η просто получаются после подстановки (60) в соответствующие скобки Пуассона; dn_k/dt во втором члене (65) определяется кинетическим уравнением для волн (22). При получении этого члена учитывались (в первом приближении) мнимые части ω_k в $\varphi^{(1)}$, определяемом формулой (15). При этом мы использовали соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-\omega-i\delta} - \frac{1}{z-\omega+i\delta}\right) = \delta(\omega - x) + \frac{1}{\pi} P \frac{y}{(\omega-x)^2} + O(y^2)$$

$$z = x + iy$$

где P - символ главного значения.

В случае, когда n_k меняются не только во времени, но и в пространстве в dn_k/dt надо включить еще переносный член, равный $\frac{d\omega}{dk}\frac{dn_k}{dx}$.

Отметим, наконец, что как было видно из содержания этого раздела, усреднение по хаотическому распределению фаз в начальный момент эквивалентно переходу к медленно меняющемуся времени. Это обстоятельство хорошо изучено в работах, посвященных обоснованию кинетической теории. [12, 13]

2.4. Законы сохранения.

Рассмотрим сначала случай, когда распадные условия (49) не

выполняются и существенны только резонансы частиц с вынужденными колебаниями частот $|\omega_k| - |\omega_{k'}|$. В этом случае интеграл столкновений для волн имеет вид (55). Поскольку его ядро антисимметрично по k и k', то изменение полного числа частиц определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}\sum_k n_k = 2\sum \gamma_k n_k \tag{66}$$

Если величинами γ_k можно пренебречь (это имеет место, например, в результате установления квазилинейного "плато" на функции распределения частиц в области резонанса с собственными колебаниями /I,2/, то полное число квазичастиц будет сохраняться

$$\sum n_k = Const.$$

Из закона сохранения числа квазичастиц вытекают важные следствия. Пусть спектр колебаний таков, что их частоты мало изменяются с изменением k. Это имеет место, например, для электронных ленгмюровских колебаний, для которых

$$\omega_k = \omega_{oe}\left(1 + \frac{3}{2}(kr_D)^2\right), \qquad kr_D \ll 1 \tag{67}$$

r_D - дебаевский электронный радиус.

Вследствие закона сохранения числа квазичастиц, в этом случае полная энергия в первом неисчезающем приближении (с точностью до $(kr_D)^2$) будет сохраняться, т.е. нелинейное взаимодействие приводит в этом приближении лишь к перекачке энергии из одной части спектра в другую (для одномерного пакета это было ранее отмечено в /2/; для трехмерного - в /I4,I5/). Если при этом перекачка происходит от более коротких волн к более длинным, то в следующем приближении по $(k r_D)^2$ нелинейное взаимодействие приводит к суммарному затуханию энергии волн (нелинейное затухание Ландау). Если же перекачка волн происходит в обратном направлении, то в следующем приближении имеет место суммарное возрастание энергии волн в пакете.[7)] Такой случай осуществляется, например, при наличии токов в плазме, т.е. при движении электронов относительно ионов со скоростью, превышающей некоторую кинетическую скорость.

Совершенно аналогичные следствия, вытекающие из закона сохранения квазичастиц, имеют место и для колебаний Драммонда-Розенблюта /19 /, возбуждающихся при прохождении тока вдоль магнитного поля в плазме с $T_e \sim T_i$, для которых частота колебаний весьма близка к ларморовской ионной частоте.

В случае ионно-звуковых колебаний без магнитного поля дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega_k^2 = \frac{T_e}{m_i} \cdot \frac{k^2}{1+(k r_D)^2}$$

(для простоты положено $T_i = 0$). Эффект перекачки здесь играет основную роль лишь когда частоты волн близки к ω_{0i} ,т.е. $(k r_D) \gg 1$. В противном случае, вообще говоря, эффекты перекачки и суммарного изменения энергии имеют один и тот же порядок.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma_k > 0$ для всех имеющихся волн. Из (66) тогда следует, что $\frac{d}{dt}\sum_k n_k > 0$, т.е. одно только нелинейное затухание волн не может компенсировать их рост

вследствие линейной неустойчивости и, следовательно, установление стационарного состояния в этом случае невозможно. Ошибочные выводы об установлении стационарного состояния в этом случае, сделанные в /I6,I7/, связаны с тем, что из-за громоздкости исходных выражений и выкладок не была замечена антисимметрия ядра кинетического уравнения для волн. Необходимо,однако, заметить, что стационарное состояние может, в принципе, установиться, если для части волн в пакете $\gamma_k < 0$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $2\gamma_k n_k$ и $S\{n\}$ в (48) являются несущественными, так что основную роль играет "распадное" взаимодействие волн. Из формулы (50), определяющей $R\{n\}$, непосредственно вытекают следующие законы сохранения

$$\sum_k n_k \omega_k = Const, \quad \sum_k n_k k = Const. \qquad (68)$$

Первое из этих соотношений выражает закон сохранения энергии волн (напомним, что $n_k \omega_k$ - спектральная плотность энергии колебаний), второе уравнение, очевидно, представляет закон сохранения импульса. Заметим, что при сохранении энергии и импульса колебаний, число квазичастиц $\sum_k n_k$, разумеется может не сохраняться.

3. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВО ВРЕМЕНИ ИЗ-ЗА НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН.

Из-за сложного вида интеграла столкновений в кинетическом уравнении для волн, большой интерес представляет исследование частных классов задач, допускающих аналитическое решение, позволяющее проследить эволюцию во времени турбулентного спектра колебаний. В этой главе будет рассмотрена одна из таких задач, а именно – задача о нелинейной эволюции спектра ленгмюровских электронных колебаний в плазме без магнитного поля. Как будет видно ниже, эта задача является интересной и по еще одной причине: в ряде случаев в нелинейной релаксации электронных колебаний главную роль играют ионы, что на первый взгляд могло бы показаться парадоксальным.

Поскольку распадные условия (49) для электронных ленгмюровских колебаний не выполняются, интеграл столкновений для волн состоит из одной только части $S\{n\}$, которая описывает вынужденное рассеяние волн, причем вкладом от члена, описывающего резонансное взаимодействие частиц с вынужденными колебаниями частоты $\omega_k+\omega_{k'}$ $(\omega_k>0,\ \omega_{k'}>0)$ можно пренебречь. Таким образом, в рассматриваемом случае ядро интеграла столкновений $S\{n\}$ является антисимметрическим и определяется выражением (55), где

$$\varepsilon_k(\omega)=1+\sum_j\frac{\omega_{oj}^2}{k^2}\int\frac{dv}{\omega-kv+i\delta}\,k\frac{\partial f}{\partial v}\,,$$

$$\mu_{k,-k'}(\omega,-\omega')=\frac{1}{2}\sum_j\omega_{oj}^2\frac{e_j}{m_j}\int\frac{dv}{\omega-\omega'-(k-k')v+i\delta}\left\{\frac{((k-k')\cdot k')k}{\omega-kv}-\frac{((k-k')\cdot k)k'}{\omega'-k'v}\right\},\quad(69)$$

$$\lambda_{k,-k'}(\omega,-\omega')=\frac{1}{2}\sum_j\omega_{oj}^2\frac{e_j}{m_j}\int\frac{dv}{\omega-\omega'-(k-k')v-i\delta}\left\{\frac{((k-k')\cdot k')k}{\omega-kv}-\frac{((k-k')k)\cdot k'}{\omega'-k'v}\right\},\quad(70)$$

$$\mu_{k,k',-k'}(\omega,\omega',-\omega')=-\frac{1}{6}\sum_j\left(\frac{e_j}{m_j}\right)^2\omega_{oj}^2\int\frac{dv\,(kk')^2(k-k')\cdot\frac{\partial f_j}{\partial v}}{(\omega-kv)^2(\omega'-k'v)^2[\omega-\omega'-(k-k')v+i\delta]}\quad(71)$$

Выражения (70) просто получаются если подставить микроплотность заряда $\rho(r,t)=e\delta(r-r_o-vt)$ в формулы для $V_{k',k''}$, $V_{k',k'',k'''}$ (25),

(37), а последние в (28),(36) и (38).

Кинетическое уравнение для волн должно быть дополнено уравнением для функции распределения частиц, которое имеет вид (65). Поскольку ядро интеграла столкновений для волн является в рассматриваемом случае антисимметрическим, то при нелинейном взаимодействии волн число квазичастиц (плазмонов) не меняется, так что столкновения волн приводят лишь к перекачке плазмонов. При отсутствии пучков, токов и т.п., эта перекачка происходит от более коротких волн к длинным, так как энергия колебаний в целом не возрастает.

Если выполнить интегрирование в (69),(70) с учетом $kr_D\ll 1$ (r_D – дебаевский радиус) и пренебречь вкладом от ионов (что, как будет показано ниже, верно лишь для достаточно широких волновых пакетов), то кинетическое уравнение для волн принимает вид (см.также /I4/)

$$\frac{\partial n_k}{\partial t}=\frac{6\sqrt{\pi}\,\omega_{oe}^2}{(2\pi)^3nT_e}r_D^3n_k\int dk'n_{k'}\frac{k'^2-k^2}{|k-k'|k^2k'^2}\left\{\frac{[kk'](kk')^2}{(k-k')^2}+\frac{r_D^2}{2}\left([kk']^4+9(kk')^4\right)\right\},\quad(72)$$

где мы опустили линейный член $2\gamma_kn_k$ (это можно сделать, если γ_k достаточно мало из-за квазилинейной релаксации функции распределения) и учли только два первых неисчезающих члена в разложении интеграла столкновений по степеням kr_D.

Из (72) следует, как это было отмечено ранее в /I4/, что взаимодействие волн с параллельными и взаимно перпендикулярными волновыми векторами в первом неисчезающем по kr_D приближении отсутствует. Это, однако, верно лишь при условии пренебрежения влиянием ионов, которое, вообще говоря, почти всегда существенно /I5/.

В качестве примера рассмотрим изотропный (трехмерный) волновой пакет. Оказывается, что если ширина его Δk удовлетворяет условию

$$\Delta k \lesssim r_{D}^{-1}\left(\frac{1}{k r_{D}}\,\frac{v_{Ti}}{v_{Te}}\right)^{2/3} \tag{73}$$

($v_{Ti,e}$ - тепловые скорости ионов и электронов), то в ядре интеграла столкновений волн основную роль играют ионы. Ограничиваясь первым неисчезающим приближением по $k r_{D}$, в этом случае получаем /I5/:

$$\frac{dn_k}{dt} = \frac{\omega_{oe}^2}{4(2\pi)^3 nT}\, n_k \int dk' n_{k'} \frac{(k k')^2}{k^2 k'^2}\, \mathrm{Im}\left\{\left(1+\frac{\omega_k-\omega_{k'}}{\omega_k}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[1+\frac{T_i}{T_e} - i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega_k-\omega_{k'}}{|k-k'|v_{Ti}}\,W\!\left(\frac{\omega_k-\omega_{k'}}{|k-k'|v_{Ti}}\right)\right]^{-1}\right\}, \quad W(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{z-t+i\delta}\,dt \tag{74}$$

Подинтегральное выражение в (74) отлично от нуля лишь при $|\omega_k-\omega_{k'}| \lesssim |k-k'|\,v_{Ti}$, откуда следует

$$\delta k \equiv |k| - k' | \lesssim \frac{v_{Ti}}{v_{Te}}\, r_{D}^{-1} \tag{75}$$

то-есть взаимодействуют между собой лишь волны с очень близкими значениями модуля волнового вектора: $|k| - |k'| \ll \Delta k$. В связи с этим подинтегральное выражение в (74) можно разложить в ряд по степеням малой разности ($k^2 - k'^2$), в результате чего интегро-дифференциальное уравнение (74) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial N_k}{\partial \tau} - N_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} = -6\alpha^2 N_k^2, \tag{76}$$

где:

$$N_k = \frac{4\pi k^3 \omega_{oe}}{3nT_e}\, n_k, \quad \tau = \frac{\pi m_e \omega_{oe}}{9\alpha^2 m_i}\left(\frac{T_e T_i}{T_e+T_i}\right)^2 t,$$

$$\alpha = \sqrt{\Delta k\cdot k}\; r_{D}, \quad \xi = \frac{k^2}{\Delta k\cdot k_0}$$

Δk - характерная ширина пакета, k_0 - среднее волновое число пакета волн.

Сравнивая (76) с (72) получаем оценку (73). Решение уравнения (76) имеет вид:

$$N_k = e^{\beta\xi}\, F\!\left(\beta^{-1}\left[1-e^{-\beta\xi}(1-\tau\beta N_k)\right]\right), \quad \beta = 6\alpha^2 \tag{77}$$

где $F(\xi)$ - распределение энергии в пакете в начальный момент времени. Отсюда следует, что основным эффектом временной эволюции пакета является его сужение см.рис.I. Однако, само уравнение (76) справедливо лишь при условии, что разброс фазовых скоростей в пакете волн значительно больше теплового разброса скоростей ионов, что имеет место при

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$$

Как только пакет стал достаточно узким, мы не можем представить его эволюцию аналитическим образом. Однако физическая картина попрежнему ясна. Пакет продолжает сужаться до тех пор, пока не скажется четырехплазменное взаимодействие.[8] Время уширения пакета за счет четырехплазмонного взаимодействия легко оценить, зная $\varkappa_{k',k''}$, $\mu_{k',k'',k'''}$.[9] По порядку величины оно дается выражением:

$$\tau \sim \omega_{oe}^{-1}\,(\Delta k\, r_{D})^2 \left(\frac{nT}{W}\right)^2, \tag{78}$$

где W - плотность энергии пакета волн.

Сравнивая его с характерным временем сужения, можно найти установившуюся квазистационарную ширину Δk :

$$\Delta k\, \tau_D \sim \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/3} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/6} \quad \text{при} \quad \frac{W}{nT} \ll \frac{m_e}{m_i} \qquad (79)$$

Установление узкого квазистационарного пакета происходит настолько быстро, что затухание (или нарастание при другом знаке $\left.\frac{df}{dv}\right|_{v=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}$) в течение процесса установления можно было не учитывать.

4. УСТАНОВИВШИЙСЯ СПЕКТР КОЛЕБАНИЙ В СЛЕГКА НЕУСТОЙЧИВОЙ ПЛАЗМЕ И ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА.

В предыдущем разделе была рассмотрена эволюция во времени на примере продольных электронных колебаний плазмы и было найдено, что в термодинамически равновесной плазме наряду с перераспределением энергии флюктуаций электрического поля по спектру колебаний наблюдается непрерывная диссипация ее до полного затухания флюктуации. Возможны, однако, ситуации, когда энергия колебаний поддерживается на определенном неравновесном уровне за счет развития неустойчивости. Определение спектра таких установившихся колебаний имеет большое значение при рассмотрении различных процессов переноса в неустойчивой плазме.

Полученные нами выше нелинейные уравнения для колебаний позволяют, в принципе, решить эту задачу в случае слабой неустойчивости плазмы, хотя конкретное осуществление этой программы весьма сложно.

В этой статье мы покажем, как это делается, на примере двух очень важных типов неустойчивости плазмы в магнитном поле. Это будет служить также полезной иллюстрацией того, какие допущения (иногда нестрогие) приходится принимать, чтобы получить ответ.

4.I. Нелинейная теория токовой неустойчивости Драммонда, Розенблюта /19/.

В качестве первой иллюстрации мы обратимся сейчас к исследованию турбулентного спектра однородной плазмы, помещенной в сильное магнитное поле H_z , вдоль силовых линий которого течет электронный ток плотностью $j_z = n_0 e v_D$.

Как показали Драммонд и Розенблют, такая плазма уже при небольших скоростях дрейфа $v_D \ll v_{Te}$ неустойчива по отношению к возбуждению потенциальных колебаний с частотами ω_k вблизи первого циклотронного резонанса ионов $\omega_k \simeq \Omega_H$ и длинами волн порядка ларморовского радиуса ионов ($k^2 r_i^2 \simeq 1{,}5$). Дисперсионное уравнение для частоты колебаний легко получить из общего уравнения приложение П, удержав там лишь член с малым знаменателем $(\omega_k - \Omega_H) \ll \Omega_H$ и воспользовавшись условием малости затухания Ландау на ионах $(\omega_k - \Omega_H) \gg k_z v_{Ti}$: IO)

$$\omega_k - \Omega_H \simeq \frac{\Omega_H \Gamma_1(k r_i)}{1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_1(k r_i)} \qquad (80)$$

Как видно из этого выражения, спектр колебаний нераспадный. Это обстоятельство значительно упрощает вид столкновительного члена в кинетическом уравнении для волн и послужило причиной для выбора данной неустойчивости в качестве примера.

($\nu - \delta < 0$), где возможен рост колебаний, если нелинейный инкремент $\tilde{\nu} = \frac{Stoss\{n_k\}}{n_k}$ превышает декремент затухания. Кроме того отличная от нуля амплитуда затухающих колебаний может явиться следствием процессов рассеяния одних колебаний на других. Последний процесс начинает играть роль, если спектральная плотность энергии колебаний $n_k \omega_k$ на длинноволновом участке спектра становится большой.

В рассматриваемом нами стационарном случае уравнения (8I) имеет форму системы линейных уравнений, частные решения которой могут быть легко найдены. Пусть, например, имеются всего два колебания конечной амплитуды, одно из которых ω_1, k_1 раскачивается в результате неустойчивости $\nu_1 - \delta_1 > 0$, а другое имеет меньшую частоту $\omega_2 < \omega_1$ и затухает $\nu_2 - \delta_2 < 0$. Тогда процесс установления амплитуды колебаний можно представить себе следующим образом: сначала нарастает только амплитуда неустойчивого колебания ω_1, k_1. Но как только его амплитуда n_{k_1} превзойдет критическую величину, при которой поток энергии в низкочастотную моду в результате рассеяния на ионах сравнивается с диссипацией энергии в ней из-за линейного затухания, то начинает интенсивно нарастать ранее затухавшее колебание n_{k_2}. Это нарастание происходит до такого уровня, когда в результате нелинейных эффектов начнет гаситься неустойчивость высокочастотной моды. В стационарном режиме приход энергии в каждую моду уравновешивается оттоком энергии и из (I4) мы получаем:

$$n_{k_{2,1}} \simeq n_0 T_i \cdot \frac{\nu_{1,2} - \delta_{1,2}}{\omega_{1,2} - \omega_{2,1}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \cdot |k_{z_1} - k_{z_2}| \cdot v_{Ti}}{\Omega_H^2 A(k_1, k_2) \cdot \exp\left[-\frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{2|k_{z_1} - k_{z_2}|^2 v_{Ti}^2}\right]} \cdot \qquad (82)$$

Отметим, что уравнение (8I) имеет бесчисленное множество решений, хотя бы потому, что существуют точные решения с двумя, тремя и так далее (любым конечным числом колебаний).[II] Однако, такие решения с конечным числом волн сами неустойчивы, ибо любая появившаяся помимо них волна может, вообще говоря, нарастать. Это приводит к тому, что физически должно реализоваться состояние, в котором возбуждены все колебания в неустойчивой области.

Мы ограничимся лишь очень грубой оценкой амплитуды пульсаций в таком режиме, сравнивая приход энергии в неустойчивую моду с нелинейным оттоком энергии из нее в затухающие области спектра. Для удобства вычислений перейдем от суммирования к интегрированию по волновым числам. Ввиду осевой симметрии задачи интегрирование по азимутальному углу проводится сразу. Для приближенной оценки интеграла по $k_\perp$ можно воспользоваться разложением подинтегрального выражения в ряд по разности частот $(\omega_k - \omega_{k'})$, что имеет смысл, так как взаимодействуют между собою лишь колебания с малой разностью частот $(\omega_k - \omega_{k'}) \lesssim (k_z - k_{z'}) v_{Ti} \ll \omega$. В результате уравнение (8I) принимает вид:

$$\nu_k - \delta_k = -2\pi \int dk_z' \, |k_z - k_z'|^2 \cdot \left.\frac{\partial n_{k'} k' A(k', k)}{\partial k'}\right|_{k'=k} \cdot \frac{\Omega_H^2 \cdot v_{Ti}^2}{n_0 T_i \cdot \frac{\partial \omega}{\partial k_\perp} \left|\frac{\partial \omega}{\partial k_\perp}\right|} \cdot \qquad (83)$$

Ясно, что к наиболее сильному ограничению амплитуды приводит взаимодействие с модой, имеющей большое k_z. Предполагая, что n_k меняется в фазовом пространстве (ω, k) быстрее, чем коэффициент $A(k, k')$, записываем приближенно:

$$\int dk_z \, k_\perp \frac{\partial n_k}{\partial k_\perp} = -\frac{\nu_k - \delta_k}{\Omega_H^2} \cdot n_0 M \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_\perp}\right)^2 \frac{\mathrm{Sign}\, \frac{\partial \omega}{\partial k_\perp}}{2\pi \cdot k_{z\,max}^2 \, A(k, k')}$$

Как видно из этого выражения, в области максимальной частоты $\omega_\kappa - \Omega_H = \frac{\Omega_H T_e}{T_i + T_e} \Gamma_1(\kappa_\perp r_i)$ при $\kappa_\perp^2 r_i^2 \simeq 1{,}5$ амплитуда флюктуаций электрического поля минимальна /16/. С увеличением длины волны $\lambda_\perp$ спектральная плотность энергии электрического поля $\kappa_\perp^2 \varphi_\kappa^2$ стремится к постоянному пределу, а в область коротких длин волн $\lambda_\perp$ спадает пропорционально четвертой степени отношения длины волны $\lambda_\perp$ к ларморовскому радиусу r_i $\sim \left(\frac{\lambda_\perp}{r_i}\right)^4$

Наконец, для рассмотрения зависимости $n_\kappa(\kappa_z)$ выпишем явное выражение для инкремента неустойчивости в максвелловской плазме с током. Выбирая, как и в работе /19/, распределение электронов по скоростям v_z в виде:

$$f_e(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}}\, e^{-\frac{m(v_z - v_D)^2}{2T_e}}$$

из (2) получаем:

$$\nu_\kappa \simeq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega_\kappa - \Omega_H}{1 + \frac{T_i}{T_e}} \left(\frac{v_D}{v_{Te}} \cdot \frac{\kappa_z}{|\kappa_z|} - \frac{\omega_\kappa}{|\kappa_z| v_{Te}}\right)$$

Отсюда следует, что неустойчивость имеется лишь при одинаковых знаках κ_z и ω_κ (при $v_D > 0$) (в дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $\omega_\kappa > 0, \kappa_z > 0$). Причем со стороны малых κ_z спектр колебаний ограничивается неравенством $\kappa_z \gtrsim \frac{\omega_\kappa}{v_D}$.

С увеличением же κ_z , как видно из (2), неустойчивость подавляется за счет линейного затухания Ландау на ионах при значениях порядка $\kappa_{z\,max} \sim \frac{\omega_\kappa}{v_{Ti}}$. Подставляя это значение в (4), находим уровень энергии флюктуаций электрического поля:

$$\sum_\kappa \frac{e^2 \varphi_\kappa^2}{T_i^2} \simeq 10^{-2} \cdot \frac{v_D}{v_{Te}} \cdot \frac{T_i T_e}{(T_i + T_e)^2} \qquad (84)$$

Описанные методы нахождения спектра колебаний слабонеустойчивой плазмы позволяет оценить различные коэффициенты переноса, в частности коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля из-за наличия колебаний. Мы оценим коэффициент диффузии, воспользовавшись квазилинейной теорией.

Ввиду амбиполярности диффузии нам достаточно рассмотреть только электроны, при описании которых мы ограничимся дрейфовым приближением. Кинетическое уравнение для функции распределения электронов в дрейфовом приближении имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - c\frac{[\nabla\varphi \times H]}{H^2} \nabla f - \frac{e}{m} \nabla_z \varphi \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 . \qquad (85)$$

После обычной процедуры получаем усредненное уравнение для медленно-меняющейся части функции распределения (см.,например,/22/):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_\kappa \left(\frac{1}{v_z}\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{\kappa_y}{\omega_\kappa \omega_H}\frac{\partial}{\partial x}\right) D_\kappa \left(\frac{1}{v_z}\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{\kappa_y}{\omega_\kappa \omega_H}\frac{\partial}{\partial x}\right) f_0 - \qquad (86)$$

$$- \nu_e v_{Te}^2 \frac{\partial^2 (f_0 - f_M)}{\partial v_z^2} ; \qquad D_\kappa = \pi \frac{e^2}{m^2} \varphi_\kappa^2 \omega_\kappa^2 \delta(\omega_\kappa - \kappa_z v_z)$$

где в правую часть добавлен столкновительный член в τ -приближении (f_M - максвелловская функция распределения электронов по скоростям). Здесь же мы удержали члены с производными по координатам от медленно-меняющейся функции распределения f_0 , так как именно они описывают диффузию плазмы в пространстве скоростей. Запись уравнения в такой форме позволяет нам рассмотреть ряд эффектов, общих как для однородной, так и для неоднородной плазмы.

Из (86) следует, что при условии

$$\nu_e v_{Te}^2 \gg \pi \frac{e^2 k_z^2 \varphi_k^2}{m^2 \omega_k} \tag{87}$$

столкновения частиц существенны и устанавливают максвелловское распределение по скоростям. В этом случае мы можем пользоваться выражениями для инкремента, вычисленными в предположении справедливости максвелловского распределения электронов по скоростям.

Интегрируя уравнение (86) по скоростям мы получаем изменение плотности частиц в об"еме со временем за счет возникновения макроскопических потоков плазмы поперек магнитного поля:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \pi \frac{\partial}{\partial x} \sum_k \frac{c^2 k_y^2 \varphi_k^2}{H^2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega_k - k_z v_z) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \quad \frac{\partial}{\partial v_z}\right) f(v_z)\, dv_z \tag{88}$$

Из этого выражения следует, что поток плазмы [illegible]оит из двух частей:

$$\langle n v \rangle_x = j_{1x} - D_\perp \frac{\partial n}{\partial x} ,$$

первая из которых j_{1x} совсем не связана с наличием в плазме градиентов плотности и представляет собой поток вещества, переносимый волнами (она исчезает, если спектр волн осесимметричен).

Подставляя сюда оценку для энергии колебаний (84) и используя оценку для максимальной фазовой скорости $\frac{\omega}{k_z} \lesssim v_D$, мы находим окончательно:

$$D_\perp \sim 10^{-2} \left(\frac{v_D}{v_{Te}}\right)^2 \frac{c T_i^2}{e H T_e} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^{-2}, \quad \nu_e \gtrsim 10^{-2} \Omega_H \frac{v_{Te}}{v_D} \frac{T_i^3}{T_e (T_i + T_e)^2} \tag{89}$$

Если условие (87) нарушается, то редкие столкновения частиц не успевают максвеллизовать функцию распределения электронов, которая под действием возникших флюктуаций электрических полей релаксирует к более устойчивому состоянию.

Если столкновениями частиц вообще пренебречь, то неустойчивость самоподавляется прежде, чем происходит значительная диффузия частиц. В этом проще всего убедиться, если в уравнении (86) заменить приближенно коэффициент D_k на средний по спектру $D_{\bar{k}}$ и перейти к новым переменным:

$$\eta = \frac{v_z^2}{2u}, \qquad \xi = \frac{v_z^2}{2u} + \frac{\omega_k \omega_H}{k_y u} x ,$$

где u - скорость порядка скорости резонансных электронов (здесь $u \lesssim v_D$). В результате (86) принимает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} u^{-2} D_k(\xi, \eta, t) \frac{\partial f_0(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tag{90}$$

Как следует из этого уравнения за времена порядка $\tau \sim \frac{v_D^2}{D_k}$ на функции распределения $f(\xi, \eta)$ устанавливается "плато" по переменной η во всем интервале резонансных частиц ($0 \lesssim \eta \lesssim v_D$). При этом координата x и скорость v_z резонансных электронов связаны соотношением $\xi = \frac{v_z^2}{2u} + \frac{\omega_k \omega_H}{k_y u} x = Const$, так что при изменении скорости v_z на порядок величины $\delta v_z \sim v_z$, смещение резонансных частиц δx за время τ приближенно равно /20/

$$\delta x \sim \frac{\delta v_z}{v_z} \cdot \frac{k_y v_z^2}{\omega_k \omega_H} \sim r_i \left(\frac{v_D}{v_{Te}}\right)^2 \frac{T_e}{T_i} \tag{91}$$

Нерезонансные частицы в этом приближении не испытывают никакого смещения.

Таким образом при полном отсутствии столкновений частиц неустойчивость быстро самоподавляется и поток плазмы поперек силовых линий отсутствует. Однако даже слабые столкновения электронов имеют тенденцию максвеллизовать распределение и мешают образованию плато. Поэтому инкремент неустойчивости отличен от нуля и мы найдем его, воспользовавшись теорией возмущений по малому отношению частоты столкновений ν_e к эффективной частоте $\nu_* \simeq \simeq \frac{k_z^2 D_k}{\omega^2 v_{Te}^2}$ /21/. В первом приближении функция распределения удовлетворяет уравнению:

$$\nu_k\left(f^{(0)}\right) = \pi \frac{\omega_k - \Omega_H}{|k_z|} \cdot \frac{T_i}{1+\frac{T_i}{T_e}} \cdot \left(\frac{k_z}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} - \frac{c k_y}{eH}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x}\right)\Bigg|_{v_z \simeq \frac{\omega_k}{k_z}} = 0 \,. \quad (92)$$

Поправку $f^{(1)}$ к функции $f^{(0)}$ за счет влияния столкновений мы получим, если в стационарном режиме приравняем друг другу два члена в левой части (86) и проинтегрируем от скоростей $v_z = \frac{\omega_k}{k_z}$ до таких ($v_z \gtrsim v_D$), при которых максвелловское распределение справедливо:

$$D_v\left(\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{k_z \omega_H}\frac{\partial}{\partial x}\right) f^{(1)} \simeq \nu_e v_{Te}^2 \frac{\partial}{\partial v_z}\left(f^{(0)} - f_M\right) , \quad (93)$$

$$D_v \simeq \pi \frac{e^2 k_z^2 \varphi_k^2}{m^2 \omega_k}$$

Замечая далее, что в результате влияния колебаний изменяются лишь производные $\frac{\partial f}{\partial v_z}$, а не сама функция распределения, мы можем, следуя (92), написать приближенное равенство:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} = \frac{k_y}{k_z \omega_H}\frac{\partial f_M}{\partial x}$$

Используя это равенство, а также определение (92), переписываем (93) в более удобном виде:

$$\nu\left(f^{(1)}\right) \simeq \frac{\nu_e \cdot \nu(f_M)}{D_v\, v_{Te}^{-2}} , \quad D_v v_{Te}^{-2} \simeq \nu_* \gg \nu_e \quad (94)$$

Выражение (92) фактически определяет нам полный инкремент неустойчивости с учетом влияния на устойчивость неоднородности плазмы. Такая общая запись разумна при очень малых частотах столкновений ν_e , когда поправка к инкременту $\nu\left(f^{(1)}\right)$ за счет столкновений значительно меньше, чем вклад неоднородности плазмы (при этом распределение плазмы $f_o(x, v)$ релаксирует так, что менее неустойчивая мода $\frac{k_y}{} \frac{\nabla n}{n} < 0$ затухает, а более неустойчивая развивается с инкрементом (94). Нас будет интересовать противоположный случай, когда неоднородность плазмы очень слабая. Тогда в стационарном уравнении (86) с большой точностью можно опустить неоднородные члены и искать поправки к инкременту неустойчивости

$$\nu_1 = \pi \frac{\omega_k - \Omega_H}{|k_z| \cdot \left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)} \cdot \frac{k_z}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v_z}\Bigg|_{v_z = \frac{\omega_k}{k_z}}$$

Для вычисления же потока частиц, вызванного градиентом плотности, нам следует совместно решить уравнения (83),(94),(88). В результате вычислений получаем /I6,I7/:

$$D_\perp \sim 10^{-1}\sqrt{\frac{\nu_e}{\Omega_H}} \cdot \frac{cT_e}{eH}\left(\frac{v_D}{v_{Te}}\right)^{5/2} \cdot \frac{T_e^{1/2} T_i^{1/2}}{T_i + T_e} , \qquad \nu_e \lesssim 10^{-2}\Omega_H \frac{v_{Te}}{v_D} \cdot \frac{T_i^3}{(T_i+T_e)^2 T_e} \quad (95)$$

Кроме последнего условия здесь требуется также, чтобы эффекты влияния на устойчивость неоднородности были малы, что имеет место при

$$\nu \simeq \sqrt{\nu_e \Omega_H} \left(\frac{v_D}{v_{Te}}\right)^{3/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \frac{T_e}{T_i + T_e} \gtrsim \Omega_H \frac{v_D}{v_{Te}} \frac{r_i \nabla n}{n} \frac{T_e}{T_i + T_e} .$$

4.2 "УНИВЕРСАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ" НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ.

В качестве второго примера слегка неустойчивой плазмы мы рассмотрим плазму, неравновесность которой заключается в ее неоднородности. Как линейная, так и нелинейная теория устойчивости неоднородной плазмы насчитывает сейчас большое число работ, многие из которых вошли в обзоры (см.,например,/22/). Поэтому мы коснемся здесь лишь некоторых специфических черт данной задачи, не вдаваясь в слишком детальный анализ.

Для простоты рассмотрения мы ограничимся лишь случаем отсутствия градиента температуры. Выберем функцию распределения частиц $f_{oj}(x,v)$ неоднородной плазмы, помещенной в сильное магнитное поле H_z в виде:

$$f_{oj}(x,v) = \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{3/2} n_o\left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right) e^{-\frac{m_j v^2}{2T_j}} \tag{96}$$

Такое распределение плазмы неустойчиво по отношению к возбуждению потенциальных дрейфовых волн с частотами вблизи гармоник ионной циклотронной частоты $\omega_k \simeq l\Omega_H$, $l=0,1,..$ и фазовыми скоростями $v_{Ti} < \frac{\omega_k - l\Omega_H}{k_z} \lesssim v_A$. Непотенциальные возмущения ($\mathrm{rot}\, E \neq 0$), искажающие силовые линии магнитного поля в отсутствии градиента температуры затухают.

Интересно отметить, что если мы в конечном итоге интересуемся процессами переноса частиц плазмы поперек удерживающего магнитного поля, то в наиболее интересном для проблемы управляемых термоядерных реакций в случае высоких температур и очень редких столкновений нам нет необходимости определять уровень энергии развившихся колебаний.

Действительно, в слабонеоднородной плазме ($\frac{r_i \nabla n}{n} < \sqrt{\frac{m}{M}}$) неустойчивости развиваются с малым инкрементом $\gamma < \omega$, так что для учета их обратного влияния на диффузию плазмы можно воспользоваться квазилинейной теорией, обобщенной на неоднородную плазму. Применение формул (88),(92) предыдущего раздела в пренебрежении редкими столкновениями частиц показывает, что в этом приближении диффузия плазмы отсутствует. Нахождение же потока плазмы поперек поля H_z во втором приближении по малому отношению частоты столкновений ν_e к обратному времени образования плато на функции распределения ν_*, приводит к тому, что амплитуда турбулентных пульсаций выпадает из оценки для потока плазмы в направлении градиента плотности /20,21/:

$$\langle nv \rangle_x = -\nu_e \frac{k_y^2 v_{Te}^4}{\omega_H^2 \omega_k^2} \left(\frac{\omega_k}{|k_z| v_{Te}}\right)^3 \left(\frac{\partial n_o}{\partial x} + \frac{m\omega_H}{k_y T_e}\omega_k n_o\right) \Gamma_o'(kr),$$

$$\nu_e \lesssim \pi \sum_k \frac{e^2 k_z^2 \varphi_k^2}{m^2 \omega_k v_{Te}^2} \tag{97}$$

Пределы применимости этой формулы, естественно, зависят от уровня флюктуаций электрического поля $k_z \varphi_k$ в максвелловской плазме.

Для получения численного значения коэффициента диффузии сюда

Соотношения (97),(98),(102) в принципе решают задачу от турбулентной диффузии высокотемпературной плазмы. Поскольку основной вклад в (97) дают низкочастотные возмущения, то подставляя в (97) частоты $\omega_k \simeq \frac{v_{Ti} \nabla n}{n}$ и длины волн $k_z \sim \omega_k / v_A$, $k_\perp r_i \sim \beta^{-1} \cdot \frac{T_e}{\sqrt{2\pi}(T_i + T_e)}$, находим

$$\mathcal{D}_\perp \sim \frac{1}{10} \nu_e \left(\frac{n}{\nabla n}\right)^2 \beta^{-2} \left(\frac{m}{M_\beta}\right)^{3/2} \frac{T_e^2}{T_i^2}. \tag{103}$$

При нарушении условия (87) (91) турбулентная диффузия существенно зависит от уровня энергии колебаний в плазме.

Для рассмотрения нелинейного взаимодействия флюктуаций электрических полей мы воспользуемся ранее выведенными уравнениями (22), описывающими изменение во времени амплитуд отдельных мод колебаний. Поскольку мы в состоянии получить лишь разумные оценки, а не точные выражения для спектра турбулентности, то при написании этих уравнений мы воспользуемся рядом упрощающих предположений. Во-первых, мы будем считать, что в результате развития неустойчивости в плазме имеются только колебания с частотами очень близкими к гармоникам циклотронной частоты ионов $\omega_{kl} - l\Omega_H \ll \ll \Omega_H$, так что в формулах для функции распределения (см.приложение П) достаточно удержать лишь члены с малыми знаменателями $(\omega_{kl} - l\Omega_H)$. Во-вторых, мы будем интересоваться лишь колебаниями с длиной волны $\lambda \lesssim r_i \sqrt{\frac{\omega_k}{k_z v_{Ti}}}$, для которых основной вклад в диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'})$ дает интеграл по ионной функции распределения.

Кроме того мы пренебрежем тепловым разбросом ионов и будем считать справедливой аппроксимацию:

$$\frac{\exp\left[-\frac{(\omega_k - \omega_{k'})^2}{2|k_z - k_z'|^2 v_{Ti}^2}\right]}{\sqrt{2\pi}\,|k_z - k_z'|\, v_{Ti}} \simeq \delta(\omega_k - \omega_{k'}) \tag{104}$$

Наконец, нелинейное взаимодействие колебаний с электронами может сказаться лишь при очень малых длинах волн $\lambda_\perp \ll r_i$, так что эти эффекты достаточно учесть в пределе $\lambda \ll r_i$.

С учетом этих обстоятельств из (22) с помощью формул приложения П получаем кинетическое уравнение для числа волн n_{kl} с частотой $\omega_{kl} \simeq l\Omega_H$ в системе координат, где отсутствует невозмущенное электрическое поле $E_{0x} \simeq 0$:

$$\frac{\partial n_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{kl}}{\partial k_x}\frac{\partial n_{kl}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{kl}}{\partial k_x}\frac{d k_x}{d x}\frac{\partial n_{kl}}{\partial k_x} = (\gamma_{kl} - \delta_{kl}) n_{kl} +$$

$$+ 2\pi \sum_{k' + k'' = k} |V_{kl,k'p,k''l-p}|^2 \cdot \left(n_{k'p} n_{k''l-p} - n_{kl} n_{k''l-p} \operatorname{Sign} \omega_{k'p} - \right.$$

$$\left. - n_{kl} n_{k'p} \operatorname{Sign} \omega_{k''l-p}\right) \delta(\omega_{kl} - \omega_{k'p} - \omega_{k''l-p}) - \tag{105}$$

$$- \sum_{k'} \frac{n_{kl} n_{k'p} \Omega_H^2}{n_0 T_i} \operatorname{Sign}(\omega_{kl} - l\Omega_H)\left[\omega_{kl} - \omega_{k'p} - (k_y - k_y') v_n^i\right] A_{l,p}(k,k') \cdot \delta(\omega_{kl} - \omega_{k'p} - (l-p)\Omega_H) -$$

$$- \sum_{k'} \frac{n_{kl} n_{k'p} \Omega_H^2}{n_0 T_i} \operatorname{Sign}(\omega_{kl} - l\Omega_H)\left[(\omega_{kl} - \omega_{k'p})\frac{T_i}{T_e} + (k_y - k_y') v_n^i\right] B(k,k') \frac{e^{-\frac{(\omega_{kl} - \omega_{k'p})^2}{2|k_z - k_z'|^2 v_{Te}^2}}}{\sqrt{2\pi}\,|k_z - k_z'|\, v_{Te}},$$

где:

$$n_{kl} = \frac{n_0 e^2 \varphi_k^2}{T_i |\omega_k - l\Omega_H|}\left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_l(k r_i) + k^2 d_i^2\right),$$

γ_{kl} – инкремент неустойчивости из-за резонансного взаимодействия волны с электронами (98),

$$\delta_{k\ell} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{(\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H)(\omega_{k\ell} - k_y v_n^i)\Gamma_\ell(k r_i)}{|k_z| v_{Ti}\left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_\ell(k r_i) + k^2 d_i^2\right)} \cdot e^{-\frac{(\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H)^2}{2 k_z^2 v_{Ti}^2}}$$

– декремент затухания Ландау на ионах;

$$A_{\ell,p}(k,k') = 2\pi\left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_\ell(d) + k^2 d_i^2\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_p(d') + k'^2 d_i^2\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ [k \times k']_z^2 r_i^4 \Big(\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_\ell^2(ds) J_p^2(d's) s\,ds - \Gamma_{\ell-p}^{-1}(d'') \Big| \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_\ell(ds) J_p(d's) J_{\ell-p}(d''s) s\,ds \Big|^2 \Big) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} \Big| \ell J_\ell(ds) \cdot \frac{dJ_p(d's)}{ds} + p J_p(d's) \frac{dJ_\ell(ds)}{ds} \Big|^2 \frac{ds}{s} - \Gamma_{\ell-p}^{-1}(d'') \cdot$$

$$\cdot \Big| \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} \Big(\ell J_\ell(ds) \frac{dJ_p(d's)}{ds} + p J_p(d's) \frac{dJ_\ell(ds)}{ds} \Big) J_{\ell-p}(d''s)\,ds \Big|^2 \Big\} \geq 0;$$

$$B(k,k') = [k \times k']_z^2 r_i^4 \frac{|\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H| \cdot |\omega_{k'p} - p\Omega_H|}{\left(\omega - k_z \frac{\omega_{k\ell} - \omega_{k'p}}{k_z - k'_z}\right)^2} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_0^2(k_\perp r_e s) J_0^2(k_\perp r_e s) s\,ds \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{k_z}{|k_z - k'_z|} \exp\left(-\frac{\omega_{k\ell}^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} + \frac{(\omega_{k\ell} - \omega_{k'p})^2}{2(k_z - k'_z)^2 v_{Te}^2}\right)\right];$$

$$V_{k\ell, k'p, k''\ell-p} = \sqrt{\frac{8|\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H| \cdot |\omega_{k'p} - p\Omega_H| \cdot |\omega_{k''\ell-p} - (\ell-p)\Omega_H|}{n_0 T_i \left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_\ell(d) + k^2 d_i^2\right)\left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_p(d') + k'^2 d_i^2\right)\left(1 + \frac{T_i}{T_e} - \Gamma_{\ell-p}(d'') + k''^2 d_i^2\right)}} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \Big([k' \times k]_z r_i^2 \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_\ell(ds) J_p(d's) J_{\ell-p}(d''s) s\,ds + i \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_\ell(ds) \Big(J_{\ell-p}(d''s) \frac{dJ_p(d's)}{ds}(\ell - p) -$$

$$- p J_p(d's) \frac{dJ_{\ell-p}(d''s)}{ds} \Big) ds \Big) \cdot \Big(\Big[1 + \frac{T_i}{T_e} + k''^2 d_i^2\Big] \Gamma_{\ell-p}^{-1}(d'') - \Big[1 + \frac{T_i}{T_e} + k'^2 d_i^2\Big] \Gamma_p^{-1}(d') \Big) \cdot \frac{\Omega_H}{\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H} \cdot$$

$$- i \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} J_{\ell-p}(d''s) J_\ell(ds) J_p(d's) s\,ds \cdot \left(1 + \frac{T_i}{T_e} + k''^2 d_i^2\right)\left(1 + \frac{T_i}{T_e} + k'^2 d_i^2\right) \Gamma_p^{-1}(d') \Gamma_{\ell-p}^{-1}(d'') \cdot$$

$$+ i\left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^2 + i(k'^2 + k''^2) d_i^2 \Big\}.$$

$$d = k_\perp r_i, \quad k'' = k - k'. \quad r_j = V_{Tj}\,\omega_{Hj}^{-1}, \quad V_{Tj} = \sqrt{\frac{T_j}{m_j}};\ (j = i, e)$$

Второй член в этом уравнении описывает процессы распада одного колебания на два других и обратный процесс слияния двух различных колебаний в одно. Представление "дрейфовых" колебаний в виде когерентного набора $n_{k\ell}$ квантов отдельных колебаний с квазиэнергией $\omega_{k\ell}$ и квазиимпульсом k позволяет записать интеграл столкновений из-за распадов "дрейфовых" колебаний в форме, аналогичной $Stoss$ – члену в кинетическом уравнении для фононов в твердом теле.

Третий и четвертый члены возникают из-за взаимодействия волн и частиц в нелинейном по амплитудам волн приближении. Поскольку фазовая скорость "дрейфовых" волн значительно больше тепловой скорости ионов $\frac{\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H}{k_z} \gg v_{Ti}$, то закон сохранения энергии допускает лишь процесс рассеяния колебаний ионами:

$$(p - \ell)\Omega_H + \omega_{k\ell} - \omega_{k'p} = (k_z - k'_z) v_z, \tag{106}$$

где: $\omega_{k\ell}, \omega_{k'p}$ – энергия рассеиваемого и рассеянного колебаний, $(k_z - k'_z)$ – изменение импульса частицы $m_j v_z$ при рассеянии. При таком рассеянии энергия перекачивается из коротковолновых мод в длинноволновые. Для электронов же в уравнении (106) может стоять знак " + ", соответствующий испусканию (поглощению) сразу двух колебаний.

Рассмотрим сначала низкочастотные колебания ($\omega_{k0} \ll \Omega_H$).

Поскольку нелинейное взаимодействие с увеличением фазовой скорости $\frac{\omega_{k0} + \omega_{k'0}}{k_z + k'_z} > V_A$ уменьшается, то основной вклад в него дают резонансные электроны со скоростями порядка $\sim V_A$. Группа же резонансных электронов составляет лишь малую часть порядка $\sim \frac{V_A}{V_{Te}}$ от их общего числа и поэтому нелинейные члены содержат такую же малость, что и линейные члены, приводящие к неустойчивости $\frac{\gamma_{k0}}{\omega_{k0}+k_y v_n^i} \simeq \frac{v_A}{v_{Te}} \ll 1$. Благодаря последнему обстоятельству, временную эволюцию волновых пакетов с длинами волн колебаний короче $\lambda \lesssim r_i \sqrt{\frac{v_A}{v_{Te}}}$ уже нельзя описывать с помощью полученных уравнений, хотя неустойчивость в силу $\gamma_{k0} \ll \omega_{k0}$ можно считать слабой. Это становится очевидным, если учесть, что с уменьшением длины волны коэффициенты $A(k,k')$, $B(k,k')$ в уравнении (105) растут соответственно пропорционально второй и четвертой степени отношения ларморовского радиуса r_i к длине волны λ $(A(k,k') \sim kk' r_i^2$, $B(k,k') \sim k^2 k'^2 r_i^4)$. Поэтому при $k^2 r_i^2 > \frac{v_{Te}}{v_A}$ по мере роста амплитуды в первую очередь начинают сказываться нелинейные эффекты, связанные с тепловым движением электронов. Причем это происходит при таких амплитудах, что становится существенным не только поправка к энергии взаимодействия, квадратичная по энергиям волн, но и все остальные члены разложения энергии взаимодействия волн по их амплитудам, и мы встаем перед необходимостью суммирования бесконечных рядов.

Такая трудность не возникает при рассмотрении взаимодействия более длинных волн $r_i > \lambda_\perp \gtrsim r_i \sqrt{\frac{v_A}{v_{Te}}}$, для которых основную роль играет нелинейная перекачка энергии в более длинноволновые пульсации за счет рассеяния на ионах. Сравнивая в кинетическом уравнении (105) линейную накачку колебаний с нелинейным оттоком находим, что энергия таких мод не может превышать величину [13]

$$\sum_k n_{k0}\,\omega_{k0} \lesssim n_0 T_i \frac{\gamma_{k0}}{\omega_{k0}-k_y v_n^i} \cdot \frac{\omega_{k0}^2}{\Omega_H^2} A_{00}^{-1}(k,k) \qquad (107)$$

Здесь уже нелинейный член порядка ~ 1 и поэтому энергия колебаний $n_k \omega_k$ содержит малость γ_k/ω_k. Ясно, что следующие члены разложения энергии взаимодействия по амплитудам отдельных волн содержат эту малость во все возрастающей степени $(\gamma_k/\omega_k)^n$, так что разложение справедливо.

Поскольку в настоящее время не существует регулярных методов рассмотрения сильной неустойчивости, то мы ограничимся случаем не очень коротких волн $\lambda \gtrsim r_i \sqrt{\frac{v_A}{v_{Te}}}$, когда применимы все развитые выше методы.

Как следует из оценки (107), приход энергии из коротковолновых мод $\lambda < r_i$ в длинноволновые $\lambda > r_i$ вследствие рассеяния на ионах не превышает линейного роста неустойчивости относительно длинноволновых пульсаций $\lambda \gtrsim r_i$. Сравнивая последний с нелинейной откачкой энергии из-за распадных процессов, получаем оценку спектральной плотности энергии в длинноволновых колебаниях /20,22,24/

$$\sum_k n_{k0}\omega_{k0} \simeq \frac{1}{10} \cdot \frac{\gamma_{k0}}{\omega_{k0} k^2 r_i^2} \cdot \left(\lambda_x \frac{\nabla n}{n}\right)^2 n_0 T_i \cdot \frac{T_e}{T_i+T_e} \qquad (108)$$

где $\lambda_x = k_x^{-1}$ – длина волны "дрейфовых волн", которая как и все пространственное поведение флюктуаций потенциала электрических полей $\varphi(x)$ описывается, вообще говоря, интегро-дифференциальным уравнением, соответствующим в WKB –приближении дисперсионному уравнению (98). Естественно, что к эффективной турбулентной диффузии могут привести лишь колебания, охватывающие весь об"ем плазмы. Длина волны λ_x колебаний с такой широкой областью возможного движения $x \sim \frac{n}{\nabla n}$ одного порядка с величиной лармо-

[illegible] случая волн $\lambda_x \sim r_i$. Воспользовавшись далее оценкой максимального инкремента (99), определяем коэффициент диффузии на таких пульсациях /20,22,24/

$$D \simeq \sqrt{\frac{m}{M\beta}}\,\frac{r_i \nabla n}{n}\cdot\frac{cT_i}{eH}\,\frac{T_e}{T_i+T_e}, \qquad \nu_e \gtrsim \Omega_H \left(\frac{r_i \nabla n}{n}\right)^3 \left(\frac{M\beta}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_i T_e^2}{(T_e+T_i)^3}\,\nu_*^{(o)} \quad (109)$$

Если обратиться теперь к рассмотрению низкочастотных дрейфовых колебаний с более короткими длинами волн $r_i > \lambda \gtrsim r_i \sqrt{\frac{v_A}{v_{Te}}}$, то, принимая во внимание высокий уровень амплитуды длинноволновых колебаний (108), мы замечаем, что они затухают в нелинейном режиме из-за сильного рассеяния на ионах и не дают вклада в диффузию.

Оценки (109) вполне достаточно в плазме не очень низкого давления $0{,}13 \lesssim \beta \lesssim 10^{-2}$, когда в результате неустойчивости имеются лишь колебания с длиной волны $\lambda \gtrsim r_i \sqrt{\frac{v_A}{v_{Te}}}$.

В более редкой плазме завышенные оценки амплитуды коротковолновых пульсаций по сильной связи /21/ показывают, что коэффициент диффузии численно может измениться по сравнению с (109) минимум в 5 раз. Буквальные зависимости изменяются также незначительно.

Добавим несколько слов об оценке влияния на диффузию высокочастотных "дрейфовых" волн ($\omega_k \sim \Omega_H$). Они развиваются с малыми инкрементами $\nu_{k\ell} \ll (\omega_{k\ell} - \ell\Omega_H)$ и прекрасно описываются кинетическим уравнением (105), в котором основную роль играют нелинейные эффекты, описывающие рассеяние волн ионами. В максвелловской плазме, когда уровень длинноволновых турбулентных пульсаций определяется формулой (108), высокочастотные колебания подавляются в нелинейном режиме.

При уменьшении частоты столкновений частиц ν_e ниже "квазилинейной" $\nu_*^{(o)}$ для пульсаций с длинами волн $\lambda \sim r_i$ мы еще не переходим в режим диффузии высокотемпературной плазмы. Это происходит вследствие того, что образование плато на функции распределения электронов приводит к подавлению длинноволновых колебаний, но тогда согласно (9) (97?) возникает возможность развития более коротких волн. Пусть K_o - волновое число, ниже которого линейный инкремент неустойчивости падает из-за обратного влияния колебаний на "фон" (мы определим его далее при заданной частоте согласно очевидной формуле $\nu_e \sim \nu_*^{(o)} \cdot \frac{n_k(K_o)}{n_k(r_i^{-1})}$). Тогда для колебаний более коротких, чем мода (ω_k, K_o), функцию распределения f_{oj} можно считать максвелловской и как прежде они будут подавлены из-за сильного рассеяния на ионах. Амплитуда более длинноволновых колебаний растет до такой величины, когда начнет подавляться служащая источником энергии мода (ω_{K_o}, K_o). При этом возможно дать лишь оценку сверху для суммарной "энергии" всех длинноволновых пульсаций

$$\sum_k n_{k_o}\omega_{k_o}\frac{K}{K_o} \lesssim n_o T_i \cdot \frac{\nu_{K_o}(K_o)}{\omega_{K_o}(K_o)}\left(\frac{r_i \nabla n}{n}\right)\cdot\frac{1}{K_o^3 r_i^4}\,\frac{T_e}{T_i+T_e}. \quad (110)$$

Амплитуда неустойчивого коротковолнового колебания устанавливается в соответствии с возможным темпом диссипации энергии колебаний в затухающих областях спектра и уменьшения числа квантов за счет распадных процессов.

Однако уровень амплитуды затухающих колебаний сам зависит от величины $n(K_o)$ и задача определения амплитуды $n(K_o)$ затрудняется. Можно в соответствии с (110) считать, что

$$n(k_0)\,\omega_k(k_0) \lesssim n_0 T_i \cdot \frac{\nu_k(k_0)}{\omega_k(k_0)} \left(\frac{r_i \nabla n}{n}\right) \frac{1}{k_0^3 r_i^3}\, \frac{T_e}{T_i + T_e}$$

Отсюда непосредственно получаем оценку сверху для коэффициента диффузии:

$$D_\perp \lesssim \frac{m}{M\beta}\, \frac{r_i \nabla n}{n}\, \frac{cT_i}{eH}\, \frac{T_e}{T_i+T_e}, \qquad \nu_e \gtrsim 8\pi\beta^2 \Omega_H \left(\frac{r_i \nabla n}{n}\right)^3 \left(\frac{M\beta}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_i^2}{(T_i+T_e)T_e}$$

Если давление плазмы $\beta \lesssim 10^{-2}$, то при постепенном уменьшении частоты мы доходим до колебаний с длиной волны короче $r_i \sqrt[4]{\frac{m}{M\beta}}$. Амплитуду их мы не можем определить в приближении "слабой связи". Поэтому можно лишь утверждать, что результат (I09) справедлив по крайней мере до частот столкновений

$$\nu_e \gtrsim \Omega_H \left(\frac{r_i \nabla n}{n}\right)^3 \frac{T_i^2 T_e}{(T_i+T_e)^3} \qquad \text{(III)}$$

При меньшей частоте мы непосредственно можем находить коэффициент диффузии по формуле (103).

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Докажем, что вещественные части величин $\nu_{k',k'',k'''}(\omega_{k'},\omega_{k''},\omega_{k'''})$ не дают вклада в $\operatorname{Im} \mu_{k,k',-k'}(\omega_k,\omega_{k'},-\omega_{k'})$. Для этого достаточно показать, что если все полюса в спектральном разложении для $\mu_{k,k',-k'}$ (38) интегрировать в смысле главного значения, то соответствующая часть отклика $\mu_{k,k',-k'}$ (обозначим её через $\mu'_{k,k',-k'}(\omega_k,\omega_{k'},-\omega_{k'})$) будет вещественной. Нам понадобится кроме соотношений (4I) , (42) еще одна формула

$$\nu_{k',k'',k'''}(\omega',\omega'',\omega''') = \nu_{k'',k',k'''}(\omega'',\omega',\omega''') - \nu_{k'',-k'-k''-k''',k'''}(\omega'',-\omega'-\omega''-\omega''',\omega'''), \qquad \text{(I)}$$

которая легко получается из

$$\int dr^0 dp^0 f(r^0,p^0) \left[\left[\rho(r,t),\rho(r',t')\right],\rho(r'',t'')\right],\rho(r''',t''')\Big] =$$

$$= \int dr^0 dp^0 f(r^0,p^0) \Big\{ \Big[\left[\left[\rho(r,t),\rho(r'',t'')\right],\rho(r',t')\right],\rho(r''',t''')\Big] -$$

$$- \Big[\left[\left[\rho(r',t'),\rho(r'',t'')\right],\rho(r,t)\right]\rho(r''',t''')\Big] \Big\}$$

Запишем разложение для $\mu'_{k,k',-k'}$ (сохраняя для удобства перенормировочные члены):

$$\mu'_{k,k',-k'}(\omega_k,\omega_{k'},-\omega_{k'}) = -\frac{1}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega'\, d\Omega''\, d\Omega'''}{\omega_k - \Omega' - \Omega'' - \Omega'''} \left\{ \frac{\nu_{k',-k',k}(\Omega',\Omega'',\Omega''') - \nu_{k',k,-k'}(\Omega',\Omega'',\Omega''')}{(\omega_k - \omega_{k'} - \Omega'' - \Omega''')(\omega_k - \Omega'')} + \right.$$

$$+ \frac{\nu_{-k',k',k}(\Omega''',\Omega',\Omega'') - \nu_{-k,k,k'}(\Omega''',\Omega'',\Omega')}{(\omega_k + \omega_{k'} - \Omega' - \Omega'')(\omega_k - \Omega'')} - \frac{\nu_{k',k,-k'}(\Omega',\Omega'',\Omega''')}{(\omega_k - \Omega'')(\omega_{k'} + \Omega''')} + \frac{\nu_{-k',k,k'}(\Omega''',\Omega'',\Omega')}{(\omega_k - \Omega'')(\omega_{k'} + \Omega')} + \qquad (2)$$

$$\left. + \frac{\nu_{k,k',-k'}(\Omega'',\Omega',\Omega''')}{(\Omega' + \Omega''')(\omega_{k'} + \Omega''')} - \frac{\nu_{k,-k',k'}(\Omega'',\Omega''',\Omega')}{(\Omega' + \Omega'')(\omega_{k'} - \Omega')} \right\}$$

Если в первом члене (2) числитель преобразовать с помощью (42) и затем произвести замену переменных, то он примет вид

$$\frac{1}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega'\, d\Omega''\, d\Omega''' \left[\nu^*_{k',-k,k}(\Omega',\Omega'',\Omega''') - \nu^*_{k',k,-k'}(\Omega',\Omega'',\Omega'')\right)}{(\omega_k - \Omega' - \Omega'' - \Omega''')(\omega_k - \omega_{k'} - \Omega'' - \Omega''')(\omega_k - \Omega'')} \qquad (3)$$

мы будем рассматривать только те случаи, когда при описании флюктуации электрических полей в плазме можно воспользоваться WKB приближением и разложить электрические поля в ряд Фурье:

$$\delta E = -i\sum_{k,\omega} k\varphi_{k\omega}\, e^{-i\omega t + ikr} \qquad (4)$$

где $\varphi_{k\omega}$ – Фурье – преобразование скалярного потенциала.

Подставляя (3) и (4) в (I), получаем поправку к функции распределения (3) в линейном приближении:

$$f^j_{k\omega} = \frac{e_j}{m_j}\int_{-\infty}^{t}\left\{-ikv_\perp\frac{m_j}{T_j} - ik_z v_z\frac{m_j}{T_j} + i\frac{k_y}{\omega_{Hj}}\frac{d}{dx}\right\} f_{0j}(x,v)\varphi_{k\omega}\, dt' \qquad (5)$$

Интегрирование по времени здесь легко проводится, если принять во внимание соотношения:

$$kr_\perp(t') = -\frac{[k\times v(t')]_z}{\omega_{Hj}} + \frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}} + kr_\perp(t),$$

$$ikv_\perp(t)\, e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}} = \omega_{Hj}\frac{\partial}{\partial\psi_k} e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}}, \qquad (6)$$

$$e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_\ell\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hj}}\right) e^{-i\ell\left(\theta_j(t) + \frac{\pi}{2} - \psi_k\right)}$$

Используя их, из (5) получаем

$$f^j_{k\omega} = \varphi_{k\omega}\sum_\ell F^j_{k\omega,\ell}(x, v_\perp, v_z) J_\ell(\alpha_j s)\, e^{+i\ell(\theta + \frac{\pi}{2} - \psi_k) + i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}},$$

$$F^j_{k\omega,\ell} f_{0j} = \frac{e_j}{T_j}\cdot\frac{\ell\omega_{Hj} - k_z v_z + k_y\frac{T_j}{m_j\omega_{Hj}}\frac{d}{dx}}{\omega - k_z v_z + \ell\omega_{Hj} + i0} f_{0j},$$

$$\alpha_j = k_\perp r_j, \quad s = \frac{v_\perp}{v_{Tj}}, \quad v_{Tj} = \sqrt{\frac{T_j}{m_j}}, \quad r_j = \frac{v_{Tj}}{\omega_{Hj}}$$

Поскольку возмущенная функция распределения уже зависит от фаз вращения частиц на орбитах θ_j, то по сравнению с (5) у нас появляются члены нового типа, связанные с дифференцированием по θ_j : их интегрирование по времени проводится с использованием соотношения

$$ik_\theta(t)\, e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j} = -i\left[k\times\frac{v(t)}{v_\perp^2}\right]_z e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{v_\perp\partial v_\perp} e^{-i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}}\right)$$

В результате функция распределения $f^j_{k,\omega'+\omega''}$ во втором приближении примет вид

$$f^j_{k,\omega'+\omega''} = \frac{e_j}{m_j}\sum_{k'+k''=k}\sum_{\ell,p=-\infty}^{\infty}\varphi_{k'\omega'}\varphi_{k''\omega''}\left\{i\frac{[k'\times k'']_z}{\omega_{Hj}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{Hj}}{v_\perp^2}\left(p\alpha''_j\frac{\partial}{\partial\alpha''_j} - \ell\alpha'_j\frac{\partial}{\partial\alpha'_j}\right) - \left(p\frac{m_j\omega_{Hj}}{T_j} - k'_z\frac{\partial}{\partial v_z} + k_y\frac{d}{dx}\right)\right\}\cdot \qquad (7)$$

$$\frac{J_\ell(\alpha''_j s_j) J_p(\alpha'_j s_j)\, e^{i(\ell+p)(\theta_j + \frac{\pi}{2}) - i\ell\psi_{k''} - ip\psi_{k'}}}{\omega' + \omega'' - (k'_z + k''_z)v_z + (\ell+p)\omega_{Hj} + i0}\tilde{F}_{k''\omega''\ell} f_{0j}\, e^{i\frac{[k\times v(t)]_z}{\omega_{Hj}}}$$

Здесь дифференцирование по скоростям $S = \frac{v_\perp}{v_{Tj}}$ в аргументах функций Бесселя заменено на дифференцирование по соответствующему волновому числу α_j, так что оставшиеся дифференцирования проводятся при $S = Const$. Дальнейшая итерация кинетического уравнения из формулы (7) становится очевидной и мы её опустим.

Мы выпишем только выражения для диэлектрическ й проницаемости с точностью до третьего порядка по амплитудам Линейное приближение дает нам дисперсионное уравнение дл потенциальных колебаний неоднородной плазмы:

$$\varepsilon^{(1)}(\omega,k) = 1+\sum_j \frac{4\pi e_j^2}{k^2 T_j}\left(n_0 - \sum_\ell \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - k_y v_n^j)\Gamma_\ell(d_j)}{\omega - k_z v_z + \ell\omega_{Hj} + i0} f_{0j}(v_z)\, dv_z\right),$$

где: $\Gamma_\ell(d) = I_\ell(d^2)\, e^{-d^2}$, I_ℓ -функция Бесселя от мнимого аргумента; $v_n^j = \frac{T_j}{m_j \omega_{Hj} n}\frac{\partial n}{\partial x}$ – скорость дрейфа частиц сорта j из-за неоднородности плотности.

Симметризуя выражение (7) по индексам (k', k'') получаем выражения для откликов $\mu^{(2)}$ во втором приближении:

$$\sum_j 4\pi e_j \int f^j_{k,\omega'+\omega''}(r,v)\, dv = \sum_{k'+k''=k} \mu^{(2)}_{k',k''}(\omega',\omega'')\,\varphi_{k'\omega'}\varphi_{k''\omega''},$$

$$\mu_{k',k''}(\omega',\omega'') = -\sum_j \frac{4\pi e_j^3}{T_j^2}\,\omega_{Hj}\int_{-\infty}^{\infty} dv_z\, f_{0j}(v_z)\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} s\,ds\,\Big\{ i[k'\times k'']_z\, r_i^2 \cdot$$

$$\cdot J_\ell(d_j''s)J_p(d_j's) - \left(\ell J_\ell(d_j s)\frac{dJ_p(d_j's)}{s\,ds} - pJ_p(d_j's)\frac{dJ_\ell(d_j''s)}{s\,ds}\right)\Big]\left(\frac{\omega''-k_y''v_n^j}{\omega''-k_z''v_z+\ell\omega_{Hj}+i0} - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega'-k_y'v_n^j}{\omega'-k_z'v_z+p\omega_{Hj}+i0}\right)\frac{1}{\omega'+\omega''-(k_z'+k_z'')v_z+(\ell+p)\omega_{Hj}+i0} + \frac{1}{\omega_{Hj}}\left[1-\frac{\omega'-k_y'v_n^j}{\omega'-k_z'v_z+p\omega_{Hj}}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{\omega''-k_y'v_n^j}{\omega''-k_z''v_z+\ell\omega_{Hj}+i0}\right]J_\ell(d_j''s)J_p(d_j's)\Big\} J_{\ell+p}(d_j s)\cdot e^{-i\ell(\psi_{k''}-\psi_k)-ip(\psi_{k'}-\psi_k)}$$

Совершенно аналогично в третьем приближении:

$$\mu_{k',k,-k'}(\omega',\omega,-\omega') = \sum_j \frac{4\pi e_j^4}{T_j^3}\,\omega_{Hj}^2 \sum_{q,\ell,p,n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{k'}\int_0^{\infty} s\,ds\cdot e^{-\frac{s^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} f_{0j}(v_z)\,dv_z\,\cdot$$

$$\cdot\left[[k'\times k'']_z\, r_i^2 J_q(d_j s)J_p(d_j's) + i\left(qJ_q(d_j s)\frac{dJ_p(d_j's)}{s\,ds} + pJ_p(d_j's)\frac{dJ_q(d_j s)}{s\,ds}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[[k'\times k'']_z\, r_i^2 J_\ell(d_j s)J_n(d_j's) - i\left(\ell J_\ell(d_j s)\frac{dJ_n(d_j's)}{s\,ds} + nJ_n(d_j's)\frac{dJ_\ell(d_j s)}{s\,ds}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\omega-k_y v_n^j}{\omega-k_z v_z+\ell\omega_{Hj}+i0} - \frac{\omega'-k_y'v_n^j}{\omega'-k_z'v_z+n\omega_{Hj}+i0}\right)\cdot\frac{e^{-i(\ell-q)(\psi_k-\psi_{k'})}\,\delta_{q,p+\ell-n}}{(\omega-\omega'-(k_z-k_z')v_z+(\ell-n)\omega_{Hj}+i0)(\omega-k_z v_z+q\,\omega_{Hj}+i0)}$$

Литература.

I. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев "Ядерный синтез", I,(1961), 82.

2. W. Drummond, D. Pines "Ядерный синтез", дополнение,(1962), часть 3,1049.

3. Саmас et. al. "Ядерный синтез",дополнение (1962),часть 2, 423.

4. А.А.Галеев,В.И. Карпман, "Ж.эксп.теор.физ", 44, (1963), 592.

5. Б.Б.Кадомцев,В.И. Петвиашвили, Ж.эксп.теор.физ.",43 (1962), 2234.

6. В.И.Карпман "Докл. Акад. Наук СССР", I52,587,(1963)

7. А.А.Веденов "Вопросы теории плазмы", Госатомиздат,Москва, 3, (1963).

8. С.В.Иорданский,А.Г.Куликовский "Ж.эксп.теор.физ.", 46, (1964), 732.

9. В.П.Силин "Ж. прикл.мех. и техн. физ.",I, (1964), 31.

I0. Л.М.Альтшуль,В.И.Карпман. Кинетика волн в слаботурбулентной плазме I. "Ж.эксп. и теор.физ." (в печати).

II. Л.М. Альтшуль,В.И. Карпман. Кинетика волн в слаботурбулентной плазме П. "Ж. эксп. и теор.физ." (в печати).

I2. L. Van Hove, Physica, 21, 517 (1955); 23, 44I (1957)

I3. Lectures in Theoretical Physics, Vol III, Interscience Publishers New York, 1963.

I4. Л.М.Горбунов,В.П.Силин. "Нелинейное взаимодействие плазменных волн." Препринт ФИАН,(1964).

I5. А.А.Галеев,В.И.Карпман,Р.З.Сагдеев "Об одной решаемой проблеме в теории турбулентности ". " Докл. Акад.Наук СССР" (в печати).

I6. В.И.Петвиашвили "Ж.эксп.теор.физ", 45 , (1963),I467.

I7. В.И.Карпман "Ж.прикл. мех. и техн. физ." 6 , (1963),34.

I8. Г.Сурамлишвили "Докл.Акад.Наук СССР", I53 (1963),3I7

I9. W. Drummond, M. Rosenbluth , Phys. Fluids, 5 (1962), 1507

20. А.А.Галеев,Л.И.Рудаков "Ж. эксп.теор.физ" 45 (1963),647.

2I. В.Н.Ораевский,Р.З.Сагдеев "Докл.Акад.Наук СССР, I50 (1963),775.

22. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев "Атомная энергия ", 15, (1963), 451.

23. А.Б.Михайловский, Л.В.Михайловская. "Ж.эксп. теор.физ". 45 (1963) 1566.

24. Б.Б.Кадомцев "Ж.эксп. теор.физ". 45, (1963), 1230. Д7 f(H)

25. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker, "Ядерный синтез" дополнение, 1962, часть I, 75.

В.И. Петвиашвили
ЖЭТФ 44 1993 1963

Михайловский
ДАН 156 N1 64 1964

Список примечаний к статье А.А. Галеева, В.И.Карпмана, Р.З.Сагдеева " Многочастичные аспекты теории с лабо турбулентной плазмы".

I. Однако вновь образованное распределение вполне может быть неустойчиво по отношению к другим типам колебаний

2. В дальнейшем мы почти везде будем рассматривать возмущения в виде набора колебаний $\sim e^{i(\omega t - kr)}$

3. Удобно рассматривать δ как некоторую функцию от ω, отличную от нуля лишь в сколь угодно малом интервале вблизи точки $\omega \simeq Re\,\omega_k$, причем в этой точке $\delta > |Im\,\omega_k|$. Тогда интегрирование выражения (15) можно проводить по вещественной оси.

4. Это означает, что мы пренебрегаем членами $\nu_k \tau^{-1}/\omega_k^2$, где – характерное время изменения энергии волны в результате нелинейного взаимодействия.

5. Все соотношения типа (28) мы будем называть спектральными разложениями.

6. Квантовый вывод кинетических уравнений для волн в плазме рассматривается в / 7 /.

7. Это однако вовсе не означает наличие нелинейной неустойчивости, ибо $\sum_k n_k \omega_k = Const$

8. С помощью кинетического уравнения для функции распределения (65) легко показать, что время установления "плато" на функции распределения в области резонанса частиц с вынужденными колебаниями всегда значительно больше (79).

9. Отметим, что оценка для τ, вытекающая из вида интеграла столкновений для четырехплазменного взаимодействия, полученного в / 18 / имеет неправильный порядок величины.

10. Дисперсионное уравнение работы / 19/ $\omega_k - \Omega_H = \Omega_H \frac{T_i}{T_e} \Gamma_1$ неправильно учитывает зависимость частоты от температуры при $T_i \ll T_e$. Эта ошибка повторена в работах / 16,17 /.

11. Общее решение для спектрального распределения числа волн n_k с конечным числом N мод колебаний представляется в виде суммы $n_{k\omega} = \sum_{i=1}^{N} C_i \delta(k-k_i)\delta(\omega-\omega_i)$, коэффициенты которой C_i определяются из системы алгебраических уравнений (81). Существенно при этом, что деление этого уравнения на n_k сводит его к системе линейных алгебраических уравнений, которой уже не удовлетворяют найденные выше решения.

12. Численно зависимость $k_\perp(\beta)$ протабулирована в работе / 23 / для случая "универсальной неустойчивости". Мы считаем здесь, что давление плазмы не очень близко к критическому $\beta_* \simeq 0{,}13$, так что для коротких волн влиянием продольного движения ионов можно пренебречь.

13. В работах / 20,24 / в кинетическом уравнении для волн опущено нелинейное взаимодействие с электронами, а также та часть взаимодействия с ионами, которая у нас описывается $\mu_{k',k,-k'}$ и играет основную роль при $kr_i \gg 1$. Поэтому оценки амплитуд коротковолновых пульсаций из ранее полученных формул оказываются завышенными.

[20] $\nu_e > \omega_{Hi}(r_i \nabla n/n)^3$ $\quad D \sim \sqrt{\frac{m}{M_\beta}}\, r_i \frac{\nabla n}{n} \frac{cT}{eH}$

$\nu_e < \omega_{Hi}(r_i \frac{\nabla n}{n})^3$ $\quad D \sim \sqrt{\frac{m}{M_\beta}}\, \nu_e \left(\frac{\nabla n}{n}\right)^{-2}$

(109) стр54

[21] $D \sim \sqrt{\frac{m}{M_\beta}}\, \frac{r_i}{r} \frac{cT}{eH}$

или $D \sim \nu_e^2 r^2 \frac{\nu_a}{\nu_e}$

$D \sim \frac{1}{10} \nu_e \left(\frac{n}{\nabla n}\right)^2 \beta^{-2} \left(\frac{m}{M_\beta}\right)^{3/2}$ (103) стр48